金融工程

——衍生品与风险管理

基思·卡思伯森(Keith Cuthbertson)
德克·尼奇(Dirk Nitzsche) /著
张陶伟 彭永江 /译

Financial Engineering

Derivatives and Risk Management

中国人民大学出版社

著作权合同登记号
图字:01－2004－0214号

本书详细讨论了期货，“普通香草型”期权、互换，以及在投机和对冲中对奇异衍生品和利率期权的使用。在期权定价方面，除了阐述连续时间数学的解法外，还介绍了使用网格的数值方法（BOPM）、蒙特卡罗模拟和有限差分方法。实物期权理论和它在投资估值以及对生物和互联网公司定价中的应用，具有有效的实践意义。

本书为衍生品和风险管理的课程而设计，适用于金融MBA、金融学硕士或者本科生。本书可以单独学习，也可以作为本书作者写的另外一本书《投资学——现货和衍生品市场》的后续课程。

本书强调材料的现实性，包括如下内容：
主题文章、实际例子和学习目标；
《金融时报》和《华尔街日报》的摘要；
互联网网站，读者可以下载教师资源包和供学生使用的交互性Excel和GAUSS软件。

ISBN 7-300-05424-2
9 787300 054247 >

ISBN 7－300－05424－2/F・1692
定价：48.00元

金融工程

——衍生品与风险管理

基思·卡思伯森(Keith Cuthbertson)
德克·尼奇(Dirk Nitzsche) ／著
张陶伟　彭永江　／译

Financial Engineering

Derivatives and Risk Management

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

金融工程——衍生品与风险管理/卡思伯森等著；张陶伟，彭永江译
北京：中国人民大学出版社，2004

ISBN 7-300-05424-2/F·1692
Ⅰ. 金…
Ⅱ. ①卡…②张…③彭…
Ⅲ. ①金融体系-研究②金融-风险管理-研究
Ⅳ. F830.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 024045 号

金融工程——衍生品与风险管理
基思·卡思伯森 德克·尼奇 著
张陶伟 彭永江 译

出版发行 中国人民大学出版社
社　　址 北京中关村大街 31 号　　邮政编码 100080
电　　话 010－62511242（总编室）　010－62511239（出版部）
　　　　 010－82501766（邮购部）　010－62514148（门市部）
　　　　 010－62515195（发行公司）　010－62515275（盗版举报）
网　　址 http://www.crup.com.cn
　　　　 http://www.ttrnet.com（人大教研网）
经　　销 新华书店
印　　刷 中煤涿州制图印刷厂
开　　本 787×1092 毫米 1/16　　版　　次 2004 年 7 月第 1 版
印　　张 41.875 插页 2　　印　　次 2004 年 7 月第 1 次印刷
字　　数 1 043 000　　定　　价 48.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前言

曾任美国财政部长的拉里·萨默斯（Larry Summers）（1985）曾挑衅性地说，传统的金融学主要关注这样的问题：一瓶16盎司番茄酱的价格是否等于两瓶8盎司番茄酱的价格之和。相比之下，经济学家们解释的问题似乎更有意义：是什么决定了一瓶8盎司番茄酱的价格，这些因素应该包括变化的口味、技术以及相关替代物的价格等。即使这个类比基本正确，但是它却忽略了金融学和经济学之间紧密的相互作用，这一点已经在各类文献中随处可见。事实上，在“金融一方”，更相似的类比当属对“多莉”羊复制技术的探讨。我们不会忘记，爱丁堡大学的科学家们克隆出这只举世闻名的小羊，这是一项伟大的技术，同时也反映了金融工程领域的一些技术原理。例如，通过创造一些合成证券来确定衍生证券的价格。当然，由于多莉可以被复制或者说“制造”出来，它的价格应该和一只真羊的价格一样，但是这丝毫不影响多莉所具有的重大意义。事实上，如果发明了更高级的技术（例如，消除有害的基因代码，使细胞分裂的速度更快），使设计“新款多莉”的成本更低，这样一来，制造多莉的成本的变化将成为驱动真羊价格的主要因素。

目　　标

本书的一个关键目的就是阐述在投机、对冲以及套利过程中金融衍生品的应用实务。简而言之，就是分析金融工程中所使用的各种技术。第二个目的就是介绍各种方法，来评价市场的变化以及全球金融机构的信用风险。

分析金融衍生品和市场风险所使用的理论概念非常相近，我们认为现在应该把这两方面内容整合在一本书中。从金融从业者的角度看，自1996年J. P. 摩根的RiskMetrics集团发表了“在险价值”的思想以来，对市场风险的分析变得格外重要。现在，在发达国家大多数金融机构中，这已经成为设定市场风险监管资本要求的基础（正如巴塞尔国际结算银行大力推行的那样）。

近来，学者和专业人士在寻求新的方法来代替已经过时的1988年《巴塞尔协议》，人们的视线开始从市场风险转向信用风险。我们将讨论当前各种衡量信用风险的方法，同时也将介绍信用衍生品在对冲中的应用。

我们的目的是通过各类衍生品在现实世界中的实例，来引起读者的兴趣，使读者在理解这些资产的收益、对冲和定价之后，能发现某些理论思想的重要性。这自然会涉及对这些理论概念的分析，这又成为金融机构进行风险度量和管理的基础。

本书的内容已经试用于MBA和金融硕士的金融课程之中，主要是在皇家学院管理学院的金融课程中试用，另外也应用于一些金融从业者的专业课程。我们在管理学院的“客户”包括有社会科学和自然科学背景的学生，他们的学术背景比较多样化。他们付“高价”上课，大多数情况下，并不会仅为了附庸风雅而对这些理论感兴趣。他们更关注这些理论在“真实世界”中的应用。所以，并不是我们遇到的每一个金融学生都赞同《希腊古瓮颂》中的济慈名言：“‘美即是真，真即是美’，这就包括你们所知道和该知道的一切。”当然，作为教师，我们不得不强调要尽可能的“雅致”，但是我们在阐述任何理论概念时，都会提到一些相关的实务，这也是本书以及配套书《投资学：现货和衍生品市场》（Investments: Spot and Derivatives Markets）所遵循的基本原则。

本书主要用于金融、商务和管理学本科生最后一年的课程，也可用于MBA学生和金融硕士的核心课程。本书的内容同样适用于金融部门的专业人士。读者不需要对期权、期货以及互换等领域事先了解，也无需事先掌握投资和公司理财方面的核心课程。惟一的要求是，读者需要熟悉本科生课程中经济数学和统计学的内容。认为需要对基础数学、统计学和金融知识重新温习的读者，可参考本书的配套书籍《投资学：现货和衍生品市场》。

通俗易懂的风格

本书对理论概念的介绍都是基于实际的问题，同时本书也非常重视将直观的阐述与简单的数学和统计学相联系。本书在第17章使用连续时间数学之前，所涉及的数学远称不上复杂。所涉及的统计学也是如此，直到第24章，才在计算市场风险时引入了一些统计学的概念。但是，本

书对所有涉及的数学和统计学都进行了较为直观的解释，有关数学的详细推导，都放在每章后面的附录之中。

学习完这本书后，读者应当能够读懂使用连续时间数学的一些文献，例如 Wilmott (2000) 和 Briys (1998) 等，还有一些专业杂志，例如《衍生品学报》(Journal of Derivatives) 和《风险杂志》(Risk Magazine)。在计算方面，读者应该能够理解某些书籍中出现的高级数值技术，如 Clewlow 和 Strickland (1998) 以及 Cuthbertson (1996) 所提及的统计模型。

主题文章

书中的主题“文章”主要强调下列三个方面：

- **将理论与现实相联系的内容**。如“天气期货，何去何从”、“未来的期货”、“程序化交易”、“利森的杠杆失误”和“Metallgesellshaft 公司的滚动对冲”等。
- **公共政策内容**。如“巴塞尔的新笔触”、“BCCI 与 BOE”、“RiskMetrics 与巴塞尔的比较”和“市场信号与监管监督”等。
- **金融学的趣味性**。包括“隐性期权”、“粒子金融：PDE? (‘Pretty Damn Easy’)”和“高尚的追求”等。

学生学习

课本

包括学习目标、本章摘要、主题文章、实例、章末练习、术语表、技术性附录、符号列表。逻辑性强，层次明晰。

Wiley 网站：http://www.wiley.co.uk/cuthbertson

(i) 下载 Excel“实习”软件，重新生成正文中的表格和相应问题的答案。这些 Excel 文件都是“基于单元格”的，因此学生可以很清楚地看到使用的方法，并使之与课文中的内容相联系（如 Black - Scholes，用于 VaR 的方差—协方差法和 BOPM）。交互式的用户输入系统和图形输出也有助于理解（如“希腊字母”、BOPM 到 Black - Scholes、对冲误差等）。

(ii) 基于特定 Visual Basic 程序的 Excel 软件，具有交互式用户输入系统。

(iii) Gauss™程序。Gauss 代码与课文中用到的代数紧密相关，使用者还可以修正某些源代码。对于复杂的数学问题，该系统能迅速给出结果，输出高质量的图形（如“希腊字母”、利用蒙特卡罗模拟对奇异期权定价、有限差分、树和网格、计算 VaR 的蒙特卡罗等）。用户还可以从 Aptech 系统公司（www.aptech.com），花 40 美元左右，购买 Gauss Lite 软件。Gauss 的程序语言与其他的一些语言（如 Visual Basic，C++）非常相似，而且该语言可以轻松解决复杂的统计学/经济学问题和数值金融问题，这样，学生们也学到了另一门常用技能。

（iv）与其他带有免费Gauss和Excel软件的网站的链接。

（v）与有关更多主题的金融信息网站的链接（如期货和期权交易所、中央银行、金融监管者、互联网股票交易者和通用投资信息服务等）。

（vi）下载补充自测题和测验（有答案）以及与当前讨论有关的补充阅读材料。

教师材料

Wiley 网站：http://www.wiley.co.uk/cuthbertson

可以下载：

（i）书中所有的图形和表格（Word或Powerpoint格式）；

（ii）用于讲课的一套完整的Powerpoint幻灯片，该幻灯片还可以修改；

（iii）书中的章末练习答案以及补充问题和答案；

（iv）对关键问题主题文章的更新，以及为学生准备的补充阅读材料。

金融衍生品：建议的课程结构（一学期或两学期）

一学期课程

*两学期课程（**：表示补充材料）*

两学期的课程可以对复合衍生品以及利率衍生品的定价做更深入的介绍，包括随机积分和金融中的数值方法。

第1章	衍生证券：概述
第2章	期货市场
第3章	股票指数期货
第4章**	货币远期和期货
第5章**	短期利率期货
第6章**	长期国债期货
第7章	期权市场
第8章	期权定价
第9章	对冲与波动率
第10章	期权价差与股票期权
第11章**	外汇期权
第12章**	期货期权
第13章	组合保险
第14章	互换
第15章	利率衍生品

第 16 章**	复合衍生品
第 17 章**	资产价格动力学
第 18 章**	利率衍生证券的定价
第 19 章	实物期权

风险管理：建议的课程结构
（一学期）

下面，我们假设学生只了解投资学等课程的基础知识，所以一学期的课程中包含了更多的材料。

第 2 章	期货市场
第 8 章	期权定价
第 9 章	对冲与波动率
第 14 章	互换
第 20 章	对金融机构的监管
第 21 章	英国和美国的监管体系
第 22 章	市场风险
第 23 章	VaR：映射现金流
第 24 章	VaR：统计性问题
第 25 章	信用风险

以上各章的主题文章提供了许多有趣的实际例子。除此之外，Excel 和 Gauss 软件（从我们的站点可以得到）为我们提供了交互式“实习”的经验，而与其他网站的链接，也提供了更多的实际问题，可以作为我们的课程和课后作业的基础。

致 谢

本书及其配套书籍《投资学：现货和衍生品市场》的诞生期似乎比 6 只大象的出生还要漫长。感谢许多人的帮助，他们与我们一起讨论书中的内容，共同商量表述这些思想的最佳方式，特别是我们在皇家学院管理学院的同事。还要感谢我们的学生以及一些金融专业人士，他们也给我们提供了许多宝贵的建议。尤其感谢亚历山大·沃克曼（Alexander Workman）对几个 MBA 金融课程、皇家学院管理学院的金融硕士生以及从皇家学院数学系“漂移”过来的数学和金融硕士生关于第 19 章所做的要求。我们还获得了来自其他院校的建议，包括城市大学商学院的硕士生、在波尔多学习 DEA 的学生、墨西哥城 UNAM 的经济系和柏林 Freie 大学（卡思伯森（Cuthbertson）是那里的 Bundesbank 客座教授），这些人的意见使我们受益匪浅。书中内容也经过伦敦金融城专业人士的“测试”。当然也不能忘记税务总局，该局十分帮忙，没有在我们得到这笔费用之前就开出税单。许多草稿的输入和完善工作是由布伦达·穆尼奥斯（Brenda Munoz）

和伊冯娜·多伊尔（Yvonne Doyle）完成的。最后，要感谢John Wiley出版社的萨姆·惠特克（Sam Whittaker），她不仅监督了本书及其配套图书的诞生过程，而且她本人在此期间还生了一个孩子，当然，幸运的是，她用的时间要短得多。

目 录

第 1 部分 衍生品：概述

第 1 章 衍生证券：概述 …… 3
1.1 远期和期货 …… 4
1.2 期权 …… 8
1.3 互换 …… 14
1.4 对冲者、投机者和套利者 …… 16
1.5 本章摘要 …… 19
章末练习 …… 20

第 2 部分 远期和期货

第 2 章 期货市场 …… 23
2.1 期货市场的交易 …… 23
2.2 远期和期货价格 …… 34

2.3　利用期货合约对冲 …… 39
2.4　期货市场的投机 …… 46
2.5　远期合约与期货合约的价值 …… 46
2.6　本章摘要 …… 50
章末练习 …… 51
第3章　股票指数期货 …… 52
3.1　合约规范 …… 53
3.2　指数套利和程序化交易 …… 56
3.3　使用股票指数期货对冲 …… 58
3.4　利用股票指数期货投机 …… 63
3.5　本章摘要 …… 65
章末练习 …… 66
附录3.1　最小方差对冲率 …… 66
附录3.2　利用期货实现股票的相时策略 …… 69
第4章　货币远期和期货 …… 71
4.1　远期合约 …… 72
4.2　期货合约 …… 78
4.3　投机和对冲 …… 81
4.4　货币期货合约定价 …… 84
4.5　本章摘要 …… 86
章末练习 …… 86
附录4.1　利用期货进行对冲的数学原理 …… 88
第5章　短期利率期货 …… 91
5.1　合约规范 …… 92
5.2　隐含回购利率的套利分析 …… 97
5.3　对冲：利率期货 …… 99
5.4　欧洲美元期货叠期 …… 104
5.5　利率期货合约的定价 …… 109
5.6　价差交易 …… 111
5.7　本章摘要 …… 113
章末练习 …… 114
附录5.1　最优期货合约数量 …… 115
附录5.2　利率期货的定价 …… 117
第6章　长期国债期货 …… 121
6.1　合约规范 …… 122
6.2　转换因子和最廉价可交割债券 …… 125
6.3　利用长期国债进行对冲 …… 127
6.4　长期国债期货的定价 …… 132

6.5　长期国债期货价差和相时操作 …… 136
6.6　本章摘要 …… 138
章末练习 …… 139
附录6.1　相时操作和久期 …… 140

第3部分　期权和互换

第7章　期权市场 …… 145
7.1　期权 …… 146
7.2　内涵价值和时间价值 …… 150
7.3　期权市场的组织结构 …… 152
7.4　本章摘要 …… 162
章末练习 …… 163
第8章　期权定价 …… 164
8.1　影响期权价格的因素 …… 165
8.2　看跌—看涨平价：欧式期权 …… 167
8.3　二叉树定价模型 …… 170
8.4　*n*期BOPM和delta对冲 …… 174
8.5　提前执行、美式期权与红利支付 …… 184
8.6　Black - Scholes模型 …… 187
8.7　从BOPM到Black - Scholes …… 194
8.8　本章摘要 …… 198
章末练习 …… 199
附录8.1　比较BOPM与Black - Scholes公式 …… 199
第9章　对冲与波动率 …… 201
9.1　Delta对冲 …… 202
9.2　希腊字母 …… 205
9.3　波动率 …… 217
9.4　Black - Scholes公式的局限 …… 222
9.5　检验Black - Scholes模型 …… 224
9.6　本章摘要 …… 225
章末练习 …… 226
附录9.1　Black - Scholes模型和希腊字母 …… 227
第10章　期权价差与股票期权 …… 230
10.1　合成证券 …… 231
10.2　牛市和熊市价差 …… 233
10.3　跨式价差、勒式价差、蝶式价差和鹰式价差 …… 236
10.4　股票期权 …… 243

10.5 股票指数期权 …… 246
10.6 本章摘要 …… 251
章末练习 …… 251
第 11 章 外汇期权 …… 253
11.1 合约规范 …… 253
11.2 投机 …… 255
11.3 对冲与外汇期权 …… 257
11.4 欧式外汇期权的估价 …… 262
11.5 其他货币期权 …… 264
11.6 本章摘要 …… 265
章末练习 …… 265
第 12 章 期货期权 …… 267
12.1 市场惯例 …… 268
12.2 期权收益 …… 270
12.3 期货期权的定价 …… 271
12.4 交易策略 …… 273
12.5 本章摘要 …… 276
章末练习 …… 276
第 13 章 组合保险 …… 278
13.1 静态对冲 …… 279
13.2 动态组合保险的数学 …… 282
13.3 本章摘要 …… 290
章末练习 …… 291
第 14 章 互换 …… 292
14.1 利率互换 …… 293
14.2 利率互换定价 …… 302
14.3 货币互换 …… 306
14.4 货币互换的定价 …… 309
14.5 其他类型的互换 …… 311
14.6 本章摘要 …… 312
章末练习 …… 313
附录 14.1 浮动利率票据的估价 …… 314
附录 14.2 利用合成投资组合来为互换定价 …… 317
附录 14.3 对基差互换定价 …… 320

第 4 部分 高级衍生品和随机过程

第 15 章 利率衍生品 …… 325
15.1 长期国债以及欧洲美元期权 …… 326

15.2　利率上限、下限和双限协议 …… 327
15.3　利率互换期权 …… 338
15.4　远期互换合约 …… 339
15.5　嵌入债券期权 …… 340
15.6　本章摘要 …… 344
章末练习 …… 345
第16章　复合衍生品 …… 347
16.1　从期权角度看公司股票和债券 …… 348
16.2　基本的股权衍生品 …… 350
16.3　奇异期权 …… 355
16.4　对择式期权定价 …… 362
16.5　本章摘要 …… 364
章末练习 …… 365
第17章　资产价格动力学 …… 366
17.1　随机过程 …… 368
17.2　风险中性定价、伊藤引理和Black－Scholes偏微分方程 …… 374
17.3　使用网格来近似连续时间模型 …… 380
17.4　使用蒙特卡罗和有限差分方法对期权定价 …… 383
17.5　标的于不可交易“标的”变量的期权 …… 394
17.6　本章摘要 …… 398
章末练习 …… 399
附录17.1　伊藤引理 …… 400
附录17.2　Black－Scholes微分方程的推导 …… 401
附录17.3　风险的市场价格和等价鞅测度 …… 403
第18章　利率衍生证券的定价 …… 407
18.1　Black模型 …… 408
18.2　无套利方法和BOPM …… 412
18.3　对利率衍生证券定价：附息债券 …… 416
18.4　期限结构的均衡模型 …… 428
18.5　利用连续时间模型进行定价 …… 431
18.6　蒙特卡罗方法 …… 434
18.7　本章摘要 …… 435
章末练习 …… 436
附录18.1　利率期限结构的Ho－Lee模型 …… 437
第19章　实物期权 …… 440
19.1　概述 …… 441
19.2　实物期权的应用 …… 444
19.3　不同的实物期权 …… 446

19.4 期权定价模型 …… 448
19.5 数值实例 …… 449
19.6 深层次的问题 …… 458
19.7 网络公司的估值 …… 461
19.8 本章摘要 …… 463
章末练习 …… 463
附录 19.1 连续时间模型 …… 464

第5部分 风险和监管

第20章 对金融机构的监管 …… 473
20.1 监管的理由 …… 473
20.2 信用风险和《巴塞尔协议》 …… 479
20.3 本章摘要 …… 488
章末练习 …… 488
第21章 英国和美国的监管体系 …… 489
21.1 英国的监管体系 …… 490
21.2 美国的监管体系 …… 493
21.3 美国的近期变化 …… 496
21.4 国际信用与商业银行（BCCI） …… 499
21.5 本章摘要 …… 500
章末练习 …… 501
第22章 市场风险 …… 502
22.1 关键问题 …… 503
22.2 在险价值：VaR …… 506
22.3 RiskGrades™ …… 511
22.4 资本充足度和市场风险 …… 514
22.5 本章摘要 …… 520
章末练习 …… 520
附录 22.1 收益率波动和收益波动 …… 521
附录 22.2 VaR：汇率风险 …… 522
第23章 VaR：映射现金流 …… 524
23.1 映射：概述 …… 525
23.2 VaR：股票组合 …… 527
23.3 VaR：附息债券 …… 529
23.4 远期利率协议 …… 532
23.5 FRN 和互换的 VaR …… 534
23.6 外汇远期和期权的 VaR …… 536

23.7　本章摘要 …… 538
章末练习 …… 539
附录 23.1　VaR 和单指数模型 …… 540
附录 23.2　债券：现金流的分配 …… 542
附录 23.3　映射远期合约 …… 543
附录 23.4　映射期权 …… 544
第 24 章　VaR：统计性问题 …… 546
24.1　统计学基础 …… 547
24.2　参数估计 …… 549
24.3　投资组合 VaR 的非参数估计 …… 555
24.4　预测值的检验 …… 558
24.5　蒙特卡罗模拟 …… 560
24.6　VaR 和压力测试 …… 567
24.7　其他方法 …… 568
24.8　本章摘要 …… 570
章末练习 …… 570
附录 24.1　递推的指数加权移动平均公式的计算 …… 571
附录 24.2　蒙特卡罗模拟分析和 VaR …… 571
附录 24.3　最差情景分析 …… 574
第 25 章　信用风险 …… 576
25.1　CreditMetrics 方法 …… 578
25.2　衡量联合信用转移 …… 587
25.3　风险暴露的类型 …… 593
25.4　其他可选择的模型 …… 594
25.5　激励动机和 RAROC …… 598
25.6　对冲和信用衍生品 …… 600
25.7　监管 …… 603
25.8　本章摘要 …… 606
章末练习 …… 607
附录 25.1　信用评级的变化和马尔可夫链 …… 608
附录 25.2　互换中的信用风险 …… 609

术语表 …… 612
符号列表 …… 634
相关网站 …… 641
参考文献 …… 644

生品与风险管理　金融工程——衍生品与风险管理

第1部分

衍生品：概述

金融工程——衍生品与风险管理　金融工程——衍生品与风险管理

第1章

衍生证券：概述

学习目标

- 解释什么是远期（forward）合约和期货（futures）合约，以及它们的异同。
- 考察看涨期权和看跌期权的基本概念，以及它们到期时的回报如何提供“保险”（insurance）功能。
- 阐述利率互换（interest rate swap）和货币互换（currency swap）如何改变现有的支出与收入现金流的头寸状况，从而降低与这些现金流相联系的风险。
- 分析衍生证券如何被用于投机（speculation）、对冲（hedging）和套利（arbitrage）。

衍生证券主要有三种类型，分别是期货、期权和互换。衍生证券是一种本身价值取决于其他资产（标的资产）价值的资产。它们的价值“衍生”自标的资产。例如，如果AT&T公司破产，那么以该公司股票为标

的资产的期货合约就不会被交易。这些衍生证券可以被对冲者、投机者和套利者使用。

1.1 远期和期货

除非明确指出，在本书中“远期”和“期货”这两个名词可以互换使用，因为除了在交易方式上略有不同外，两者是非常相似的。远期合约多头（空头）的持有者与交易的另一方达成协议，约定在将来某一特定时间，以今天确定的价格买入（卖出）一项资产。

远期/期货合约的买方（卖方或空头）

- *有法定义务在将来某一特定日期（到期日或终止日）；*
- *以今天确定的某一特定价格（远期或期货价格）；*
- *买（卖）某一确定数量（合约规模）的；*
- *一项资产（标的资产）。*

期货合约与远期合约相似。**远期合约**（forward contract）是一种场外交易（OTC）的金融工具。交易双方通过直接协商（经常是通过电话），确定某一特定的交易金额和交割日期。相比之下，期货合约（在合约规模和交割日期方面）却是标准化的。期货交易在一个有组织的交易所进行，并且合约每天都会被进行重新估价（即逐日盯市）。当你买入或者卖出一个期货合约（例如可可）的时候，合约买卖的是一项法定权利，而不是可可本身（可可的买卖是在现货市场进行的）。正如我们将要在下一章看到的那样，（可可的）期货价格和现货价格有非常紧密的联系，但它们又绝对不同！

期货合约的交易发生在做市商之间，是在交易所的“交易池”进行的，世界上最大的几个期货交易所是芝加哥交易所（CBOT）、芝加哥商品交易所（CME）和费城股票交易所等。然而，近些年，交易方式逐渐从交易池的“公开喊价”转变为做市商之间的电子交易（最近甚至通过互联网进行）。例如，伦敦国际金融期货交易所（LIFFE）现在就是一个电子交易系统，欧洲的衍生品市场也是一样，如法国的 MATIF 和德国与瑞士的衍生品交易所 EUREX（即以前的 DTB 和 SOFFEX）。表 1—1 列出了各交易所交易的一些期货合约。

表 1—1　　期货合约的范例

合约	交易所	合约规模
1. 谷物和油料作物		
玉米	CBOT	5 000 蒲式耳
玉米	MCE	1 000 蒲式耳
小麦	CBOT	5 000 蒲式耳
小麦	MCE	1 000 蒲式耳
2. 食物		
可可	CSCE	10 公吨

续前表

合约	交易所	合约规模
橙汁	NYCTN	15 000 磅
3. 金属和石油		
金	MCE	33.2 金衡盎司
金（1 公斤）	CBOT	32.15 金衡盎司
银	CBOT	5 000 金衡盎司
4. 牲畜和肉		
生猪	CME	50 000 磅
猪肉	CME	40 000 磅
5. 外汇		
英国英镑	IMM	62 500 英镑
瑞士法郎	CME	125 000 瑞士法郎
欧元	CME	125 000 欧元
日元	CME	12 500 000 日元
6. 股票指数		
S&P500	IOM	250 美元×指数
Value Line	KCBT	500 美元×指数
FTSE100	LIFFE	10 英镑×指数
Eurotop100	LIFFE	20 欧元×指数
Nikkei225	IOM	5 美元×指数
7. 利率		
欧洲美元（90 天）	IMM	1 000 000 美元
欧洲美元（30 天）	IMM	3 000 000 美元
欧洲马克	IMM	1 000 000 德国马克
美国短期国债	IMM	1 000 000 美元
美国长期国债	CBOT	100 000 美元
美国长期国债	MCE	50 000 美元
3 月期英国英镑利率	LIFFE	500 000 英镑
3 月期欧洲 LIBOR	LIFFE	1 000 000 欧元
英国金边期货	LIFFE	100 000 英镑

注：CBOT：芝加哥交易所；
CME：芝加哥商品交易所；
NYCE：纽约棉花交易所；
IMM：芝加哥国际货币市场；
IOM：指数和期权市场；
KCBT：堪萨斯城交易所；
MCE：美国中部商品交易所；
LIFFE：伦敦国际金融期货交易所。

起初，期货市场的出现是为了消除商品的风险。例如，4 月份的时候一个农民知道他在 9 月份将要收获 5 000 蒲式耳的小麦。而一个为食品工业购买谷物的批发商很可能早在 4 月份就知道了他对于谷物的需求量。那么双方就可以签订一份合约，在 4 月份时商定一个价格，并以此价格在 9 月份交易谷物，由此来消除（对冲）风险。这就是一种远期合约，通过合约，交易双方的风险均得到了降低。同样道理，储藏了谷物的商人可以一直持有谷物，在现货价格上升时卖出谷物他就可以盈利。或者，他也可以在将来的某一时间，以今天商定的卖价卖出谷物。通过锁定未来的价格，谷物的持有者和将要购买谷物的人都把未来现货市场价格波动造成的风险降低为零。

市场分类

期货和期权的一个关键特征在于它们的标的资产（如 AT&T 公司的股票）是延期交割的，而现货资产则是立即交割的（尽管在现实中，经常会推延几天）。为了把衍生证券和标的（现货）资产的买卖进行区别，我们通常认为后者是发生在现金市场或现货市场的交易。衍生证券的主要用途之一是使价格的不确定性最小化。因此，如果标的资产（如通货、股票）交易活跃并且显示出很大波动性，就可能相应存在一个活跃的衍生品市场。

衍生证券的交易可以在交易池进行，也可以通过一个有组织的市场里（比如具有清算所、会员规则等）交易员之间的电子网络进行。有一些衍生品市场，如所有的外汇远期和互换合约，是一种场外交易的市场，合约的条款没有经过标准化，而是通过交易者和客户之间的个别协商达成的。在交易所里有着广泛的期权交易，但是通过场外市场交易的期权（特别是复合式期权或新型期权）也有很大规模。

现在美国有很多交易所进行期货交易，大多数合约可以划分为农产品期货合约（例如标的资产是生猪、猪肉、小麦），或者金属期货合约（如银），或者金融期货合约（其标的资产可以是标准普尔 500 的股票组合、通货、短期国债、长期国债、欧洲美元存款等有价证券）。农产品期货合约在某些交易所（如芝加哥交易所 CBOT）已经交易了上百年。1972 年芝加哥商品交易所开始交易货币期货，1975 年利率期货诞生，1982 年股指期货开始交易。1925 年芝加哥交易所成立了一个清算所，合约的立约人必须在其准备金账户存款，如果交易的某一方违约，那么这种做法就为合约提供了保险。1972 年以来，期货合约交易的数量有了惊人的大幅度增长，单就美国市场来说，合约数已经从 1972 年的每年 2 000 万张增加到 20 世纪 90 年代的每年超过 2 亿张。

在进行分析时，我们可以用相似的方式对待远期合约和期货合约，不过在某些细节上它们又略有不同（参见表 1—2）。远期合约是在到期日把现金一次结清，到期日前（一般）不涉及现金支付。远期合约是交易双方直接协商成交，并不适合在市场上进行买卖。期货合约在市场上交易，并涉及预先支付（初始保证金）问题。然而，初始保证金是用来避免交易双方违约风险的一项存款，它不是对期货合约本身的支付。保证金经常会得到适当的利息，所以从这点来看，不能说它是一项成本。由于期货价格不断变动，于是保证金账户就经常会有现金的流入流出。因此，期货合约是一个“每日盯市”的远期合约。

由于期货合约要在市场上进行买卖，为了方便交易，期货合约必须标准化，有固定的到期日（交割日）和固定的合约规模（例如芝加哥国际货币市场的 100 000 美元长期国债期货）。相比之下，在合约规模和交割日方面，远期合约却是根据交易双方的特定需求而定制的。最后，远期合

约标的资产（如货币）的实际交割率很高，而期货合约却通常是在到期日前通过反向操作冲销掉原来的合约。因此，对于期货合约来说，其标的资产的实际交割很少发生。

表 1—2　　**远期合约和期货合约的比较**

远期合约	期货合约
• 交易双方直接协议成交（合约不在市场上销售）	• 在交易所进行交易
• 市场参与者之间不互通大宗交易的信息	• 交易信息立即被市场的其他参与者获得
• 在到期日时进行实物交割或者现金结算	• 合约通常在到期日前就被冲销掉
• 通常只有一个交割日	• 有一系列的交割日
• 到期日前没有现金支付	• 保证金账户每天都有现金的流入流出
• 交割日与合约规模可以协商决定	• 标准化的合约

即使一直被持有至到期日，远期合约和期货合约也可以被用于投机，这时投机者（即远期合约或期货合约的持有者）在合约到期时会获得利润或受到损失。举个例子来说，到期日是 9 月份的银期货在$t=0$ 时价格是 $F_0=100$ 美元/吨，如果 9 月份的现货价格变为 $S_T=105$ 美元/吨，那么多头期货合约的持有者就可以在期货市场以 100 美元/吨的价格买进银，然后在现货市场以 $S_T=105$ 美元/吨的价格转手卖出，这样每吨银就得到了 5 美元（$=S_T-F_0$）的利润。因此在远期市场，投机者是非常活跃的。

大多数期货合约都会在到期日前被冲销。冲销合约的时候，清算所会返还保证金账户的余额（在此前持有合约期间，保证金账户已经每天根据盈利或者亏损情况进行了相应调整）。所以即使在到期日之前就进行平仓，期货合约仍然可以用来投机。由于期货价格取决于其标的资产现货的价格，所以期货价格的变动和现货价格的变动经常是一致的。期货合约的投机很简单：假设你以 $F_0=100$ 美元的价格买了一个 3 个月期的期货合约，1 个月后又在市场上以 $F_1=110$ 美元的价格卖出进行平仓，那么清算所就会开给你一张 10 美元的支票，而这 10 美元的利润来自于那些最开始卖期货合约，做了空头的人。（在下一章我们将会看到细节略有出入，但原理是正确的。）或者如果你一开始以 $F_0=100$ 美元的价格卖出一个合约，之后又以 $F_1=90$ 美元的价格买入（即高卖低买），你同样也可以得到 10 美元的利润。期货合约标的资产的类型几乎是没有限制的，但是只有那些对于对冲和投机有用的品种会长期以来一直交易，交易所会取消交易量很小的期货合约的交易。在文章 1.1 里，我们介绍了一些交易所最近开始交易的天气期货合约。

文章 1.1　　天气期货，何去何从？

如果你要在佛罗里达种植橘树，那么通过出售一个 6 个月期的橘子期货合同，锁定橘子的售价和数量，你就可以对你的橘子头寸进行对冲。但是问题在于你并不知道 6 个月后你能供给多少橘子，因为橘子的产量部分地取决于天气状况。所以单单这一份合同还不能够覆盖你所有的风险。不过不必担心：1999 年 9 月天气期货合约应运而生了。该期货合约的收益情况是随着温度的不同而变化的，它对于农民、电力公司和保险公司对冲风险是非常有用的。以保险公司为例，天

气情况恶劣时，由于意外事故和巨灾发生的理赔会更多，这时天气期货可以让保险公司少受损失。

举例来说，农民们知道他们的庄稼产量（亦即可以提供的数量）是和天气状况紧密联系的，于是一旦庄稼收成不好，他们就可以从天气期货上得到部分的补偿。天气恶劣的时候，农民的庄稼减产，他们就不能提供期货合同中所承诺数量的橘子。这时他需要在现货市场以较高的价格（由于橘子通常供小于求）买入不足的部分。但是，如果他做了天气期货的空头（温度过低时会盈利），情况就不同了：在期货市场得到的收益可以补偿他在现货市场高价购买橘子受到的损失。

同理，天气异常冷时，随着对消费者开始供暖，所有的能源公司都需要购买更多的燃料（天然气），于是现货市场的燃料价格开始提升，这样能源公司就面临着日益升高的成本。如果能源公司事前做了一个天气期货的空头，那么他就可以以期货空头的利润来冲销现货市场的高成本。

当美国有6个城市的温度异于18.3摄氏度时，芝加哥商品交易所的天气期货合约就会产生盈利或亏损。回报的多少取决于这些城市一个月里温度高于或低于18.3摄氏度的天数。

2000年1月，伦敦国际金融期货交易所开通了一个交易欧洲天气衍生品的网站：I-WeX.com。接下来还要看人们是否对天气带来的风险有足够的兴趣，以支持这些新合约经常性的交易。如果你喜欢预测天气，并且爱好打赌，那么用天气合约进行投机活动再合适不过了。假如做了一个期货的空头，那么就祈祷寒冷的天气吧，然后就可以考虑去那些气候温暖的地方度假了。

1.2 期权

商品期货的市场早在19世纪中叶就存在了，而期权合约（见表1—3）交易的历史相对来说却短得多。

期权合约的持有者拥有在将来某一时间，以某一固定价格买/卖一项资产（标的资产）的权利，但他却并没有这样的义务。这一点正是期权合约与远期合约和期货合约的关键区别。

需要再次注意的是，人们交易的是“买卖合约所规定标的资产的法定权利”，而不是指标的资产本身。期货合约多头的持有者承诺将来某一时间，以某一固定价格买或卖一项资产，如果到期前他没有进行任何操作，那么合约到期时他就必须以合约规定的价格进行标的资产的交割。相比之下，看涨期权的持有者却可以一走了之，他有权选择是否执行期权，是否在将来的某一时间，以一个固定价格买这项资产。正如我们将要在下文看到的，这种权利并不附带义务，合约持有者从上涨的价格中得到的利润没有封顶，但是却保证损失有一个底线。为得到这项特权，投资者必须预先支付一笔不可返还的费用，以购买一份期权合同，这个费用就是所谓的期权价格或期权金。由于期货合约没有赋予投资者对合约“一走了之”的特权，所以购买一个期货合约也就不需要成本。

表 1—3　　**期权合约**

合约	交易所	合约规模
1. 单只股票	CBOE，NYSE，AMEX，PHSE，LIFFE，SIMEX	通常为 100 股股票
2. 指数期权		
S&P500 指数	CBOE	500 美元×指数
FTSE100 指数（欧美）	LIFFE	每个指数点 10 英镑
NYSE 指数	NYSE	500 美元×指数
金/银指数	PHSE	
外汇期权		
英国英镑	PHSE	31 250 英镑
德国马克	PHSE	62 500 马克
日元	PHSE	6 250 000 日元
加拿大元	PHSE	50 000 加元
瑞士法郎	PHSE	62 500 瑞士法郎
3. 期货期权		
利率期货期权		
欧洲美元	IMM	1 000 000 美元
1 个月期 LIBOR	IMM	3 000 000 美元
美国短期国库券	IMM	1 000 000 美元
美国长期国债和 5 年期中期国债	CBOT	100 000 美元
3 个月期欧元 LIBOR	LIFFE	和相关期货相同
英国金边债券	LIFFE	和相关期货相同
指数期货期权		
S&P500 指数	IOM	500 美元×期权金
NYSE 综合指数	IOM	500 美元×期权金
Nikkei225 指数	IOM	5 美元×期权金
有相关期货产品的大部分商品（农产品和金属，见前文）	CBOT，CME，KCBT，COMEX，CTN	和相关的期货合约相同（见前文）
外汇期货期权		
英国英镑	IMM	62 500 英镑
德国马克	IMM	125 000 马克
日元	IMM	12 500 000 日元
瑞士法郎	IMM	125 000 瑞士法郎

注：CBOT：芝加哥交易所；
CME：芝加哥商品交易所；
NYCE：纽约棉花交易所；
IMM：芝加哥国际货币市场；
IOM：指数和期权市场；
KCBT：堪萨斯城交易所；
MCE：美国中部商品交易所；
LIFFE：伦敦国际金融期货交易所。

欧式期权的持有者只能在到期日买卖标的资产，而美式期权的持有者可以在到期日以前的任何时间执行期权，或者把合约卖给第三方。所有的期权合约都可以在到期日前转卖给第三方，这就是所谓的平仓或反向冲销。

期权有两种基本类型：看涨期权和看跌期权（分别可以是美式的或者欧式的）。

看涨期权

欧式看涨期权赋予了其多头持有者这样的权利（但并非义务）：

购买标的资产

- 在将来某一特定日期（即到期日或终止日）；
- 以一个特定的价格（执行价格）；
- 按照事先确定的某一数量（合约规模）；
- 并且为了取得这项特权今天需要支付期权金/期权价格。

如果你认为股票价格在未来会上涨，那么作为一个投机者，你就应该购买看涨期权。如果你是一个养老金基金的管理者，知道未来将要收到一笔钱，但是又担心股票价格会上涨，那么通过今天购买股票的看涨期权，你就可以锁定将来为股票支付的价格。给定现货市场的头寸状况，你就可以通过看涨期权降低风险。

看涨期权多头

考虑这样一个例子，7 月份购买了一手 XYZ 公司股票的欧式看涨期权。我们假设一手股票期权合约是买或卖 100 股股票的合同。如果 7 月份的看涨期权价格是 $C=3$ 美元/股，那么需要花费 300 美元购买该份合同。又假设该期权的执行价格是 $K=80$ 美元，到期日是 3 个月后，即 10 月份（见图 1—1）。

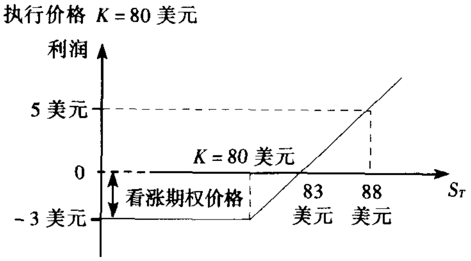


图 1—1 购买一份欧式看涨期权

如果一个养老基金在 7 月份购买了一手看涨期权，它就锁定了一个 80 美元的最低购买价格。若它决定在 10 月份的时候执行期权，那么这就是一种形式的保险。显然，如果 10 月份的时候，期权价格 $S_T=88$ 美元 $>$ $K=80$ 美元，那么养老基金就会执行期权，从而每股付出 80 美元（这与在纽约股票交易所花 88 美元/股购买相比是便宜的）。另一方面，如果 10 月份每股价格 $S_T=77$ 美元（即低于执行价格 $K=80$ 美元），那么养老金基金将不再执行期权，因为它在现货市场可以以相对低的成本买到这些股票。因此，对于养老基金来说，看涨期权以一种最高买价（$K=80$ 美元）的形式为它提供了保险，并且在 $S_T<K$ 的时候还允许它不执行期权。

现在考虑一下购买看涨期权的投机动机。如果 10 月份时股票价格变为 $S_T=88$ 美元，那么看涨期权的持有者就可以以 $K=80$ 美元的价格进行股票的实际交割，然后在现货市场以88 美元/股的价格卖出。这样，他每股得到 8 美元（$=S_T-K=88$ 美元-80 美元）的毛利润，再减去最初付出的期权金 $C=3$ 美元/股，从而他的净利润为 5 美元/股（见图 1—1）。因此通过持有一个看涨期权得到的盈利为：

$$\begin{aligned}\Pi&=(+1)[\max(0,S_T-K)-C] \qquad (1.1)\\&=S_T-K-C \quad (S_T>K)\\&=-C \quad (S_T<K)\end{aligned}$$

$\Pi=0$ 的时候，股票价格恰好使投资者的损失为零，因此有：

$$S_{BE}=K+C=80+3=83\text{（美元）} \qquad (1.2)$$

由于一手期权合约包含 100 股股票，所以当 $S_T=88$ 美元的时候，投机者总共可以获得 500 美元的利润。另一方面，如果在到期日价格跌到 $S_T=78$ 美元（$<K$），使得期权没有价值，投机者就不会执行期权，但这时他的最大损失仅为最初他购买期权时所付出的期权金。

因此看涨期权多头的持有者将他的风险底线限制在了期权金的水平（本例中为 $C=3$ 美元），但是却能得到价格上升带来的所有收益。因此他的回报是不对称的和非线性的。正是由于看涨期权的多头合约给投机者提供了 $C=3$ 美元的损失下限，但是允许他得到高于执行价格的股价上升的任何好处，因此，可以说看涨期权的多头合约提供了某种形式的保险。对于养老基金来说，“保险”就是指 3 个月后他为股票付出的最高价格仅为 $K=80$ 美元，而为此他需要付出“保险费”也就是期权金 $C=3$ 美元。请注意，假设 7 月份购买看涨期权的时候实际股价是 $S_0=78$ 美元，这个价格不是你锁定的最低买价，你锁定的买价是 $K=80$ 美元。

发行（出售）一个看涨期权

看涨期权的发行者是怎样的情形呢？如果 $S_T=88$ 美元，那么她就不得不在现货市场以 $S_T=88$ 美元的价格购买股票，然而从期权的买方那里只收到 $K=80$ 美元（见图 1—2）。她每股损失了 8 美元（$=S_T-K$），减去她收到的看涨期权金 $C=3$ 美元，她每股净损失了 5 美元，整个合约共损失了 500 美元，恰好是看涨期权买方盈利的数额。

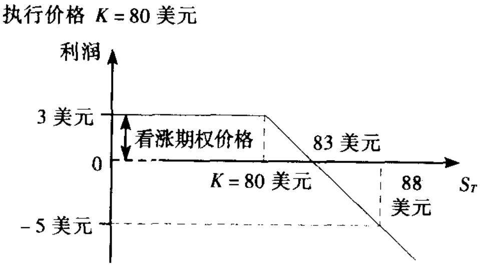


图 1—2　出售（发行）一份欧式看涨期权

另一种情况下，如果 10 月份的实际股价是 $S_T=77$ 美元（低于执行价格 $K=80$ 美元），那么看涨期权的持有者不再执行期权（因为在现货市场她可以以相对较低的成本买到这些股票），于是期权发行者就可以从收到的期权金上得到每股 3 美元的利润。于是发行一手看涨期权的报酬是

（和持有看涨期权相反）：

$$
\begin{aligned}
\Pi &= (-1)[\max(0,\ S_T-K)-C] \\
&= -[(S_T-K)-C] \quad (S_T>K) \\
&= +C \ (S_T \leqslant K)
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

平仓

期权合约通常都不是一直被持有至到期日，相反，投机者通过对她的多头头寸平仓来盈利，例如看涨期权的买方再做一个空头。我们将会看到，如果标的股票 S 的价格上涨，那么看涨期权的期权金也会随之增长，例如从 $C_0=3$ 美元到 $C_1=4$ 美元。因此她在到期日前冲销掉合约的时候，她从交易对方（即买方）处收到 $C_1=4$ 美元，这样她得到了 1 美元（=4 美元－3 美元）的投机利润，即看涨期权买价和卖价的差异。期权的多头通过清算所得到她的现金收益。相反，如果股票价格在她购买看涨期权后下跌，那么看涨期权金也会跌到 3 美元以下，如果此时平仓这笔交易就会使她亏损。因此，看涨期权多头的裸头寸风险是非常大的（虽然你最大的损失是期权金 $C_0=3$ 美元）。

看跌期权

一个看跌期权赋予了持有者下面的权利（但并非义务）：

出售标的资产

- 在将来某一特定日期（即到期日或终止日）；
- 以一个特定的价格（执行价格）；
- 按照事先确定的某一数量（合约规模）；
- 并且为了取得这项特权今天需要支付期权金/期权价格。

看跌期权多头

举一个例子，假如你是养老基金的管理者，并持有 100 股现货价格为 $S_0=72$ 美元的 ABC 股票。假设 3 个月后你需要向某个人一次性支付一笔养老金，可是你又担心接下来的 3 个月股价会跌到 70 美元以下。那么现在你就可以通过购买一手 3 个月期，执行价格为 $K=70$ 美元的 100 股股票的看跌期权。为此你需要支付 $P=2$ 美元的期权金。另一方面，如果到期时 $S_T=75$ 美元 $>K=70$ 美元，那么你就可以放弃执行期权，而在纽约股票交易所以 75 美元的价格将你的股票卖出。这意味着 3 个月后现货价格无论发生怎样的波动，你或者可以以 $K=70$ 美元的最低价格在期权市场卖出，或者可以以高于 $K=70$ 美元的价格在现货市场卖出。因此说看跌期权的多头为养老金基金提供了某种形式的保险，同时还允许它从上升的价格中获利（见图 1—3）。

对于看跌期权同样存在着投机的机会。例如如果到期日时 $S_T=65$ 美元 $<K=70$ 美元，作为看跌期权多头的投机者就可以以 $S_T=65$ 美元/股的价格在现货市场购买 100 股股票，而通过执行期权每股得到 $K=70$ 美元的收益。于是她每股得到了 5 美元（$=K-S_T$）的毛利润和 3 美元（支付了看跌期权金后）的净利润。因此通过持有看跌期权得到的收益为：

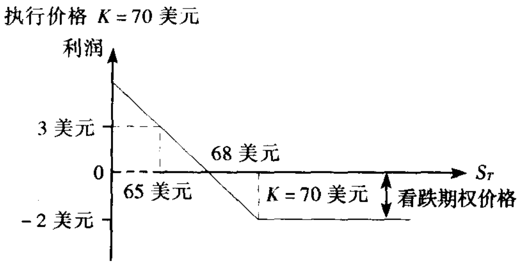


图 1—3　购买（做多）一份欧式看跌期权

$$\begin{aligned}\Pi &= (+1)[\max(0,\ K-S_T)-P] \quad (1.4)\\ &= K-S_T-P \quad (S_T<K)\\ &= -P \quad (S_T\geqslant K)\end{aligned}$$

当$\Pi=0$时，股票的价格为：

$$S_{\mathrm{BE}}=K-P=70-2=68\text{（美元）} \quad (1.5)$$

如果$S_T>K$，那么投机者不会执行看跌期权（到期时没有价值），但是她的损失至多为看跌期权的期权金$P=2$美元。

发行（出售）看跌期权

一手执行价格为$K=70$美元，但到期时价格为$S_T=65$美元的看跌期权的发行者每股将会损失 5 美元，因为她不得不以$K=70$美元的价格从看跌期权多头处购买实际上只值 65 美元的股票（见图 1—4）。然而，在收到了 2 美元的看跌期权金后，这一损失减少到了 3 美元。因此发行看跌期权的盈利恰好和购买看跌期权的收益成镜像关系：

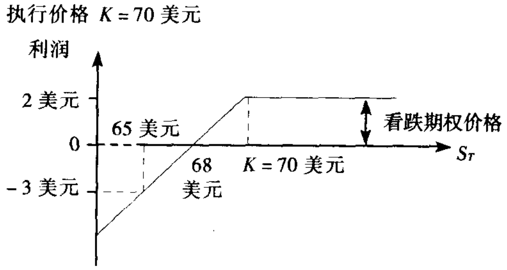


图 1—4　出售（发行）一份欧式看跌期权

$$\begin{aligned}\Pi &= (-1)[\max(0,\ K-S_T)-P] \quad (1.6)\\ &= -[(K-S_T)-P] \quad (S_T<K)\\ &= +P \quad (S_T\geqslant K)\end{aligned}$$

现在已经有很多市场进行期权合约的交易，其中交易股票期权的最大交易所是芝加哥交易所。1973 年以来，期权市场的发展速度超乎想像。20 世纪 70 年代市场上主要以外汇期权为主，到了 80 年代，期权市场上也出现了关于股指（例如标准普尔 500 和英国富时 100）、长期国债、利率以及期货和互换的期权。

1.3 互换

互换首先出现在 20 世纪 80 年代早期，主要用于对冲和交换利率风险。

> *互换是交易双方通过场外市场协商，在事先确定的将来某一系列日期交换现金流的协议。*

普通香草利率互换（plain vanilla interest rate swap）经常是指交易的一方（A 方）同意从另一方（B 方）收取固定利率的利息而向他支付浮动利率的利息。通常情况下，利息支付使用同种货币。

互换的支付基于名义本金，但只进行利息的交换。至于付款日期和所选用的浮动利率则是在签订合约伊始就确定的。在一个普通香草型互换合约里，固定利率支付者在未来每个付款日需要支付的利息金额是确定的，但是浮动利率支付者却不能确定。在互换合约的交易中，中介机构通常是银行，它们充当交易者的角色。银行多数是国际互换和衍生品协会（ISDA）的会员，国际互换和衍生品协会通过其“主互换协议”（master swap agreement）提供了一个标准化的互换协议，必要时可以对该协议加以修改来协调大多数客户的需求。交易者通过买卖价差来获利，并且可能收取少量经纪人佣金。如果一个互换交易者成为互换合约的一方，但是不能找到合适的交易对手，那么他就拥有了一个开放头寸（净支出或者净收入是固定或浮动利率），通常在期货市场（有时是期权市场）对冲掉这些头寸，直到最后找到一个合适的交易对手。

利率互换

一个互换合约可以将一系列浮动利率的应付或应收款转换为固定利率的应付或应收款。考虑一个发行了 LIBOR+0.5%的浮动利率（见图 1—5 上半部分）债券的公司。如果它签订了一个互换合约，收取浮动利率 LIBOR，支付固定利率 6%，那么它的净支付就是 6%+0.5%=6.5%

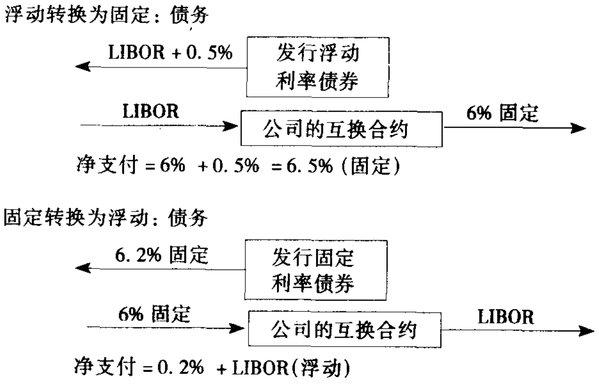


图 1—5　债务：利用互换转换利率

的固定利率。通过这笔交易，该公司将浮动利率的债务转换为固定利率的债务。在图 1—5 的下半部分，我们可以看出，如果一个公司发行了 6.2%固定利率的债券，但是以后又想换为浮动利率，那么通过一份“收取 6%固定利率，支付 LIBOR 浮动利率”的互换合约，它就可以达到目的。这份合约使得它得到了一个 LIBOR+0.2%浮动利率的债务。

相似地，如果一个公司或者金融机构持有一种 5.7%固定利率的债券（见图 1—6 下半部分），并且签订了“支付 6%固定利率，收取 LIBOR 浮动利率”的互换合约，那么结果就是原固定利率收益的资产变为 LIBOR－0.3%的浮动利率。最后，如果一个金融机构持有 LIBOR－0.5%浮动利率的债券（见图 1—6 上半部分），它签订了“收取 LIBOR 浮动利率，支付 6%固定利率”的互换合约，那么结果就是它最终会收到 5.5%的固定利率。因此可以用互换合约来设计一个应收/应付款利率从浮动型向固定型的转换（反之亦然）。

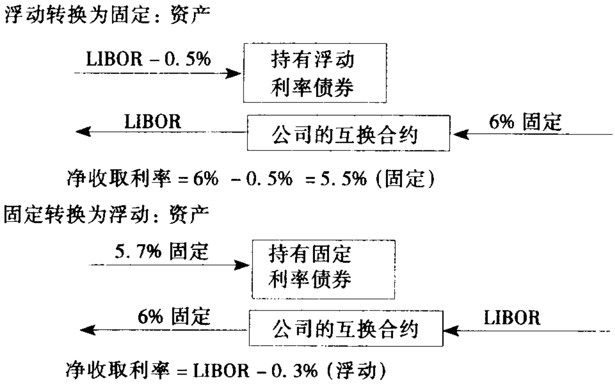


图 1—6　资产：利用互换转换利率

现在让我们来看看交易者是如何通过互换合约来降低总体利率风险的。公司正常的商业运作通常都意味着它们面临利率风险。在美国商业银行和存贷机构（S&L，英国为建筑协会，或是建房互助协会）经常会有以贷款和住房抵押的形式存在的应收款，比方说利率为 12%，它们同时又以浮动利率（比如 LIBOR－1%）存款的方式筹集资金（见图 1—7）。如果现在的浮动利率是 11%，那么银行就可以得到年利率 2%的利差收入。然而一旦 LIBOR 上升的幅度超过 2%，银行就会亏损。因此金融机构也面临着利率风险。可是如果它签订了一份“收取 LIBOR 浮动利率，支付 11%固定利率”的互换合约，通常情况下的利率上涨就将不再使其蒙受损失，因为现在合约使它的应收款有了一个固定收益率 2%，而这个收益率和将来浮动利率的水平是无关的。

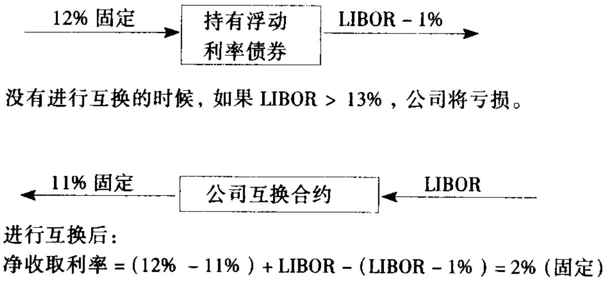

12% 固定
持有浮动利率债券
LIBOR - 1%
没有进行互换的时候，如果 LIBOR > 13%，公司将亏损。
11% 固定
公司互换合约
LIBOR
进行互换后：
净收取利率 = (12% - 11%) + LIBOR - (LIBOR - 1%) = 2% (固定)

图 1—7　互换：金融中介

另外一个进行互换的理由就是一些公司可以以相对较低的成本在固定利率或者浮动利率市场上借到资金。假设 A 公司愿意借入浮动利率的资金（为了和其浮动利率的应收款相匹配），但是它发现在市场上以固定利率借入资金的成本相对来说较低。A 公司并不直接借入浮动利率的资金，因为这样做成本相对较高。相反，它首先以较低的成本借入固定利率资金，然后签订一个支付固定利率收取浮动利率的互换合约。这种成本节约就是所谓互换合约的比较优势动机，也是互换合约交易迅速发展背后的金融激励机制。

货币互换

最简单形式的货币互换是指交易双方交换以不同币种标示的债务。现在，进行互换合约交易的一个原因可能是这样的：一个美国公司（“山姆大叔”）在法国有一家分公司，该分公司希望在法国以法国法郎（FRF）融资以进行扩张，并用该分公司在法国的法国法郎应收款来偿还债务。与之相似，一家法国公司（“埃菲尔”）在美国有一家分公司，该分公司希望发行美元债务并最终用其美元收入支付本金和利息。这降低了外汇头寸暴露。如果美国公司（“山姆大叔”）可以以美元，法国公司（“埃菲尔”）可以以法郎筹集到相对低成本的资金，那么它们可以先借到这笔钱，然后互换本金和利息。（不像在利率互换里，本金只是名义上的，在交易的始末都不进行交换。）所以结果是法国公司得到了美元贷款，美国公司得到了法郎贷款。因此情形是这样的：

> 山姆大叔想最终借入法国法郎但是发现最初借入美元成本更低。
> 埃菲尔想最终借入美元但是发现最初借入法国法郎成本更低。
> 那么它们可以最初先借入各自低成本的货币，然后进行货币互换。

1.4 对冲者、投机者和套利者

期货和期权交易之所以能够获得巨大成功，部分就是因为它们为对冲、投机和套利提供了机会。

对冲者

对于外行人来说，利用远期市场对外汇进行对冲是最普通的做法。理论上对于对冲者来说，期货市场和远期市场非常相似。如果美国出口商预计 3 个月后将要收到 3 000 英镑，那么公司财务人员就可以在今天购买远期美元或者买一份美元期货。在实际操作中这当然会有一些差异。外汇期货合约有一个固定的合约规模，所有对冲者只能买合约中约定的数量，大多数情况下，合约规模是能够和货币需求量匹配的。然而，两种情况的关键点都是美国公司今天就确定了它将来交割货币时所要收取的价格。或者，美国出口商也可以通过购买一个执行价格为 1.5 美元/英镑的英镑看跌期权来为他的应收款“保险”（设定一个价格下限），这样他就可以确保每个英镑至少兑 1.5 美元。但是如果 3 个月后即期汇率变为 1.6 美元/英镑，那么该出口商就可以不采取任何操

作，而在即期市场以较高的汇率兑换 3 000 英镑。为了获得期权的这项特权，期权买方需要在交易开始的时候支付期权金。

期货合约被持有至到期日，那么它就恰恰是通过锁定对冲者将来要支付或收取的价格来中和风险的。即使不是被持有至到期日，部分风险也可以得到对冲，但是有一些风险还是不能被对冲掉，也就是所谓的基差风险。虽然期货合约要求保证金支付，但是这些保证金经常会得到一个竞争性的利率，因此并不能说它是一项成本。期权合约在提供保险方面和期货有一点细微的差别。期权合约的投资者可以使他们自己免受价格的不利变动带来的损失，而又保留了获得价格有利变动带来收益的权利。正是因为这种“保险”的存在，期权合约多头需要支付一笔期权金。

投机者和杠杆作用

在前面的例子中，XYZ 股票看涨期权的购买者拥有了在 3 个月后以 $K=80$ 美元的价格购买 100 股股票的权利，为此她支付了 300 美元（3 美元期权金/股×100 股），见图 1—1。或者，她可以以 $S_0=78$ 美元/股的价格（总成本为 7 800 美元）在现货市场购买 100 股股票，并持有这些股票 3 个月。我们注意到，在现货市场购买股票需要 7 800 美元的资金，远远大于她在期权市场需要的 300 美元。

到 10 月份的时候，股票价格上涨到 $S_1=88$ 美元。图 1—8 给出了这两种交易策略所获得的收益。直接购买股票得到的净收益为 1 000 美元（=10 美元×100 股），这要高于通过执行期权得到的收益 500 美元($=S_1-(K-C)\times 100$ 股)。

期权市场（7 月份）
看涨期权价格 $C=3$ 美元
总期权金支付=300 美元
执行价格 $K=80$ 美元

现货市场（7 月份）
现货价格 $S=78$ 美元
总现金支付=7 800 美元

期权市场（10 月份）
利润=8 美元=88 美元−80 美元
净利润=800 美元−300 美元
回报率=500 美元/300 美元=167%

现货市场（10 月份）
利润=10 美元=88 美元−78 美元
总利润=1 000 美元
回报率=1 000 美元/7 800 美元=12.8%

图 1—8　期权的杠杆作用——购买 100 股股票（7 月份）

然而，看涨期权多头只需要每股支付 3 美元的期权金，在现货市场的直接交易每股却需要 78 美元。看涨期权只需要很少的资金就可以获得高达 167%的回报率，相比之下，直接在现货市场购买股票只得到 12.8%的收益率。因此说期权起到了杠杆的作用。

杠杆效应对于期货合约（如果我们忽略保证金的要求）也适用，其中投机者不需要提供任何资金（3 个月期）。假设 3 个月后现货价格 S_T 高于期货价格 F_0，那么作为期货合约多头的投机者就可以支付 F_0 进行期货合约标的股票的实际交割，然后在现货市场立即以 S_T（$>K$）的价格售出，便可实现利润 $\Pi=S_T-F_0$。理论上，投机者自己不用提供资金，因此她的杠杆作用是无限的。如果（事实上经常如此）多头期货不是被持有到到期日，而是之前就被平仓，那么投机利润

取决于期货价格的增长幅度。

通过利用期货，投机者既有可能获得巨大的利润，也同样可能发生巨额亏损。然而期货和期权有一点不同。在期货合约里，潜在损失和潜在利润是相等的（假设价格上涨和下跌的概率相同）。但是在期权合约里，作为看涨期权多头的投机者，如果到期时现货价格 S_T 高于执行价格 K，她就会盈利。现货价格跌到执行价格之下，甚至跌到零的时候，投机者的损失却止于期权金 300 美元（=3 美元×100），也就是说她的风险是有底线的。不过，看涨期权发行者的风险却没有底线。

套利者

套利活动涉及同时进入两个或更多的市场进行交易以锁定一个无风险利润。通常情况下，“套利”意味着投资者交易的时候不动用他自己的资金。我们在后文中将会看到，套利活动在决定期货和期权的价格方面起着举足轻重的作用。套利经常被认为是金融资产的“一价定律”。简言之，这意味着相同的资产必须以相同的价格出售。我们已经看到了，用几种资产的组合（如 A 和 B）可以得到和另一项资产 C 相同的收益。资产“A+B”就是所谓的组合证券。套利可以保证资产 C 的市场价格和“组合版”的 C 价格相等。在解释原因之前，我们先来看一个简单套利的例子，说明“一价定律”是成立的。

假设 XYZ 股票的价格在纽约是 100 美元，同时在伦敦以 120 英镑的价格交易，即期汇率是 1 英镑兑 1 美元。很显然通过“低买高卖”我们就可以获得无风险利润。一个英国居民在纽约股票交易所以 100 美元（相当于花费 100 英镑）的价格购买 XYZ 公司的股票，同时立即在伦敦股票交易所以 120 英镑的价格卖出，从而每股得到无风险利润 20 英镑（或 20 美元）。当然，在一个信息充分的市场上，这样无风险套利的机会并不会长时间存在。事实上，市场供需的力量（或者甚至就是交易员电子屏幕上披露的价格信息）会迅速将两地价格拉平。在纽约，大宗的购买活动使得股票以美元标示的价格攀升，同时在伦敦对该股票的大量抛售又使得其以英镑标示的价格下跌，于是在汇率不变的情况下，两地价格就会趋于相等。另外，为了在纽约股票交易所购买股票，英国居民需要卖英镑买美元，因此相对于英镑，美元会升值。

假设汇率变为 1.20 英镑兑 1 美元。在这种情况下，该英国居民需要 120 英镑购买 100 美元以到纽约股票交易所购买 XYZ 股票。这和他在伦敦股票交易所直接购买花掉了同样的英镑数。当然，在实际中，两种股票价格以及汇率变动多少才能轧平价格差异是不确定的。只不过三种“价格”（两种股票的价格和汇率——译者注）都会同时迅速变动以消除任何无风险套利的机会。这种“一价定律”又一次适用于金融资产（不是交易的商品）上。

套利被用来确定资产价格的简单例子决定了 FX 市场的远期汇率（参见第 15 章）和 FRA 的远期利率（参见第 8 章）。在抛补利率套利的情况下，套利者通常可以盈利，除非远期利率由下式决定：

$$F=S\frac{(1+r_{\mathrm{d}})}{(1+r_{\mathrm{f}})} \tag{1.7}$$

其中，S 为即期汇率（单位外国货币兑本国货币），F 为远期汇率，r_{d} 为国内利率，r_{f} 为国外利率。正如我们在上述等式中看到的，套利使得即期价格和远期价格紧密联系（相关）起来。我们

将会看到，正是对冲者将这种“联系”发挥得淋漓尽致。

相似的道理，FRA（远期利率协议）的均衡远期利率也是由无风险套利决定的，因为我们可以通过在现货市场的买卖活动创造一个合成 FRA。假设在货币市场，我们可以以 r_2 的利率借 100 美元，期限 2 年，然后将这些资金投资 1 年，回报率为 r_1。$t=1$ 时我们的投资共收回 $100\times(1+r_1)$美元，$t=2$ 时所借资金的本息和累计为 $100\times(1+r_2)^2$ 美元，这和一个合成的远期—远期合约是相等的，即在 $t=1$ 时刻收取，在 $t=2$ 时刻支付（见 Cuthbertson & Nitzsche，2001）。合成远期利率由$(1+sf_{12})=(1+r_2)^2/(1+r_1)$给出。如果一个银行签订了一份 FRA 协议，如第 1 年末借入，第 2 年末偿还，那么它需要收取的利率就应该是 $f_{12}=sf_{12}$。否则就会有无风险套利发生。因此说，无风险套利活动决定了公平的远期—远期利率，即 f_{12}。

作为类比，我们来考虑一下“多莉”羊。你应该还记得，多莉由爱丁堡大学的科学家克隆出来，几乎是母体羊完美的复制品。显然，多莉的诞生是遗传工程的一项技术。假设我们可以以 200 美元一只羊的成本生产很多“多莉”，而当前市场绵羊的通行价格是 250 美元。那么套利活动会使得市场上的绵羊价格回落到 200 美元。多莉就像我们在金融中“合成的”或复制的有价证券组合，这些组合允许我们实现金融工程。实际上，美国卓越的经济学家拉里·萨默斯用相当调侃的类比手法刻画了经济学家和传统的金融专家的区别。他说，经济学家关注的是为什么一瓶番茄酱的价格会上下波动（例如是因为收入、生产流程的变化等），而金融学家只关心一瓶 16 盎司的番茄酱是否和两瓶 8 盎司的番茄酱卖相同的价钱。幸运的是，在给定了本文中材料的情况下，我们就有理由称呼我们自己为“金融经济学家”，从而避免了这个某种意义上有点轻蔑的类比。

卖空

一些套利策略会涉及卖空。如果一个投资者想要卖空 500 股股票，那么他的经纪人就会从其他的代理人处借到这些股票，然后转给这个将要卖空的投资者。在将来的某一时刻，投资者必须购买 500 股股票返还给经纪人来冲销掉他的头寸。如果股票价格下跌，投资者就会盈利。最初从股票出售得来的资金归投资者所有，但是其中的一部分将会存到保证金账户（以短期国库券利率计息，并支付给该投资者）。资金的其余部分可以由投资者自由支配。

1.5　本章摘要

- **远期合约**是交易双方在**场外市场（OTC）**通过协商达成的关于合约规模、交割日期、价格等的协议。而**期货合约**是标准化的合同，它们**在交易所进行交易**，并且保证金账户资金的流入流出反映了合约价值每天的变化情况。
- **期权合约能够提供保险**，因为它们可以限制下行风险，并允许获得“上行利润”。因此到期时期权的收益是非线性的，或者说是不对称的。
- **期权**可以被用来**投机**，而不用投入大量的资本。这就是它们的**杠杆作用**。
- **利率互换**允许把浮动（变化的）利率的付款转换为固定利率的付款（反之亦然）。**互换交易者**充当了中介的角色，他们把希望支付固定利率收取浮动利率的客户和正好有相反需求的客户匹配起来。

- **无风险套利**决定了衍生证券的**"公平价格"**。

章末练习

1. 假设你是一个投机者，并且认为股票价格会上涨。那么你是应该购买看涨期权还是购买看跌期权呢？

2. 假设你是一家大型跨国公司，那么为什么你可能想同时采取货币互换和普通香草型利率互换来避险呢？

3. 一份1年期的娶Vito Corleone（小说《教父》的主人公——译者注）的女儿的看涨期权合约和一份期货合约在什么地方有差异？假设两份合约都是被持有至到期日的。

4. 什么样的人会觉得一份橙汁的期货合约是有用的呢？

5. 在到期日前卖出合约或者一直持有合约至到期日的两种情况下，你怎样利用多头期货合约来进行投机？

6. 一家银行在银行间市场以LIBOR浮动利率借入资金，并以固定利率抵押的形式借出。请问这家银行都涉及哪些风险？它应该怎样对冲这些风险？

7. 假设你是一个美国出口商。6个月后你将要从欧洲大陆收到一笔1 000万美元芭比娃娃的销售收入。请问你该如何对冲你的外汇风险？

生品与风险管理　金融工程——衍生品与风险管理

第2部分

远期和期货

金融工程——衍生品与风险管理

金融工程——衍生品与风险管理

第2章

期货市场

学习目标

- 考察期货合约的交易过程，例如，保证金要求、平仓和报纸行情等。
- 分析如何应用无风险套利（risk free arbitrage）理论来为期货合约公平定价。
- 阐述如何利用期货合约对标的资产的头寸进行对冲以及对冲中的风险。
- 讨论利用期货合约的投机活动。
- 分析远期合约的市场价格和价值之间的区别。

2.1 期货市场的交易

我们已经介绍了期货合约和远期合约的基本原理。分析远期合约要比

分析期货合约简单一些，因此我们常常把远期合约中的一些数学结果（例如对远期合约的定价）引申到期货合约中去。然而在实际操作中这两类合约还是有很大区别的，这一部分我们就主要讨论期货合约的机制。

远期合约都是场外交易，而期货合约则大部分是在交易所中进行交易。在图 2—1 中我们概括了这两者的区别。期货合约交易的商品范围非常广泛，而且，世界各地有数量众多的交易所都进行期货交易（见图 2—2）。虽然期货合约中的标的资产种类繁多，但是买卖这些不同的期货合约的基本要求和利用它们进行对冲或是投机的基本要求却是类似的。

场外交易

- 由中介机构（银行）提供服务
- 根据买者定制
- 可以进行关于任何金额和任何交割日的交易
- 交易对手存在信用风险并且很难消除
- 匿名交易的方法，这对于大宗交易很重要
- 新的合约不需要经过监管者批准

交易所交易

- 在交易所（例如 LIFFE，COBT，CME）进行交易
- 可交易的商品品种有限
- 固定的合约规模和交割日期
- 便于改变头寸状态
- 通过保证金制度（盯市）消除了信用风险

图 2—1　衍生产品市场的类型

交易工具

- 货币市场工具：3 月期欧洲美元存款、90 天美国短期国债、3 月期英镑或欧元存款
- 债券：美国国债、德国国债
- 股票指数：标准普尔 500 指数、英国富时 100 指数
- 货币：欧元、英镑、日元等
- 抵押贷款池：GNMA

交易所

- 芝加哥交易所（CBOT）
- 芝加哥商品交易所（CME）
- 纽约期货交易所（NYFE）
- 费城交易所（PHLX）
- 太平洋股票交易所（PSE）
- 伦敦国际金融期货及期权交易所（LIFFE）
- 法国国际期货及期权交易所（MATIF）
- 欧洲期货及期权交易所（Eurex）
- 新加坡国际金融交易所（SIMEX）
- 大阪证券交易所（OSA）
- 悉尼期货交易所（SFE）

图 2—2　期货市场（金融期货）

期货合约和远期合约的发展都是源于标的资产价格日益增长的波动性和人们对冲这些风险的要求。除了外汇市场之外，远期合约（我们可以将互换视为一系列远期合约）的应用范围远远小于期货合约，期货合约标的资产的范围十分广泛。实际操作中，当交易员买入即期美元卖出远期欧元的同时一般都通过买入头寸状态相反的期货合约进行对冲。再者，互换虽然降低了交易一方（一般是公司）的风险，但却增大了互换交易者的风险，此时通过期货（上例中为欧洲美元期货）可以冲销交易者的“互换风险”。

期货交易所通常是以公司的组织形式存在，由公司成员选举出的董事会决定现有期货合约的交易条款以及是否引入新的期货合约（通常要服从监管组织的要求，在美国是商品期货交易委员

会 CFTC，在英国是金融服务管理局 FSA）。

我们把期货合约的市场价格称为期货的价格，每种合约都规定了一个交割月份。期货合约首次达成协议时，期货合约的报价是标的资产的交割价（delivery price）。在到期日之前期货合约的报价连续变化，在到期日期货价格等于现货价格（$F_T=S_T$）。

为了讲解方便，我们假设期货合约的标的资产是某种股票（虽然这种期货合约实际上不存在）。期货合约的购买者称做多头，他同意购买标的资产（假设是 AT&T 的股票）；期货合约的出售者称做空头，他同意提供标的资产。金融期货的标的资产是金融资产，例如货币、短期国库券和债券，而农产品期货和金属期货的标的资产则分别是像小麦和白银之类的东西。在现货市场上（上例中为纽约股票交易所）**标的资产**（underlying asset，例如 AT&T 的股票）以即期价格进行交易。期货的价格与当前的现货价格之间有密切的关系，因此被称为衍生证券（derivative securities）。另外，目前的期货价格提供了人们对到期日现货价格预期值的部分信息。例如，如果 1 年后到期的 AT&T 股票期货的价格是 $F=450$ 美元，那么我们可以推测出人们预期 1 年后 AT&T 的股价为 450 美元。

期货市场可以用于投机、对冲和套利。在期货市场上总是存在利益相反的交易双方，例如，A 是多头，B 是空头，那么 A 的任何收益就是 B 的损失，总的来看，如果忽略交易成本，这是一个零和博弈。然而，从市场上任何一方的交易个体来看，无论是空头还是多头，都存在潜在的收益或是损失。另外，期货市场也可以用以降低风险。

由于期货合约（不同于远期合约）在交易所内进行交易，因此合约和报价的标准化就显得十分必要。同时，当交易一方未履约时，抵押品就会被清算所用来补偿另一方的损失，这种制度使违约风险减至最小（保证金要求满足了这点）。

标准化

交易所对每种期货合约的规模、报价单位、最小价格变动、商品的品级、交割地点、日内价格波幅限制、保证金要求和工作日交易时间都做了统一的规定。例如对农产品期货，产品的种类和品级是在期货合约中指定的（例如某种特定品种或是质量的小麦），期货交易所还规定了最小的合约规模（例如 y 蒲式耳的小麦），交割日期（对小麦期货来说一般是 3 月、5 月、6 月、7 月、9 月和 12 月）和交割的具体安排（例如只能在 A，B，C 三地交割）等。

金融期货的标准化相对容易一些，例如，对于英镑的外汇期货合约来说，标的资产是同质的，因此交易所只需要规定期货合约的交割日期、结算价格和合约规模。表 2—1 给出了美国国债、英镑与美元间汇率、标准普尔 500 指数等金融期货的合约规定。一些期货合约的到期时间只有一年或两年，有些期货合约的到期时间则长的多。这主要取决于期货合约持有者对冲的要求。例如，欧洲美元期货的到期时间长达 10 年，原因是这种期货的持有者主要是做互换的投资者，他们用这种期货来对冲他们在利率互换市场上的头寸。

交易所必须为期货合约规定一个最后交易日，一般设为到期月的第 2 个星期五，或是该月倒数第 2 个工作日。而交割日通常设为在到期月最后工作日之后的任何一天。然而要注意对于**现金交割的期货合约**（cash settled contracts，例如股票指数期货），一般在最后交易日或是其之后第一个工作日进行交割。这种交割日（delivery day）的弹性和不同的商品“品质”以及不同的交割

目的地（例如，农产品期货对交割商品的种类、质量和送达地点有要求，另外，债券期货可以对所交割的债券类型进行选择）导致了99%的期货合约在到期之前就已经被冲销掉了。比如，如果价格上涨，生猪期货合约的多头能获利，这笔利润可以用来支付在现货市场上买入生猪的更高价格，你可以（在到期日 T）通过在本地现货市场上购买，而方便地得到与合约规定中“质量”完全相同的生猪，下面我们会看到这与在买进这份期货合约时就锁定初始价格 F_0 是等价的。

表 2—1　　期货（合约规范）

商品	交割	合约规模	最小价格变化	日内价格波幅限制
美国长期国债	3 月/6 月	100 000 美元	1/32(1%)	2%
(CBOT)	9 月/12 月	8% 附息债券	=31.25 美元	=2 000 美元
英镑	1 月/3 月	125 000 英镑	0.000 05(美元/英镑)	无
(CME - IMM)	4 月/6 月		(=1/2 pip)	
	7 月/9 月		=12.50 美元	
	10 月/12 月			
S&P100	后四个月	500 美元×(S&P100)	5 点(1%)	无
	+3 月/6 月			
	9 月/12 月			

合约的规模（size of the contract）也是非常重要的，如果一份合约的金额太小，由于相对较高的交易成本，投机者将不会参与交易，但同时如果合约的金额太大，对冲者就不能用它来对冲金额相对较小的投资。（比如，欧洲美元期货合约的规模是 1 000 000 美元，这样就不能用半张期货合约来对冲 500 000 美元）。很显然，**刻度**（tick size，即最小报价变动——译者注）和**刻度价值**（tick value，即相应合约的最小价值变动——译者注）都应该设置得相对较小。例如，美国国债期货合约的合约规模是 100 000 美元，报价单位是（合约规模的）1%的 1/32。因此，合约的最小价值变化为 31.25 美元，即 0.000 312 5(100 000 美元)。

流通在外的合约总数称为**未平仓合约数**（open interest）。由于每份合约都有相应的多头和空头，我们把它们算为一份未平仓合约。从另外一个角度看，未平仓合约数是能在到期日前平仓或是最终导致交割的流通在外的合约总数。

表 2—2 给出了一个假设初始值为零的未平仓合约数的变化过程。当 A 和 B 作为期货的买方首先进入市场时，C 和 D 作为交易的另一方进行交易，这样未平仓合约就增加了。如果第 3 天，作为一份期货合约多头的 A 把他的这份期货合约卖给了作为 3 份期货合约空头的 D，未平仓合约数就减少了一份，此时 A 退出了期货市场，而 D 也仅仅是两份期货合约的空头。如果第 4 天，C 把一份期货合约卖给一个新进入期货市场的交易者 E，此时 C 拥有的期货合约数减少了一份（此时他是两份期货合约的多头），但是由于 E 也进入市场，未平仓合约数并没有改变，只是在这份合约上 E 实际上取代了 C 的位置而已。

表 2—2　　**未平仓合约数**

		未平仓合约数
1. A 买入 1 份合约，B 卖出 1 份合约		1
2. C 买入 3 份合约，D 卖出 3 份合约		4
3. A 卖出 1 份合约，D 买入 1 份合约（A 和 D 都冲销了他们的初始合约）		3
4. C 卖出 1 份合约，E 买入一份合约		3
交易者的头寸	多头	空头
B		1
C	2	
D		2
E	1	
所有交易者	3	3

期货交易所和交易者

在一些期货交易市场中，交易池内的交易员面对面地进行工作，例如，附属于芝加哥交易所（CBOT 或者 CBT）的国际货币市场（IMM）和 1999 年之前的伦敦国际金融及期货交易所（LIFFE）。价格和交易都通过手势来传达，这种机制我们称为**公开叫价机制**（open cry）。所有交易所都通过电脑来执行交易，现在更多的交易所逐渐脱离了公开叫价机制，实现了撮合交易的电子化。在这种机制下，所有的买者和卖者都按照“价格优先”的顺序排序，然后通过电脑进行“撮合”，例如，法兰克福的欧洲期货及期权交易所（EUREX）和巴黎的法国国际期货及期权交易所（MATIF）。事实上，通过完全电子化的德国国债期货交易，EUREX 夺回了这部分曾经在公开叫价机制下被 LIFFE 取代其地位的全部业务。LIFFE 目前也采取了以屏幕为基础的交易机制。LIFFE 声称在 Euribor（欧元银行同业拆借利率）利率期货方面的交易值大约是 EUREX 的两倍，它还取得了在美国设置它的交易屏幕的许可。LIFFE 以前那些自营业的场内交易员（即自营商）现在已经坐在一起共同操作电子化的市场，这样交易池也不像以前那样嘈杂了。

期货交易也正在变得“全球化”，比如，芝加哥商品交易所的全球电子自动交易系统（GLOBEX）和英国的路透交易系统提供了“非营业时间”的电子期货交易系统，这里“非营业时间”是从美国市场的角度来看的。然而要注意的是，GLOBEX 不自动撮合买卖双方并自动执行交易，它仅仅向交易者提供价格信息。

在国际货币市场 IMM，场内交易员一般是被称为**期货经纪商**（futures commission merchant，FCM）的代理交易者或是**自营商**（local）。FCM 只是代表委托人进行买卖的中间人，他们的利润主要来源于佣金。自营商则经过注册并用自己的账户进行交易（即在各种期货合约中自己承担头寸）。**双重身份的交易**（Dual trading）也是允许的，但是这可能引起利益的冲突。例如，当一个双重身份的交易者作为代理交易者收到委托人卖出大量期货合约的要求时，如果卖出期货后可能会导致期货价格的下降，他就会先将自己账户上的期货合约卖出。

期货交易

公众的订单必须通过可以联系交易所内场内交易者的经纪人递交。交易要接受**清算所**（clearing house，例如芝加哥交易所清算公司 CBOTCC）的监控，每个场内交易员都必须在一个作为清算所成员的清算公司设立自己的账户。如果你的场内交易者代表你购买了一份期货合约，那么你必须付给他初始保证金，然后再由他把这部分初始保证金交给他的清算公司 ABC。卖者可能是一个代表“场外”顾客的自营商或是经纪商。卖者也把初始保证金交给他的清算公司 XYZ。清算公司 ABC 和 XYZ 分别汇总了自己公司来自于客户的总的净头寸，将保证金交给 CBOTCC，这样 CBOTCC 就担保了双方的期货合约。

交易成本

在美国，经纪人的佣金包括对买进和冲销合约（即使多头决定最终进行交割）进行的支付。然而，由于佣金和买卖价差都比较低，这使期货成为一种成本极低的进行对冲和投机的工具。空头的交割成本随着交割商品种类的不同而不同（可以对比用活牛和现金交割的期货合约），一般说来，期货合约的买卖价差、佣金和结算费用与远期合约相比要低，这点可能很好理解，因为很多远期合约是为了满足顾客要求而定制的。

保证金与盯市

保证金支付提供了一种财务保护，以免期货合约交易的一方违约。设想你在一天中午购买了一份美国国债期货合约，此时期货的价格 F_0 是 98 美元（每 100 美元面值），并且每份合约的规模是 100 000 美元（见表 2—3）。假设我们扮演的是清算所的角色，并规定“一个刻度”是一份合约的价格 F 的变化。那么当 F 每变化一点时**一个刻度的价值**(tick value)是 1 000 美元，即(1/100)×100 000 美元。(实际上，对于美国国债期货一个刻度的确切价值是 32.50 美元，现在我们忽略这点，使用我们“简单”的刻度价值。)

表 2—3 盯市 单位：美元

日期	结算价格	盯市	保证金交付	保证金账户净余额
1	94 000 (94.0)	−4 000	5 000	1 000
2	93 500 (93.5)	−500	4 000	4 500
3	98 500 (98.5)	+5 000		9 500

合约规模＝100 000

初始保证金＝5 000

维持保证金＝4 000

在 $F_0=98$ 购买（第 0 天，中午）

我们假设**初始保证金**（initial margin）为 5 000 美元，**维持保证金**（maintenance margin）为 4 000美元。初始保证金并非为这份期货合约进行的支付，而应理解为保证这份期货合约的条款得以实施的“信用”存款。一些活跃的大交易者甚至可以用国债来支付初始保证金。需要注意的是，如果保证金账户的净余额低于价值为4 000美元的维持保证金，交易者就必须再存入一笔款项作为**变动保证金**（variation margin）来使保证金账户的净余额重新回到 5 000 美元的初始保证金水平。

你在以 98 美元购买期货合约的同时存入 5 000 美元的初始保证金。假设第 1 天结束时，期货价格出现明显的下跌，从 $F_0=98$ 美元跌至 $F_1=94$ 美元，因为在第 1 天结束时投资者仅仅能以 94 000美元的价格卖出他的期货合约，因此产生了 4 000 美元的损失。保证金账户的净余额减少至1 000美元（见表 2—3）。这就是所谓的**盯市**（market to market）。第 1 天结束后 1 000 美元的净余额低于维持保证金。因此，第 2 天一早，投资者必须立即支付 4 000 美元的变动保证金（这样，第 2 天开始时保证金账户的净余额又恢复到了 5 000 美元的水平）。第 2 天结束时，期货合约的价格又下跌至 93.50 美元，因此又产生了 500 美元的损失，导致保证金账户的净余额降至 4 500美元。第 3 天，投资者在 $F_3=98.50$ 美元（价格上升了 5 个点）时进行冲销，结清了头寸，这时保证金账户增加了 5 000 美元，净余额达到了 9 500 美元，这部分钱要由清算所支付给“多头”。由于在前两天多头已经支付了 5 000 美元＋ 4 000 美元给清算所，因此，这 3 天总的净利润是 500 美元。当然，这相当于期货价格的变化（F_3-F_0）再乘以刻度价值，即(98.50－98)1 000 美元＝ 500 美元。

因此，如果价格下跌的话，多头就要向保证金账户追加存款，而交易所要向空头（之前卖出期货合约的一方）的保证金账户划入资金。当期货价格上升时恰好相反。投资者（如果愿意）可以提出保证金账户上超过初始保证金的（由期货价格上升造成的）超额资金。

显然，期货价格明显的或是潜在的下跌都有可能，因此损失很可能超过保证金账户的数额。为了使保证金账户的余额总为正值就要支付变动保证金。（通常维持保证金的数额大约是初始保证金的 75%）。当保证金账户的余额降至低于维持保证金时，投资者必须在很短的时间内把保证金账户内的资金补足（支付变动保证金）至初始保证金的水平。（如果投资者没有这样做，交易者将会卖出他的期货合约强行平仓）。另外交易所还设定了一个**每日价格波幅限制**（daily price limits），比如对于石油期货，这个限制是 1 美元，如果一天内价格下跌（或上涨）的幅度达到“跌停板”（或是“涨停板”）时，该合约当天就将停止交易。这样“**短路开关**”（circuit breakers）将会限制每天流入和流出保证金账户的金额，因此，保证金账户的余额在经纪人平仓之前不会降到零以下。这也是为什么初始保证金的数目相对较小的原因（这使投机者和对冲者都能获得杠杆作用）。通常初始保证金的数额被设置为等于合约的每日价格波幅限制的价值。

交易所还有头寸限制的要求，也就是限制投机者持有合约数的最大值（例如，最多持有 y 份合约，而在交割月份所持有的合约数目不得超过 z（$<y$)。这也保证了每个投机者每日的最大总损失（或收益）。但是善意的对冲者不受这种头寸的限制。

平仓

在实际操作中，大部分（约占到 99%）的交易者在期货合约到期之前就将他们的头寸平仓，

因此，他们的收益或是损失由最初的期货合约价格 $F_1=100$ 美元和平仓时期货合约的价格（假设是 $F_2=110$ 美元）之间的差值决定（见图 2—3）。如果你是期货合约的多头，当期货价格上升时，你的期货头寸赚得的利润也就增加，这是一个正相关的关系。这可以由图 2—4 左边图像中的“方向向量”来表示，其中+1 表示了这种正相关的关系。多头投资者的利润图像是从西南指向东北，在图 2—4 中我们把这个方向向量标识为｛+1，+1｝。当然，如果你作为期货合约的多头并且期货价格 F 下跌，则你的利润就会减少（你遭受了损失），但是正相关的关系还是存在的。**平仓**（closing out）仅仅指卖空（卖掉）手中的合约。由于期货合约是盯市的，期货头寸所产生的总的利润等于每天产生的收入或损失的累积值，也可以简单地等于 F_1-F_0。

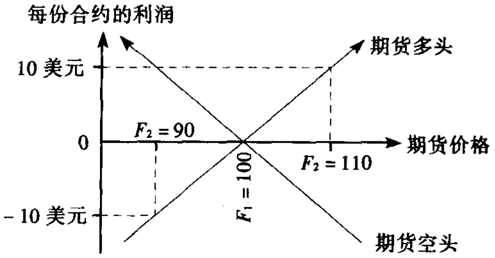
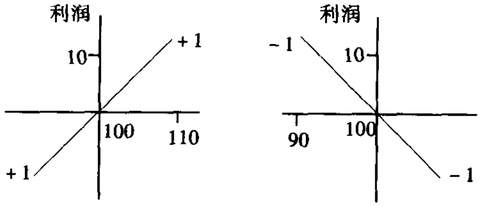


图 2—3　利用期货进行投机



期货多头或现货多头　　期货空头或现货空头

图 2—4 利润收益（方向向量）

在期货合约的整个持有期内，利润按照每日分期付款的形式计算。由于每天产生的现金流需要按照它们产生当天适用的利率进行折现（而对于远期合约这不是问题，因为任何货币的交换都只发生在合约的到期日），因此，远期合约比期货合约更容易直接估价。尽管大部分的期货合约都通过反向交易进行冲销，但是交割（以及实物交割的方法）的可能性还是存在的，正是这种可能把期货价格和标的资产的现货价格联系在一起。

现在假设一个投资者一开始以 $F_1=100$ 美元卖出（成为空头）一份期货合约，如果期货价格下跌到 $F_2=90$ 美元，他获得的利润就上升 10 美元，因为他可以用比他卖出时更低的价格买回（这样就可以平仓）一份期货合约，这是一个负相关的关系。相反，如果价格上升至 110 美元，他的利润就下跌（遭受损失），这仍然是一个负相关的关系。因此，期货空头的方向向量应该标识为｛−1，−1｝（见图 2—4）。这个收益的方向向量也可以用于标的资产多头的投资者，例如作为一只股票空头或多头的投资者。这些投资向量还将用于分析利用期货合约进行对冲和投机活动的策略中，以及用于后面的章节中分析期权。

交割与结算

假设 B 是 y 份期货合约的多头，A 是 y 份相同到期日的期货合约的空头。通常情况下，B 通过在投资者 C 处买入可冲销的空头头寸对他的多头头寸进行平仓。投资者 C 因此而成为了多头，但是同时他也可能进行平仓而导致另外一个投资者 D 成为多头。

期货合约的卖者要决定是否进行交割，通常交割发生在交割月规定的几天中的任何一天（有时甚至可以是交割月中的任何一天）。一个 9 月份小麦期货合约的空头可能通知清算所说他准备进行交割。这时清算所就选定（通常是通过随机的方式）一个 9 月份小麦期货合约的多头并且通知他们在接下来的几天里必须接收实物交割。

（非现金交割合约的）交割过程一般从第一个可行的交割日前两天就开始，为期 3 天。清算公司会把它的多头客户上报给 CBOTCC，空头在他准备进行交割的前两个交易日，在**头寸日**（position day ）通知给清算所，然后在下一个工作日，即**意向通知日**（notice of intention day），交易所就给他选定一个愿意进行交割的多头。这通常是通过随机选择或是选择持有头寸时间最长的多头。在第 3 天，即**交割日**（delivery day），空头交割标的资产，同时多头对空头进行支付（这个交易要通过电汇来确认）。对于常规商品，通常情况下，实际交割物是仓库的存货凭证，并且确切的交割时间是由空头决定的。标的资产的接收者有义务支付任何仓储费用，对于家畜期货来说，要支付动物的看护费用。

一些金融期货也涉及标的资产的交割（例如，短期国债或是长期国债），也有另外一些像股票指数期货之类的金融期货是需要现金交割的。一般情况下，现金交割的期货合约采取最后一个交易日的**结算价格**（settlement price），此时清算所对这个多头头寸和空头头寸进行冲销，这个期货合约就不复存在了。通常结算价格是由结算委员会确定的，是收盘前最末几次交易的现货价格的平均值。但是对于标准普尔 500 指数期货，交易在到期月的第 3 个周五前一天就停止了，但是最终的交割价格确定为第 2 天，即周五早晨股票的开盘价格。保证金账户的金额要随之做出调整，空头和多头之间的清算公司也据此进行支付。

交易所允许的另外一种交割方法称做**实物交割**（exchange for physical，EFP）。在这种情况下，期货合约的双方通过他们的清算公司商定，在考虑到期货合约的价格变化和交割费用后，一方还需向另一方支付多少现金才能将此期货合约结清，并向清算所通报他们的协商结果。例如，石油期货毫无例外采用此方法，石油期货的多头方可以与空头方进行协商，请求空头方在不同于合约规定的地点，交割不同于合约规定品质的石油，如果多头一方要求的是更高质量的石油，或是交货地比合约规定地点更远，那么多头方应支付一定数量的现金给空头方。

远期合约和期货合约的一个重要的区别就是远期合约不能简单地进行平仓。一般说来，多头 A（交易对手为 B）只能通过把他的远期合约卖给 C 来冲销掉头寸。通常 A 和 C 之间的交易必须通过 B 的同意，因为作为合约的空头 B 面临着信用风险。然而，如果 A 是一份“生猪”期货合约的多头，那么他就可以很方便地通过卖出一份具有相同的交割日期的新的期货合约（这可能导致收益或是损失）冲销掉以前的头寸。

清算所

交易清算所扮演了监督和担保交易所内交易的中间人角色。经纪人如果是清算所的成员，他应该在清算所开设结算保证金账户，账户的余额每天结束时都要进行调整，通常是基于净值的方式。因此，如果一个经纪人是 20 份期货合约的多头和 17 份期货合约的空头，就将以 3 份期货合约为基础来计算结算保证金。

报纸行情

表 2—4 给出了《华尔街日报》对芝加哥交易所 7 月 27 日到期的玉米期货的标准报价。合约的规模为 5 000 蒲式耳，以每蒲式耳多少美分来进行报价，并且只对三种到期日（9 月、12 月和 3 月）的合约进行报价。

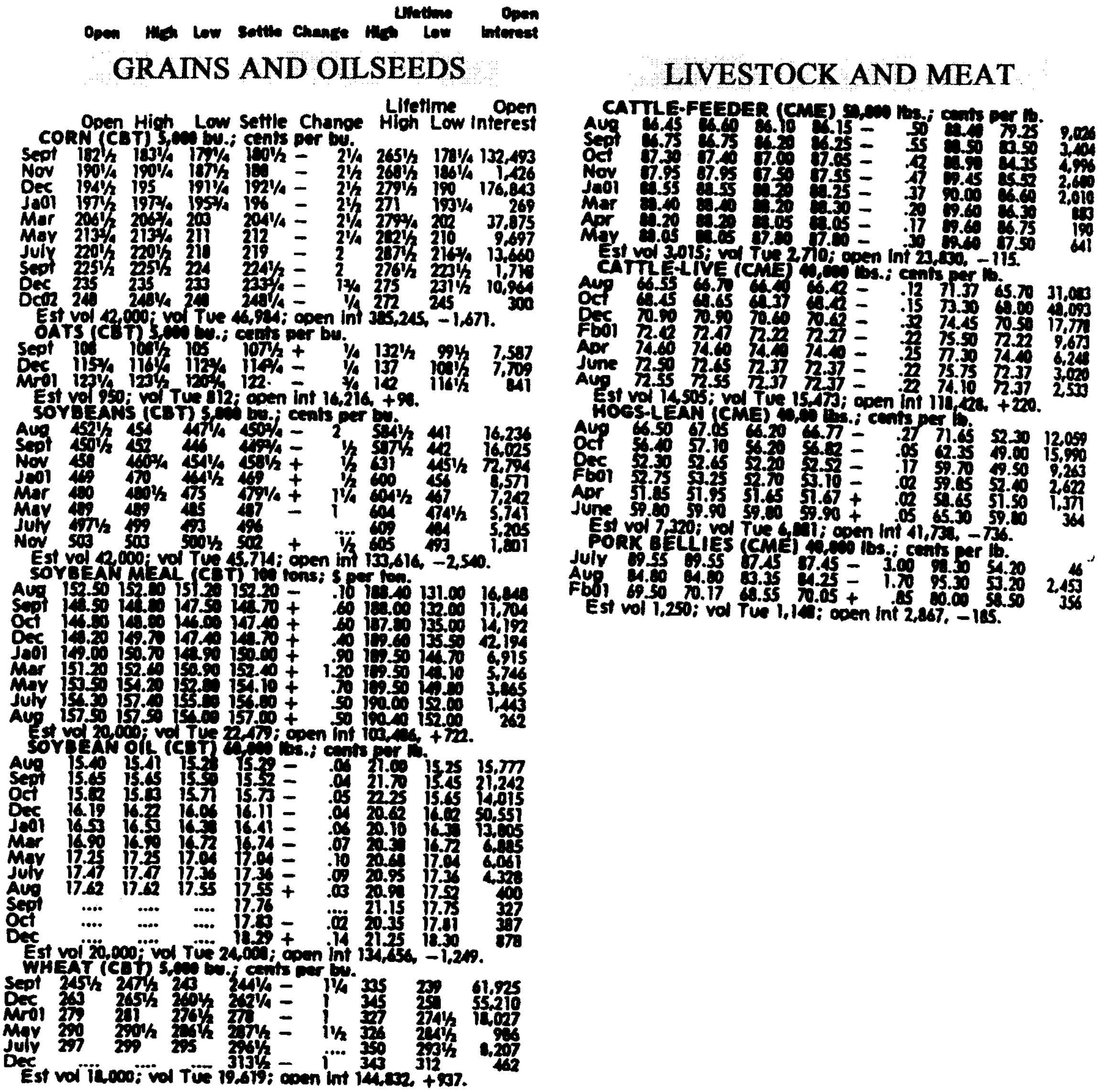
表 2—4 **期货：5 000 蒲式耳的谷物（CBT）** 单位：美分/每蒲式耳

	(1) 开盘	(2) 最高	(3) 最低	(4) 结算	(5) 变化	历史		未平仓合约
						最高	最低	
9 月	$182\frac{1}{2}$	$183\frac{1}{4}$	$179\frac{1}{4}$	$180\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{4}$	$265\frac{1}{2}$	$178\frac{1}{4}$	132 493
12 月	$194\frac{1}{2}$	195	$191\frac{1}{4}$	$192\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{4}$	$279\frac{1}{2}$	190	176 843
3 月 1 日	$206\frac{1}{2}$	$206\frac{3}{4}$	203	$204\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{4}$	$279\frac{3}{4}$	202	37 875

资料来源：*Wall Street Journal*, Thursday 27th July 2000.

《华尔街日报》7 月 27 日的报价是基于 7 月 26 日的交易情况的。第 1 列至第 3 列依次给出了期货合约的开盘价（每天交易铃响起后立即成交的期货合约的价格）、交易当天达到的最高价和最低价。第 4 列数字是结算价格，是在交易日结束交易铃声响起前即刻成交的期货合约的平均价格。第 5 列是当天的结算价格的变化值。最后一列用来计算每天保证金要求的变化值。这样的话，9 月到期的期货合约的结算价格从 7 月 25 日到 7 月 26 日降低了 $2\frac{1}{4}$ 美分，一个合约多头的投资者的保证金账户就少了 112.50 美元，即 5 000×$2\frac{1}{4}$ 美分。

“历史最高”（Lifetime high）和“历史最低”（lifetime low）就不需要进行说明了，未平仓合约数是流通在外的期货合约总数。在每份合约报价的结尾一行给出了每天的交易量以及前一天的交易量、每天开始时的未平仓合约数以及相对于前一天未平仓合约数的变化。图 2—5 给出了其他农产品期货合约的价格。



Open High Low Settle Change Lifetime High Low Open Interest

GRAINS AND OILSEEDS

CORN (CBT) 5,000 bu.; cents per bu.

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
Sept	182½	183¼	179¼	180½	– 2¼	265½	178¼	132,493
Nov	190¼	190¼	187½	188	– 2½	268½	186¼	1,426
Dec	194½	195	191¼	192¼	– 2½	279½	190	176,843
Ja01	197½	197¾	195¾	196	– 2½	271	193¼	269
Mar	206½	206¾	203	204¼	– 2¼	279¾	202	37,875
May	213¾	213¾	211	212	– 2¼	282½	210	9,697
July	220½	220½	218	219	– 2	287½	216¾	13,660
Sept	225½	225½	224	224½	– 2	276½	223½	1,718
Dec	235	235	233	233¾	– 1¾	275	231½	10,964
Dc02	248	248¼	248	248¼	– ¼	272	245	300

Est vol 42,000; vol Tue 46,984; open int 385,245, –1,671.

OATS (CBT) 5,000 bu.; cents per bu.

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
Sept	108	108½	105	107½	+ ¼	132½	99½	7,587
Dec	115¾	116¼	112¾	114¾	– ¼	137	108½	7,709
Mr01	123¼	123½	120¾	122	– ¾	142	116½	841

Est vol 950; vol Tue 812; open int 16,216, +98.

SOYBEANS (CBT) 5,000 bu.; cents per bu.

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
Aug	452½	454	447¼	450¾	– 2	584½	441	16,236
Sept	450½	452	446	449¾	– ½	587½	442	16,025
Nov	458	460¾	454¼	458½	+ ½	631	445½	72,794
Ja01	469	470	464½	469	+ ½	600	456	8,571
Mar	480	480½	475	479¼	+ 1¼	604½	467	7,242
May	489	489	485	487	– 1	604	474½	5,741
July	497½	499	493	496	....	609	484	5,205
Nov	503	503	500½	502	+ ½	605	493	1,801

Est vol 42,000; vol Tue 45,714; open int 133,616, –2,540.

SOYBEAN MEAL (CBT) 100 tons; $ per ton.

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
Aug	152.50	152.80	151.20	152.20	– .10	188.40	131.00	16,848
Sept	148.50	148.80	147.50	148.70	+ .60	188.00	132.00	11,704
Oct	146.80	148.00	146.00	147.40	+ .60	187.80	135.00	14,192
Dec	148.20	149.70	147.40	148.70	+ .40	189.60	135.50	42,194
Ja01	149.00	150.70	148.90	150.00	+ .90	189.50	146.70	6,915
Mar	151.20	152.60	150.90	152.40	+ 1.20	189.50	148.10	5,746
May	153.50	154.20	152.80	154.10	+ .70	189.50	149.80	3,865
July	156.30	157.40	155.80	156.80	+ .50	190.00	152.00	1,443
Aug	157.50	157.50	156.00	157.00	+ .50	190.40	152.00	262

Est vol 20,000; vol Tue 22,479; open int 103,486, +722.

SOYBEAN OIL (CBT) 60,000 lbs.; cents per lb.

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
Aug	15.40	15.41	15.28	15.29	– .06	21.00	15.25	15,777
Sept	15.65	15.65	15.50	15.52	– .04	21.70	15.45	21,242
Oct	15.82	15.83	15.71	15.73	– .05	22.25	15.65	14,015
Dec	16.19	16.22	16.06	16.11	– .04	20.62	16.02	50,551
Ja01	16.53	16.53	16.38	16.41	– .06	20.10	16.38	13,805
Mar	16.90	16.90	16.72	16.74	– .07	20.38	16.72	6,885
May	17.25	17.25	17.04	17.04	– .10	20.68	17.04	6,061
July	17.47	17.47	17.36	17.36	– .09	20.95	17.36	4,328
Aug	17.62	17.62	17.55	17.55	+ .03	20.98	17.52	400
Sept	....	....	....	17.76	....	21.15	17.75	327
Oct	....	....	....	17.83	– .02	20.35	17.81	387
Dec	....	....	....	18.29	+ .14	21.25	18.30	878

Est vol 20,000; vol Tue 24,008; open int 134,656, –1,249.

WHEAT (CBT) 5,000 bu.; cents per bu.

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
Sept	245½	247½	243	244¼	– 1¼	335	239	61,925
Dec	263	265½	260½	262¼	– 1	345	258	55,210
Mr01	279	281	276½	278	– 1	327	274½	18,027
May	290	290½	286½	287½	– 1½	326	284½	986
July	297	299	295	296½	....	350	293½	8,207
Dec	....	....	....	313½	– 1	343	312	462

Est vol 18,000; vol Tue 19,619; open int 144,832, +937.

LIVESTOCK AND MEAT

CATTLE-FEEDER (CME) 50,000 lbs.; cents per lb.

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
Aug	86.45	86.60	86.10	86.15	– .50	88.40	79.25	9,026
Sept	86.75	86.75	86.20	86.25	– .55	88.50	83.50	3,404
Oct	87.30	87.40	87.00	87.05	– .42	88.90	84.35	4,996
Nov	87.95	87.95	87.50	87.55	– .47	89.45	85.52	2,680
Ja01	88.55	88.55	88.20	88.25	– .37	90.00	86.60	2,010
Mar	88.40	88.40	88.20	88.30	– .20	89.60	86.30	883
Apr	88.20	88.20	88.05	88.05	– .17	89.60	86.75	190
May	88.05	88.05	87.80	87.80	– .30	89.60	87.50	641

Est vol 3,015; vol Tue 2,710; open int 23,830, –115.

CATTLE-LIVE (CME) 40,000 lbs.; cents per lb.

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
Aug	66.55	66.70	66.40	66.42	– .12	71.37	65.70	31,083
Oct	68.45	68.65	68.37	68.42	– .15	73.30	68.00	48,093
Dec	70.90	70.90	70.60	70.62	– .32	74.45	70.58	17,778
Fb01	72.42	72.47	72.22	72.27	– .22	75.50	72.22	9,673
Apr	74.60	74.60	74.40	74.40	– .25	77.30	74.40	6,248
June	72.50	72.65	72.37	72.37	– .22	75.75	72.37	3,020
Aug	72.55	72.55	72.37	72.37	– .22	74.10	72.37	2,533

Est vol 14,505; vol Tue 15,473; open int 118,428, +220.

HOGS-LEAN (CME) 40,000 lbs.; cents per lb.

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
Aug	66.50	67.05	66.20	66.77	– .27	71.65	52.30	12,059
Oct	56.40	57.10	56.20	56.82	– .05	62.35	49.00	15,990
Dec	52.30	52.65	52.20	52.52	– .17	59.70	49.50	9,263
Fb01	52.75	53.25	52.70	53.10	– .02	59.85	52.40	2,622
Apr	51.85	51.95	51.65	51.67	+ .02	58.65	51.50	1,371
June	59.80	59.90	59.80	59.90	+ .05	65.30	59.80	364

Est vol 7,320; vol Tue 6,881; open int 41,738, –736.

PORK BELLIES (CME) 40,000 lbs.; cents per lb.

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
July	89.55	89.55	87.45	87.45	– 3.00	98.30	54.20	46
Aug	84.80	84.80	83.35	84.25	– 1.70	95.30	53.20	2,453
Fb01	69.50	70.17	68.55	70.05	+ .85	80.00	58.50	356

Est vol 1,250; vol Tue 1,148; open int 2,867, –185.

图 2—5　农产品期货价格（《华尔街日报》）

经《华尔街日报》允许后复制。

交易池

期货合约可以在交易池内通过**公开叫价机制**面对面地进行交易（但是这已经被电子化的交易取代了）。想要买进（买方）的池内交易者将喊出：

“*n* for *p*”

这里 *n* 是期货合约的数量，*p* 是价格。想要卖出（卖方）的交易者喊出：

“*p* for *n*”

想在某个特定的到期日进行交易的交易者通常只与交易池内一部分特定的交易者进行接触。报价通常是缩写的，比如一个商品的买价是 102.20 美元，就报为“5 at 20”，表明了期望在一份合约价格为 102.20 美元时买进 5 份期货合约。

交易类型

一些期货交易者仅仅是**抢帽投机者**（scalpers），他们在价格下跌之前尽力以买入价买入，以卖出价卖出，他们持有头寸的时间非常短。**头寸交易者**（position trader）持有头寸的时间可能更长一些，这是因为他们的投资决策建立在影响标的资产价格的经济因素之上。**价差交易者**（spread trader）一般在买入一份期货合约的同时再卖出另外一份合约并以此来获利。对于**同品种价差**（intracommodity spread）交易者，他在买入一份特定到期日的期货合约的同时，卖出另外一份具有不同到期日的相同种类的期货合约，期望能通过两份期货合约价格的不同变化获得收益。品种间价差由一种商品（比如说是咖啡）的期货合约的多头和另外一种商品（比如说是可可）的期货合约的空头组成，投资者希望能找到这两个价格之间“不正常”的差异，而他希望这个差异在不久能够得到纠正。

场内经纪人（floor broker）都在交易所内拥有席位，他们仅仅是代表客户的利益买进和卖出期货合约，赚取的是每次交易的佣金。他们没有独立的账户，也没有责任在期货市场上“做市”。

市价指令（market order）是对经纪人发出的命令，要求其立即在最佳执行价格下执行交易。**限价指令**（limit order）是规定了最高买入价格和最低卖出价格的指令。限价指令是一个**当日有效的指令**（day order）（即只在当天交易结束前有效）或是**直到取消始终有效**（good-till-cancelled order）的指令。如果你已经持有一份期货合约，你可以发出一个**止损指令**（stop-loss order），这个指令命令你的经纪人在价格与现在的价格相比下跌一个特定的金额时卖出期货合约。

2.2 远期和期货价格

这一部分我们将分析如何把期货合约和远期合约的价格表示为标的资产现行的市场价格以及无风险利率等已知变量的函数。我们首先不考虑期货合约的细节，而是分析一些简单的例子。远期合约相对于期货合约要容易分析一些，因为期货合约中涉及每日结算（盯市），比较复杂，而远期合约只在到期日结算一次。然而，可以证明对于任何给定到期日的期货合约的价格与远期合约的价格极其接近。因此，一般情况下我们可以将期货合约的价格和远期合约的价格相互替代。下面我们将用离散时间和连续时间两种方法来分别表述。我们假设：

- 零交易成本；
- 零税率；
- 代理者可以以无风险利率无数量限制地借贷；
- 无风险套利的机会会在瞬间消失。

在对期货合约进行定价时，我们将主要应用无风险套利理论来进行讨论，这种方法也称为期

货价格的“**持有费用**”（carrying-charge）或“**持仓成本**”（cost of carry）决定法。由于我们可以制造一组“合成的远期合约”，因此产生了无风险套利。

由于在远期合约到期之前，标的资产不必有任何形式的支付（例如红利），因此我们称之为**零漏出资产**（zero-leakage asset）。如果标的资产要进行一些净现金流的支付，那么我们就说这个远期合约是建立在离散型漏出资产（例如红利只在某些特定的月份进行支付）或连续型漏出资产（例如每天银行存款都有利息支付）上的。

无收益支付证券

下面看一下无收益支付证券（例如不支付红利的股票）期货合约的价格是怎样确定的。图 2—6 是一种 3 个月后交割某只股票的合约。

股票价格	$S=100$ 美元
无风险利率	$r=$ 每年 4%
期货合约报价	$F=102$ 美元

目前的操作策略

在 102 美元时卖出期货合约，当天没有任何收入．借入 100 美元，买入股票（认为是合成期货）并没有花费任何“自有资金”。

3 个月后（$T=1/4$）

应付贷款 $=100$ 美元$(1+0.04/4)=101$ 美元

交割股票，收到的现金流 $=102$ 美元

无风险利润 $=1$ 美元

图 2—6　利用期货套利

其中，$F=102$ 美元是标的股票期货的报价，$S=100$ 美元是股票的即期价格，$r=0.04$ 是利率（单利，每年 4%），$T=1/4$ 是到期时间（用年来表示）。

在图 2—6 中，可以获得一个无风险利润，套利者当日借入 100 美元，买进股票。这样他可以在 3 个月后进行交割。投资者通过“借入资金和买入现货”构造了一个合成的期货。由于购买股票的钱是借来的，这个策略没有用到任何“自有资金”。在 $t=0$ 时，套利者还在 $F_0=102$ 美元时卖出一份期货合约，在 $t=0$ 时套利者并没有任何现金收入。

这个合成期货（SF）3 个月的总成本是 $SF=101$ 美元，即 100 美元 $(1+0.04/4)=S(1+rT)$。3 个月后由于卖掉了一份期货合约，套利者收到 $F=102$ 美元（同时交割股票），因此他得到的无风险收益是 1 美元（$=102-101$）。由于套利者知道 $t=0$ 时刻的 S，F 和 r，因此这个策略是无风险的。这个合成期货的总成本 $SF=S(1+rT)$ 要小于期货合约的报价 F。

市场参与者将会通过“低买”和“高卖”来利用这个可获得无风险利润的机会。在现货市场上买入股票和借款将会促使 S 和 r 变大（SF 也因此变大），同时卖出期货合约将会推动 F 下跌。

只有当期货合约的报价和合成期货的“价格”SF 相等时无风险套利的机会才会消除：

$$F=SF=S(1+rT) \tag{2.1}$$

我们还可以用另外一种方法来表示上述内容：

远期价格＝即期价格＋持仓成本

$$F=S+\chi \tag{2.2a}$$

其中，现金交易成本表示为：$\chi=SrT$

远期价格＝即期价格(1＋交易成本的百分比)

$$F=S(1+\mathrm{CC}) \tag{2.2b}$$

其中，交易成本的百分比表示为：$\mathrm{CC}=rT$

在 T 时间内，现金(利息)持仓成本(dollar(interest) cost of carry)等于 SrT，百分比持仓成本(percent cost of carry)等于 rT，注意，如果期货合约的定价是合理的话，CC 也等于 $(F-S)/S$。

当持有期货合约时，现货市场的价格可能会发生变化，另外由于存在无风险套利的可能性，也可能引起期货合约价格的变化。从公式 2.1 中我们可以看出，如果 r 保持不变的话，期货合约的价格和股票价格会非常接近地一起变化。如果在期货合约平仓前 r 也发生变化，F 和 S 就会分别变化不同的数额，我们称之为**基差风险**（basis risk）。

在期货合约的到期日（即在 T 时刻），期货价格等于现货价格，即 $F_t \doteq S_t$。这是因为期货合约的多头可以在比如说 $F_t=98$ 美元的价格上立即获得标的股票的交割，如果 T 时刻的即期价格是 $S_t=103$ 美元，那么期货合约的多头可以在获得交割的股票后立即在现货市场上卖出，这样就获得了一个 5 美元的无风险收益。因此，在到期日除非期货价格等于即期价格，否则就会产生无风险套利的机会。在公式 2.1 中假设 $S=S_t$，$F=F_t$ 并且 $T=0$，就可以看出这一点。(注意，如果期货合约的交割成本很高，到期日的基差就不一定精确地等于零，可能 F_t 比 S_t 高出的金额等于交割费用。)

$$F=S(1+r)^T \quad \text{（离散复利）} \tag{2.3a}$$

或

$$F=Se^{rT} \quad \text{（连续复利）} \tag{2.3b}$$

如果我们对上面每一个公式都取自然对数，我们就得到：

$$\ln F=\ln S+\ln(1+rT) \tag{2.4a}$$

$$\ln F=\ln S+T\ln(1+r) \tag{2.4b}$$

$$\ln F=\ln S+rT \tag{2.4c}$$

因此，如果 r 是不变的并且时间间隔非常小（即 T 几乎不发生变化），那么 S 很小的变化将会导致期货价格 F 相同比例的变化（注意 $\Delta\ln S\approx\Delta S/S$ 等）。由于 F 和 S 之间的相关性很可能是比较高的，因此，我们就据此来利用期货对标的资产多头进行对冲。

在实际操作中，做市商通常通过公式 2.1 来决定他们对 F 的报价，这样才能保证其公平性。但是，公式 2.1 可能并不是在每个时刻都是成立的，假设交易者的行动足够快，那么他就可能获

得一小部分套利利润，如果标的资产是股票指数，我们就把这个过程称为指数套利。注意到在公式 2.1 中，期货价格 F 实际上是即期价格的“未来价值”。这是由期货合约等价于一个合成期货（也就是今天借款并且购买股票）的事实决定的。同样，即期价格就是期货价格的现值 PV（对于不同的利率表示方法，有 $S=F/(1+rT)$，或是 $S=F/(1+r)^T$，或是 $S=Fe^{-rT}$）。

现货市场上的红利支付

如果在现货市场上买入股票后，持有者有权获得红利，那么“持仓成本”就应该减去红利支付的金额：

$$\text{红利支付}=S(\delta T) \tag{2.5}$$

其中，δ 是每年的红利收益率（用百分比表示）。这里我们假设红利是连续支付的，因此有时我们把它称做“连续泄漏模型”。例如，如果 $\delta=0.04$（每年 4%），$S=100$ 美元，$T=1/4$，这样在 3 个月中由于红利支付，持仓成本就减少了 1 美元。在 $t=0$ 时刻的期货合约的价格是建立在“准套利”理论上的，我们之所以用“准”字，是因为由于 δ 是不确定的，因此，很明显在现购自运套利中存在一些风险。然而，有时我们所提到的“无风险套利”显然是会存在少量的风险的，一般情况下我们就简单地用“套利”来表示。期货价格由以下公式给出：

$$\begin{aligned} F &= \text{现货价格}+\text{持仓成本} \\ &= S+S(r-\delta)T \end{aligned} \tag{2.6a}$$

$$F=S[1+(r-\delta)T]$$

在离散复利和连续复利的情况下公式又可写为：

$$F=S(1+r-\delta)^T \quad \text{（离散复利）} \tag{2.6b}$$

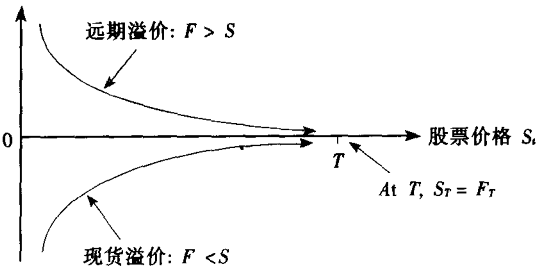
$$F=Se^{(r-\delta)T} \quad \text{（连续复利）} \tag{2.6c}$$

在上面的公式中可以看出：$r>\delta$ 时，期货价格大于现货价格，$r<\delta$ 时，期货价格小于现货价格。我们把这两种情况记做：

$F>S\Rightarrow$ 基差（$F-S$）为正 $\Rightarrow$ 期货溢价（contango）

$F<S\Rightarrow$ 基差（$F-S$）为负 $\Rightarrow$ 现货溢价（backwardation）

现货溢价时我们也称之为逆转市场（inverted market）。如果某种期货合约的市场以上面的一种情况开始，那么只要 $r-\delta$ 有少量的变化（不改变符号），期货价格就会像在图 2—7 中表示的那样在到期日接近现货价格。溢价和折价还可以用来描述整体期货价格曲线的形状。例如，如果 $S<F(T=1)<F(T=2)<F(T=3)<\cdots$，那么我们就称整体期货曲线是期货溢价的，即晚到期的期货合约的价格要高于最近到期的期货合约的价格。



为了简化，我们假设即期价格保持不变，实际情况中，当接近 T 时刻时，S 和 F 都会有所波动，但是如果 $F_t > S_t$，市场处于期货溢价状态，如果 $F_t < S_t$，市场处于现货溢价状态。

图 2—7　期货溢价和现货溢价

实物期货

实物期货（例如小麦期货、大豆期货、天然气期货和民用燃料油期货）也可以通过现购自运套利来进行定价，但是我们必须考虑到仓储费用和所谓的便利收益（convenience yield）。如果 g 是每期仓储费用所占的比例，那么在 $t=0$ 时刻买入的现货在 $t=T$ 时刻的成本是 $S(1+rT+gT)$。因此无风险套利理论保证了

$$F=S(1+rT+gT)=S+\chi \tag{2.7}$$

但是，我们发现通常实物期货是处于现货溢价的（即 $F<S$），如果考虑定义为

$$F=(S+\chi)-\nu \tag{2.8}$$

的便利收益就会发现这个结果是合理的。由于实物期货（例如大豆期货）的持有者具有在商品供应短缺时（例如大豆尚未成熟时）提供商品给客户的附加优势，这样可以维持客户的忠诚度。这种事件的“便利”状态是有价值的，我们把它表示为便利收益。注意到这个便利收益与利用未来现货价格的变化进行投机是不同的。便利收益的存在可能防止了当现行的即期价格比由公式 2.7 给出的期货价格高时（这暗示着商品的供应处于短缺状态）出现现购自运套利。另外，当卖空商品比较困难时，这还可以防止公平的期货价格受到套利的影响。举个例子，如果 S（商品为原油）比公平的期货价格要高，那么套利活动要求卖出或卖空原油现货，同时买入期货。卖空将会要求借入原油来满足现货市场的交割要求，但是如果原油的生产者不能将原油现货运往要求的目的地，这样的套利就不会实现。（注意，如果在商品市场上可以在 $F>S+\chi$ 时进行套利，是因为总是能买到原油现货并在对冲时期内持有，然后执行这个套利机会。）

连续利率和离散利率

在上面的公式中，比较一下离散利率和连续复利，刚开始可能会觉得差别很大，但是实际上它们同样都给出了 F 的精确价值。回忆一下这些不同的利率定义就可以很容易地证明这一点。如果我们设 R_s＝单利，r＝离散复利，r_c＝连续复利，那么投资 1 美元，无论应用何种利率，在 3 个月结束时（$T=1/4$），都会得到相同的金额。因此：

$$(1+r_sT)=(1+r)^T=e^{r_cT} \tag{2.9}$$

由于我们有 $F=S(1+r_sT)$，很明显，可以看出其他两种表达形式也给出了 F 相同的价值。另外一个事实就是，即使我们只应用其中的一种利率，上面的三个公式都会给出近似相同的结果。这是因为对于非常小的 r，下面的公式近似成立：

$$e^{rT}\approx(1+rT) \quad \text{和} \quad (1+r)^T\approx1+rT \tag{2.10}$$

另外注意到，如果：

$$F=Se^{rT} \quad \text{那么} \quad S=F/e^{rT}=Fe^{-rT} \tag{2.11}$$

当应用离散复利和连续复利时，我们可以再将期货价格写成现货价格加上现金表示的持仓成本 χ，因此我们得到：

$$F=S+\chi \quad \text{其中} \quad \chi=S[(1+r)^T-1] \quad \text{（离散复利）} \tag{2.12a}$$

$$F=S+\chi \quad \text{其中} \quad \chi=S[e^{rT}-1] \quad \text{（连续复利）} \tag{2.12b}$$

2.3　利用期货合约对冲

期货合约经常用于对冲。例如，一个石油生产者可能在 3 个月后有大批量的石油生产出来，因此，他可能会担心石油即期价格的下跌；再例如，一个美国出口商可能在 3 个月后收到英镑，但是他担心英镑的即期价格会下跌（这也就意味着只能收到较少的美元）。在这些情况下，投资者不能确定在未来 3 个月中的即期价格，未来的收益面临着一定的风险。对冲可以将这样的风险降至最小。在实际操作中，完全对冲风险是不可能的，因此，人们常说“惟一完美的篱笆是在日式花园里”。（英文中的对冲与篱笆是同一个词，作者此处隐喻完美的对冲是不可能存在的——译者注）

对冲背后的思想十分简单。如果你持有标的资产（即多头），那么就需要持有一份期货合约，这样期货合约的收益可以弥补即期市场上的任何损失。由于 $F=S(1+rT)$，期货价格和即期价格一般都是同向上升或下降的。因此，如果你是标的资产的多头，那么应该是期货合约的空头（见图 2—8）。标的资产多头的收益形状应该是 $\{+1,\ +1\}$，标的资产空头的收益形状应该是 $\{-1,\ -1\}$。因此，经过对冲后的净头寸形状应为 $\{0,\ 0\}$。

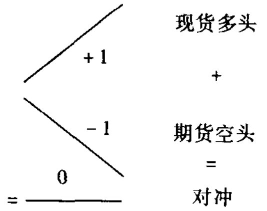


图 2—8　利用期货对冲

同样，如果投资者想在未来买入现货（他现在处于标的资产的空头状态），但是又担心现货价格的上升，这时他就应该买入期货合约（称为期货合约的多头）。

经过认真设计后的对冲几乎是无风险的，因此，这样只能得到一个无风险回报率。所以如果利用期货合约进行对冲就必须得放弃任何大的收益（或损失）。换句话说，持有“股票＋期货合约”对冲的头寸相当于持有像银行存款这样的无风险资产（也可以赚取无风险利率），由于股票＋期货＝无风险资产，因此这就成为金融工程的一种形式。除去交易成本后这样的对冲就相当于卖掉风险资产（例如股票），然后把得到的资金投资于一种无风险资产（例如银行存款或者持有零息债券和国债至到期日）。下面还将进一步介绍这方面的内容。

空头对冲、多头对冲和交叉对冲

空头对冲

假设在 5 月 10 日你是一个即期价格为 $S_0 = 100$ 美元的股票的多头，但是你担心在接下来的 3 个月里股票的价格会下跌（即到 8 月 10 日），而那时你想卖出股票。目前 8 月份期货价格是 $F_0 = 101$ 美元。那么能不能锁定 101 美元这个价格呢？由于你是标的资产的多头，因此需要在一个商定的价格 F_0（在 8 月 10 日支付）上卖出期货合约。由于 8 月 10 日是期货合约的交割日，因此这时的现货价格和期货价格会非常接近。表 2—5 给出了这个例子的基本数据。

表 2—5　　对冲（基本数据）

5 月 10 日	8 月 10 日
$S_0 = 100$	$S_1 = 90$
$F_0 = 101$（8 月交割）	$F_1 = 90$

在 8 月 10 日，如果现货价格跌至 $S_1 = 90$ 美元，期货价格跌至 $F_1 = 90$ 美元（即 $S_1 = F_1 = 90$ 美元），参见表 2—6。由于最初是价格为 F_0 的期货合约的空头，因此可以通过以更低的价格 F_1 买入期货合约进行平仓，这样就得到了 $(F_0 - F_1)$ 的利润，而这部分利润弥补了在现货市场上的损失。在 T 时刻这个对冲的投资组合的价值 V_T 是

$$\begin{aligned} V_T &= \text{现货价格} + \text{期货合约空头的收益} \\ &= S_1 + (F_0 - F_1) = 101(\text{美元}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

在这个对冲策略开始时，F_0 是已知的，而 S_1 和 F_1 是未知的，因此对冲的风险就只取决于基差，其中

$$\textbf{基差}\ (\text{Basis})\ b_1 = S_1 - F_1 \tag{2.14}$$

表 2—6　　8 月 10 日的结果　　单位：美元

卖出股票：$S_1 = 90$
期货合约的收益：$(F_0 - F_1) = (101 - 90) = 11$
总收入 $= 90 + (101 - 90) = \mathbf{101}$
$= S_1 + (F_0 - F_1) = F_0 + (S_1 - F_1)$

在 8 月 10 日总共收到 101 美元，等于 5 月 10 日期货合约的报价 F_0。当我们假设期货合约在 8 月 10 日到期时（此时 $S_1 = F_1 = S_T = F_T$），这是一个非常好的对冲，因为我们使最终的基差 $b_1 =$

S_1-F_1 等于零。一般情况下，如果期货合约在交割之前就平仓，那么我们很难保证 $b_1=0$，因此，在对冲中总是存在着基差风险。注意价格被锁定在期货价格 F_0 上而非即期价格 S_0 上。事实上，开始时的即期价格 $S_0=100$ 美元在计算对冲最终收入的价值中没有起到任何直接的作用。在到期日前冲销期货合约要优于持有期货合约至到期日，因为这样不用支付交割时的交易费用（比如支付给经纪人的费用）就可以锁定股票的价格。否则，就必须在价格为 F_0 时交割股票（在 $t=T$ 时支付），这需要卖出你最初持有的股票，这样做无疑是比较愚蠢的。如果不是股票期货而是“生猪”期货，与冲销期货合约相比，进行交割的成本就更高。

另外一种描述对冲的方法就是考察净收益Ⅱ，即现货头寸的损失（或收益）与期货空头的收益（或损失）之差：

$$\begin{aligned}\Pi &= \text{现货价格的变化}-\text{期货价格的变化} \qquad (2.15)\\ &=(S_1-S_0)-(F_1-F_0)\\ &=(90\text{ 美元}-100\text{ 美元})-(90\text{ 美元}-101\text{ 美元})=-10\text{ 美元}+11\text{ 美元}=+1(\text{美元})\\ &=(S_1-F_1)-(S_0-F_0)=b_1-b_0\end{aligned}$$

在这个例子中，期货头寸的收益是 11 美元，多于弥补现货头寸损失所需要的 10 美元，因此这个对冲是成功的。对冲后头寸的收益取决于基差的变化，而未进行对冲的头寸的收益只取决于即期价格自身的变化。由于 F 和 S 是高度相关的，所以基差的变动要比现货价格的波动小得多。因此，经过对冲的头寸的风险要比那些未经过对冲的头寸的风险小得多。还要注意到 b_0 在对冲开始时是已知的并且是固定的。但是由于当 r 在对冲期间变化时，F 和 S 并不是完全相关的，因此 b_1 是基差风险和不确定性的主要来源。

我们可以发现，上面的策略与简单的在 $t=0$ 时以 S_0 的价格卖掉股票并且将所得到的资金以无风险利率投资是等价的。在这段时间结束时，将会得到 $S_0(1+rT)=101$ 美元。这恰恰是“股票＋期货”这样的投资组合在 $t=T$ 时刻的价值 $V_T=101$ 美元。出现这种结果的原因是当基差 $b_1=0$时，$V_T=F_0$，而且通过前面对于无风险套利的讨论，我们还得知 $F_0=S_0(1+rT)$。因此最终得到 $V_T=S_0(1+rT)$。上面的证明是不是很简洁呢？

多头对冲

假设组合经理 X 预期在 3 个月后会有一个现金流流入，并且他想用这笔资金在 3 个月后买入一只股票（他是标的资产的空头）。但是他担心股票的即期价格会上升。为了消除价格的风险，X 可以在 $F_0=101$ 美元的价格上成为期货的多头（买入期货合约），并且在 3 个月后进行交割。当然，一般并不进行实际交割，X 可以在 8 月 10 日之前卖出他的期货合约进行平仓（见表 2—7）。

表 2—7　　**8 月 10 日的头寸状况**

股票价值：$S_1=90$ 美元
期货合约的损失：$(F_0-F_1)=(101\text{ 美元}-90\text{ 美元})=11$ 美元
总成本 $=90$ 美元 $+11$ 美元 $=101$ 美元
$=S_1+(F_0-F_1)=F_0+(S_1-F_1)$

假设我们有和前面相同的结果，即现货价格实际下跌至 $S_1=90$ 美元，同时期货价格也下跌至

$F_1=90$ 美元。现货市场上的成本是 $S_1=90$ 美元，但是作为期货多头的损失是 $F_0-F_1=101$ 美元－ 90 美元＝ 11 美元，这就使这只股票的总成本变成了 90 美元＋ 11 美元＝ 101 美元。因此，期货价格 $F_0=101$ 美元是锁定的，当然这个结果也是因为我们假设最终的基差 b_1 （$=S_1-F_1$）为零。如果这份期货合约是“生猪”期货，很显然就不应该采取实物交割（在一个比较远的交割地点进行交割，这需要运输费用），更好的做法是获得现金收入，然后再在当地的现货市场上买入“生猪”。我们还会发现对于股票指数期货和很多其他的金融期货合约，上面的做法也是正确的。另外还要注意的就是，无论对于多头还是空头的对冲，套期头寸都取决于最终的基差 b_1。

有些人会觉得很奇怪，为什么对冲不是锁定在 $S_0=100$ 美元的价格上，因为这是不可能的，我们只能将价格锁定在期货的价格 F_0 上。当然，在上面最后一个例子中，如果没有进行对冲，收益可能更好，这是因为当时购买股票的成本只有 90 美元。但是当在 5 月份进行对冲时，对冲者并不知道在接下来的 3 个月中股票价格会下跌。（事实上，如果我们假设现货价格上升，那么即使在 T 时刻即期价格比现在要高，通过对冲我们也能把价格锁定在更为有利的价格 101 美元上。）

交叉对冲

如果期货合约的标的资产与投资者持有的资产不同，那么就会出现额外的风险来源。假设 S_1^* 是期货合约中标的资产的价格，S_1 是投资者持有的资产的价格。在这种情况下，F 与 S_1^*（期货合约中的标的资产）的相关性要高于与 S_1（投资者持有的资产）的相关性。因此基差风险可能会相对大一些。我们已经知道支付（或是收到）的价格是

$$F_0+(S_1-F_1) \tag{2.16}$$

这也可以写成

$$F_0+(S_1^*-F_1)+(S_1-S_1^*) \tag{2.17}$$

可以看出，由于 S_1 和 S_1^* 之间的差别，又出现了额外的基差风险。另外，由于只有在交割日才有 $b_1=S_1-F_1=0$，因此交割月份的选择就显得极为重要。一般情况下，在交割月份，期货价格的变化可能是不规则的，另外，对冲到期日与期货合约的到期日期距离越远，基差的不确定性就越大。因此选择交割月份的一个最基本的原则就是选择超过对冲到期日并且距离对冲终止时最近的那个月。例如，对冲在 1 月份或 2 月份就结束了，接下来的一个交割月份是 3 月，那么我们就会选择这个期货合约。因此 3 月到期的期货合约就称为邻近的合约。

向前滚动的对冲

假设现在是 3 月 2 日，公司的财务主管持有 1 000 万美元的股票（即公司是标的资产的多头）。他想对这部分头寸进行 18 个月的对冲（直到来年的 9 月）。可供使用的期货合约的到期月份分别是 3 月、6 月、9 月和 12 月。而且他认为到期日比较远的期货合约的流动性不好，因此只考虑使用到期日最近的三种期货合约。图 2—9 给出了一种可能的结果，在这种情况下，他最初是 9 月份到期的期货合约的空头，然后在 8 月份将这份期货合约平仓，之后又买进 3 月份到期的期货合约并在 2 月份就对其进行平仓。这样一直做下去，直至第 2 年的 8 月份对最后一份期货合约进行平仓。如果在这 18 个月中，股票价格一直在下跌，作为现货的多头他会遭受损失，但是

由于期货价格在这段时间内也是持续下跌的，因此作为期货交易的空头会获得收益。这样就对冲了一部分风险。

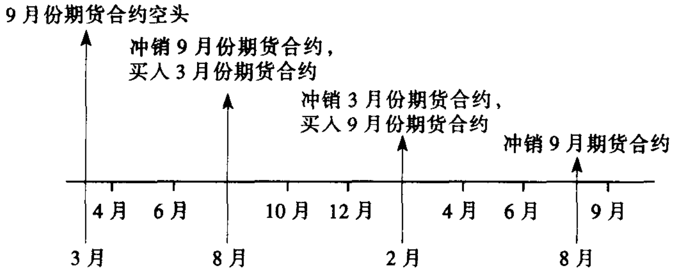


图 2—9　向前滚动的期货合约

在利用期货合约对冲时的关键决策有以下几点：

- 如果是现货资产的多头（持有现货），就应该通过期货合约的空头（即卖出期货合约）进行对冲。如果准备在未来买入标的资产（现在是现货市场的空头），就应该通过期货合约的多头（买入期货）进行对冲。这种“现货＋期货”的对冲组合具有负相关的关系。
- 所选择的期货的标的资产应该是需要对冲的现货资产，这使 F 和 S 之间的相关性最强。否则则可以通过选择一张价格与 S 高度相关的期货合约进行交叉对冲。
- 应该选择一种到期日比对冲的期限稍长的期货合约（即一种邻近的合约）。由于当利率发生变化时，对于“邻近的合约”（T 最小）S 和 F 变化的差别最小（这可以通过 $\ln F=\ln S+T\ln(1+r)$看出），因此这样的选择可以使基差 b_1 风险最小。另外，在期货合约期满的月份中，尤其是邻近到期日时，价格经常会出现不正常的变化。
- 当我们要在一段很长的时间内进行对冲时，则应该选择一系列流动性好、到期时间短的期货合约，组成一组向前滚动的期货合约。另外，还要注意选择合适的期货合约的数量，以便能与现货市场的现金头寸相匹配。（这将在接下来的章节中进行讨论。）
- 要注意期货合约的任何损失都可能导致额外的保证金催付，而且在通常情况下，用现货市场上的资产（例如持有的股票）所累积产生的利润来支付保证金是不方便的。因此，对冲者必须持有一定的银行存款或是可用的资产来满足可能发生的保证金支付的要求。

对冲和投资组合理论

利用期货合约进行对冲能够成功的条件有：

- 投资者是标的资产的**多头**（long）（或空头），同时是期货合约的**空头**（short）（或多头）。
- F 和 S 的变化紧密相连，即他们是高度**正相关**（positively correlated）的。

这样投资者就可以使由“股票多头＋期货空头”所组成的投资组合的方差最小。事实上，一个完美的对冲应该使最终的投资组合价值的方差为零。当我们仅仅考虑持有股票时，要找到两只相关系数为负的股票是比较困难的。但是现在我们可以通过成为期货合约的空头来创造一个“负的相关系数 ρ”。这是否与投资组合理论是一致的呢？我们将投资组合的方差表示为

$$\sigma_p^2=w_1^2\sigma_1^2+w_2^2\sigma_2^2+2w_1w_2(\rho\sigma_1\sigma_2) \tag{2.18}$$

其中，σ_1^2 是现货价格的方差，σ_2^2 是期货价格的方差。

到目前为止，我们假设现货价格和期货价格是完全正相关的（即 $\rho=+1$），当我们持有的现货（资产 1）和期货（资产 2）的头寸数量相等并且方向相反时，$w_1=w_2$，如果 r 是固定的，则 $F=kS$，其中 $k=(1+rT)$，而且这暗示着 $\sigma_2^2=k^2\sigma_1^2$。然而在短期内，$k^2=1$，因此可设定 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma$。所以投资组合的方差是

$$\sigma_p^2=w^2\sigma^2+w^2\sigma^2-2w^2(1)\sigma\sigma=0 \tag{2.19}$$

这是我们的“完美”对冲，但是在实际操作中，由于基差风险的存在，S 和 F 并不是完全相关的，因此 $\rho\neq+1$，另外，如果 $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，我们就必须选择 w_1 和 w_2，来使 σ_p 最小。（这点将会在第 3 章中讨论）

本书主要考虑的是金融资产的对冲头寸（还有一小部分内容是关于可交易的商品的，比如石油和天然气等），但是我们还是很有必要考虑对个体所面临的意义更为广泛的风险进行对冲的可能性。例如，世界上一些国家和地区，像美国、英国、日本、澳大利亚、巴西和东南亚等，都经历了住房及商业物业市场上的繁荣和萧条。对于个人消费者，当他们买入一套房子却发现房价开始下跌时，这种风险是很严重的。相反地，如果一个首次买房的购买者在房地产升值之前没有来得及买入，那么在很长一段时间之内（也可能是永久性的）他都可能不能再成为房屋的所有人。再看另外一个更为有力的例子，个人可能无法确保避免自己实际收入的突然性变化，这种变化可能并不是由于他们自己的原因而产生的（例如，是由于他们所在国家或地区的经济景气或萧条）。看上去似乎并没有一个恰当的机制来帮助个人规避这些社会风险。衍生市场能像利用期货合约对金融资产进行对冲一样，提供此类的保险，并且在众多的参与者中分散这种风险吗？对于上面的论题，Shiller（1993）提出了一些轻松的且感性化的分析，在文章 2.1 中我们概括了他的分析要点。

文章 2.1　未来的期货

耶鲁大学的 Robert Shiller（1993）提倡建立基于房价指数以及对收入的“感性求偿”的期货市场。这些可用于规避在持有房地产时的价格风险或是关于收入的不可预期的变化的风险（例如，你自己的职业收入或是整个社会的实际经济收入）。

原则上，这种想法是利用期货进行对冲的思想的简单应用。我们以房价为例：假设存在一个以你自己的房屋价格为基础的期货市场。如果你拥有一间房屋，那么你就是“现货”市场的多头，因此若想进行对冲就应该成为期货合约的空头。如果你的房价下跌了，期货合约的价格也会下跌，你就可以对期货合约进行平仓，这样会得到一部分利润，用来弥补你的房屋价值的损失。当然，如果你的房屋价格上升，你就会在期货合约上遭受损失，但是这恰恰可以通过你的财产价值的上升来平衡。

如果你想在将来作为一个首次购房者进入这个市场，那么你可以通过买入一份期货（即成为期货合约的多头）来对冲房价任何潜在的上升。如果房价真的上升了，则在对期货合约的多头进行平仓后的现金收益可以用来弥补购房价格的上升。

Shiller 提到在实际操作中事情并不是这么简单。相对来说，人们对期货市场并不是很熟悉，因此，储贷机构（或建筑协会）就必须向它的客户卖出“标准房价保险”合约（类似于火险和盗窃保险），这时它就成为了一个利用期货合约来对冲顾客头寸的金融机构。另外，这类期货合约

应该是基于房价指数的，而不是个别房屋的价格。因此这种期货合约提供了一种交叉对冲，但同时伴随着一定的基差风险。当然，如果这种期货合约普及的话，它们也可以是基于区域性的或是当地的房价，还可以是基于整个州的或是基于整个经济状况的房价指数。

我们还是要用现购自运套利来对这样的期货合约进行公平定价，但是由于较高的交易成本，“同质”房屋的交割是有些困难的。在这个意义上，基于公司不动产的股票价格指数也是可行的，套利也更为简单。出于同样的原因，这类期货合约的交割也不能用“同质的房屋”进行实物交割。在咖啡期货市场上（在纽约的咖啡、糖和可可交易所），有“专业的品尝师”（根据某些客观的标准）来确定交割咖啡的品质。然而，由于房屋的品质取决于很多因素，比如，房屋位置、房屋的邻居、交通的方便程度、教育设施的方便程度和购物的方便程度等，因此专家们不太可能关于“同质的房屋”达成一致的意见。这导致了此类的期货合约必须是现金交割的，交割价格基于房价指数并且考虑了房屋的品质差异。

在过去的8年里，Case-Shiller-Weiss公司编制了针对美国不动产的此类物价指数（我们将其称为幸福价格指数）。在编制这个指数时用到了重置价格和房屋品质的综合特征。基本的思想就是在所观测到的房屋价格 P_{it}（i=房屋，t=时间）和一系列房屋的品质特征（例如，房屋的面积、空调的个数、附近学校的数量以及距离零售中心的距离）之间进行回归。我们可以估计针对于某一个地区的房屋价格指数，甚至可以估计出某个特定房屋的价值（预测出的这个特定房屋的价格可以通过它在市场上的售价进行检验）。这样，期货合约就可以建立在这些标的房屋的价格指数的基础之上。

在实际操作中的另一个问题就是保证金的支付问题。如果你是期货合约的空头，而且房屋的价格上升，你就会收到保证金催付通知。但是你可能并没有足够的可变现的流动资产来支付这部分保证金催付。即使你的房屋的价格上升，但是却并不能卖出房屋的一部分来获取现金。但是如果有金融机构对空头对冲进行担保（并且向房屋的所有者卖出一张“房屋价格”保单），就会解决这种问题。

我们还可以利用基于国民经济指数、地区经济指数和个人职业收入的期货合约进行对冲，它的原理与前面提到的对房屋价格对冲的原理是相同的。（但是要注意的是，Shiller的实际目的更为精妙，他是基于长期的或是永久性的收入，而不是目前的或是下一年的收入。）如果你自己的收入是与区域性的收入正相关的，那么你（或是向你售出一张“收入保单”的金融机构）就应该通过卖出一份“收入期货合约”进行对冲。如果你的收入下降，就会收到来自清算所的保证金支付。这些保证金可以再投资于一个投资组合，这个投资组合可以是关于范围更广的其他国家的收入，这与你自己收入的现金流相比具有较小的波动性，因此降低了你的收入风险。但是对冲者怎样保证自己的保证金支付仍然是一个问题，这还是需要银行针对个人未来收入所发放的贷款，这些贷款主要以担保他们的保证金支付为目的。

在Shiller的《宏观市场》一书中还有很多其他实用的、新颖的观点，它们都很值得我们去研究。谁也不知道，在未来我们的孩子们会不会通过期货市场来对他们生命中最重要的两个风险进行对冲。

2.4 期货市场的投机

如果期货合约的价格上升，作为期货合约多头的投机者就会盈利。由于初始保证金数目相对较小，因此投机者可以通过他们的期货合约头寸获得杠杆力（与购买期货合约的标的资产现货相比）。由于投机者所持有的头寸是开放的，因此在交易中还是存在风险的。我们将投机者分为三类：短线交易者、当日交易者和头寸交易者。

- **短线交易者**（scalper）在期货交易池内参与交易，他们一般会在几分钟之内就进行平仓。Silber（1984）发现，短线交易者从持有头寸至平仓的时间平均只有不到两分钟，他们一天平均进行 70 次交易。短线交易者进行买卖的依据是他们对市场上各种变化的看法，他们为整个市场创造了很大的流动性。
- **当日交易者**（day trader）通常是在几个钟头之内进行平仓，最多不会超过一个交易日。他们根据自己对那些可能影响到期货价格的新闻和事件（例如货币供给曲线的发布）的判断来进行买卖。
- **头寸交易者**（position trader）持有头寸的时间可能是从一天到一个月甚至更长，一个完全开放的期货头寸(裸头寸)的风险是非常大的。因此头寸交易者通常还从事价差交易。
- **价差交易**（spread trading）拥有两种不同的期货合约的头寸，因此，当这两个头寸之间具有负相关的关系时，就会降低暴露的风险。一般说来，与开放头寸交易相比，对价差交易的保证金要求比较低。价差交易主要有两种类型：

  ——**同品种价差交易**：一份期货合约的多头和一份期货合约的空头，标的资产相同，但是交割日期是不同的。

  ——**品种间价差交易**：一份期货合约的多头和另一份不同种类的期货合约的空头，标的资产不同，但是交割日期相同。

同品种价差交易所依存的事实是：到期日较远的期货合约的价格变化要比到期日较近的期货合约的价格变化剧烈。举个例子说，如果你认为最近会出现牛市，那么你可以持有到期日较远的期货（股票期货），并且卖出到期日较近的期货。这样即使情况发生变化，股价下跌，作为期货多头会遭受比较大的损失，但是作为空头的收益可以弥补一部分损失。品种间价差交易的一个例子是：一个美国居民作为英镑期货合约的多头（假设是 12 月份进行交割），同时是日元期货合约的空头（也是在 12 月份进行交割）。如果相对于美元，英镑升值要比日元升值得多，此时价差交易者就会获利，但是如果预测不正确，日元期货合约空头的收益可以弥补英镑期货多头的部分（也可能是全部）损失。

2.5 远期合约与期货合约的价值

当我们讨论期货合约时，区分价格和价值是很重要的。远期或是期货合约的价格 F_0 指的是交易双方在 $t=0$ 时达成交易的价格。在 $t=0$ 时他们协议在到期日（即时间 T）用期货/远期合约

中的标的资产来交换 F_0 的现金支付。在任何固定的一天，期货/远期合约的价格都是一个确定的数值。但是远期/期货合约的“价值”就没有这么明确。“价值”是由未来标的资产交易的即期价格 S 的变化所决定的，根据套利理论，这又与远期/期货合约价格的变化是有所联系的。下面我们将进一步仔细地区别远期合约和期货合约的价值之间的区别。（我们假设二者最主要的区别就是人们往往持有远期合约至到期日，而期货合约在到期日之前任何时间都可以进行平仓，而且是“逐日盯市”的。）

远期/期货合约发行时的价值

当远期合约以 F_0 的远期价格发行时，它的价值是零（即这个合约不会提供任何利润）。因为这时不存在套利的机会，而且也没有任何现金转手。出于相同的原因，对于期货合约上面的结论也是成立的。

在远期/期货合约发行时，合约的价值为零（不会提供任何利润）。

到期时的价值

很明显，在到期日远期合约的价格必须等于现货的价格，即 $F_T=S_T$。如果上面的关系不成立，就可能产生套利利润。例如，如果 $F_T=90$ 美元，$S_T=100$ 美元，你就可以买入一份远期合约，然后立即进行交割得到标的资产（股票），这样需要支付 90 美元。然后可以立即在现货市场上以 100 美元的价格卖出标的资产（股票），这样就赚取了 10 美元的差值。你需要做的仅仅是“打电话进行交易时要足够迅速”，这个交易是无风险的。因此对冲会确保 $F_T=S_T$。

现在来看看一份“旧”的远期合约多头在接近到期日时的价值。在这份“旧”的远期合约终止时，它的价值就是你通过它获得的利润。这等于在终止时的即期价格 S_T 减去最初的远期价格 F_0。

$V_T=$ “旧”的期货合约在终止时的价值 $=S_T-F_0$

如果你是一份“旧”的远期合约的多头，这份合约在发行时的价值是 F_0，那么在 T 时刻你就可以交割标的资产，这需要支付 F_0，然后立即以 S_T 的价格在现货市场上卖出标的资产。

远期合约到期之前的价值

假设一份远期合约已经发行了一段时间，这时，远期的价格 F_0 是在一段时间之前确定的。因为远期报价 F_t 是连续变化的，所以我们需要区分它和这份“旧”的期货合约中最初商定的远期价格 F_0。假定现在是 3 月份，一份 1 月份远期合约最初的价格是 F_0，并且最开始的时候有 6 个月的有效期（至 6 月都有效），但是由于现在是 3 月，所以这份远期合约只有 3 个月就到期了（$T-t=0.25$）（见图 2—10）。这个 1 月份远期合约我们就称为“旧”的合约，相对地，我们把

目前的远期合约称为“新”的期货合约，它的价格为 F_1。现在的问题是，在 3 月份即 t 时刻，这份最初发行的“旧”的远期合约的价值（V_t）是多少。

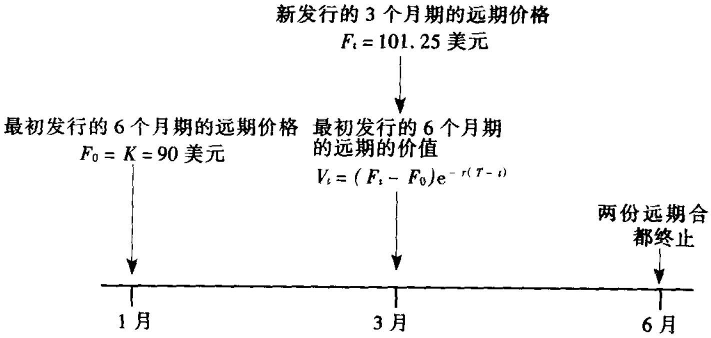

新发行的 3 个月期的远期价格
$F_t=101.25$ 美元
最初发行的 6 个月期的远期价格
$F_0=K=90$ 美元
最初发行的 6 个月期的远期的价值
$V_t=(F_t-F_0)\mathrm{e}^{-r(T-t)}$
两份远期合约都终止
1 月
3 月
6 月

图 2—10　远期合约的价值

如果在 t 时刻（3 月份）你是一份“旧”的远期合约的多头，那么你可以以 F_1 的远期价格卖出一份“新”的远期合约。在合约终止时，可以对“旧”的远期合约进行交割，以 F_0 的价格得到标的资产（例如股票）。然后我们可以用得到的这些资产交割那张卖空的“新”的远期合约，这样可以获得价值 F_1 的现金。因此，合约到期日（T 时刻）的利润是 F_1-F_0。注意，虽然我们在 t 时刻准确地知道远期合约的价值，但是在合约到期日之前这些利润是无法实现的。这份“旧”的远期合约的价值应该是（F_t-F_0）在 $T-t$ 这段时间前的现值：

$$V_t=PV(\text{新的远期价格}-\text{最初的远期价格}) \tag{2.20}$$

$$V_t=[F_t-F_0]\mathrm{e}^{-r(T-t)} \tag{2.21}$$

其中，$T-t$ 为距离远期合约到期日的时间（即 $T-t=0.25$），r 为无风险利率（即 $r=0.05$）。假设在 3 月份 $S_t=100$ 美元，那么 $F_t=101.26$ 美元，即 $S_t\mathrm{e}^{-r(T-t)}=100\mathrm{e}^{0.05(0.25)}$。上面关于“旧”的期货合约的价值 V_t 的表达式是根据无风险套利理论得出的，当然这也可以通过其他一些类似的方法得出，下面介绍的或许是一种最简单的方法。

假设你买了一份 6 个月期的远期合约，是在 3 个月前的 1 月份以 90 美元的 F_0 买入的，然后 3 个月后（在 3 月份），又在 101.26 美元的价格上卖出了一份新发行的期货合约。在 3 个月后（即 6 月份），对最初的那份合约进行交割，支付 90 美元得到一股股票。在 3 月份卖出的那份“新”的期货合约到 6 月份能产生 $F_t=101.26$ 美元的收益。因此潜在的收益是 11.26 美元（$=$101.26 美元$-$90 美元），这将在 6 月份进行支付。由于这个策略是无风险的，因此你应该在 3 月份为那份“旧”的期货合约（最初在 1 月份进行交易的合约）支付 $V_t=11.12$ 美元[$=11.26\mathrm{e}^{0.05(0.25)}$]。否则将会产生无风险套利利润。注意在 t 时刻，头寸的价值仅仅包括了那份“旧”的远期合约的价值，而“新”的合约的价值是零。

远期合约到期日之前的价值是

$$V_t=(F_t-F_0)\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

如果注意到在 t 时刻那份“新”的期货合约的价格是

$$F_t = S_t e^{(r-\delta)(T-t)} \tag{2.22}$$

那么上面的表达式还有另外一种等价的形式。其中 δ 是标的资产产生的任何收益，这可能是股票的红利支付（连续的），或是商品期货的便利收益减去仓储成本，另外对于外汇期货，δ 是关于国外资产的无风险利率 r_f（r 是关于国内资产的无风险利率）。因此

$$V_t = S_t e^{-\delta(T-t)} - F_0 e^{-r(T-t)} \tag{2.23}$$

可以看出，在 t 时刻一份已经发行的“旧”的期货合约的价值取决于以下因素：现在的股票价格 S_t、无风险利率（国内的）、“红利收益”、距到期日的时间和期货合约的最初价格 F_0。最初，一份远期合约的价格是零，这点可以通过在公式（2.22）中使 $t=0$ 得出，还要注意到在最初时 $F_0 = S_0 e^{(r-\delta)T}$，因此我们可以得到 $V_0 = 0$。在到期时 $t=T$，我们可以将公式简化为 $V_T = S_T - F_0$，这与我们前面所提到的到期日的远期合约的价格是一致的。注意在 $t>0$ 时，远期合约的价值 V_t 可以是正的也可以是负的。在应用连续时间模型时（我们将在后面的章节中提到）上面的这个公式是很有用的，但是它的用处不仅局限于此。

由于在上面的表达式中，我们需要清楚地区分 F_t 和 F_0 这两个远期价格，我们有时把“旧”的期货合约最初的远期价格 F_0 称为“交割价格”，并用符号 K 来表示（即 $F_0 \equiv K$）。这种“旧”的期货合约对标的资产进行的交割需要现金支付，这类似于期权合约中的交割价格，即期权合约的执行价，我们也把它记做符号 K。这也允许我们可以把（最初发行的或是“旧”的）远期合约的价格看做是它的“执行价格”，从广义上来说远期合约的价格与期权金是类似的。无论如何，用 K 来代替 F_0 的做法适用于这两种衍生品所有的数学表达式。但是为了避免不必要的错误，我们通常还是使用 F_0。

还有一种用套利理论来确定远期合约（标的资产不进行红利支付）价值的方法。一份“旧”的期货合约的持有者需要在 3 月份持有 88.88 美元，即 $90e^{-0.05(0.25)}$，这样的话，在 3 个月后，可以得到 90 美元来支付交割价格。比较下面两个投资组合（3 月份）：

投资组合 A：一份当前价格为 V_t 的远期合约的多头和 88.88 美元的现金 $[=F_0 e^{-r(T-t)}]$

投资组合 B：一股股票的所有权

到 6 月份进行交割时，上述两种投资组合每股都产生了相同的回报率，由于它们在交割日时的价值是相等的，那么目前它们的价值也必须是相等的。否则就会有无风险利润，这可以通过买入比较便宜的投资组合，同时卖出较贵的投资组合获得。因此

$$F_0 e^{-r(T-t)} + V_t = S_t \tag{2.24}$$

或

$$V_t = S_t - F_0 e^{-r(T-t)} = (F_t - F_0) e^{-r(T-t)} \tag{2.25}$$

根据上面给出的数据，$V_t = 11.12$ 美元，因此，$V_t = 11.12$ 美元就是这份“旧”的远期合约的公平价格，也就是说在这个价格上才能保证零（无风险）套利利润。通过持有这份“旧”的远期合约和 88.88 美元的现金（存于能产生利息的账户），则投资者可以确保在 3 个月后以固定的 90 美元的价格获得一股股票。因此投资组合 A 的总的价值是 88.88 美元 + 11.12 美元 = 100 美元。同样，在 t 时刻以市场价格 $S_t = 100$ 美元持有一股股票（投资组合 B），也可以确保在 3 个月后拥有股票。最后要注意，如果我们使用不连续利率或是单利（而不是使用连续复利）就有

$$V_t=\frac{(F_t-F_0)}{(1+r)^{T-t}} \tag{2.26a}$$

或

$$V_t=\frac{(F_t-F_0)}{1+r(T-t)} \tag{2.26b}$$

期货合约在交易日的价值

现在我们回到期货合约，分析一下期货合约在交易日内的价值以及每天交易结束逐日盯市后的价值。如果在第 t 日上午 11 点以 F_0 的价格买入了期货合约，假设在这天结束时的结算价格是 F_t，则它的价值是

$$V_{t\text{日结束时}}=F_t-F_0 \tag{2.27}$$

它的价值之所以是这个数值，是因为你可以通过以 F_t 的价格卖出“旧”的期货合约对你的合约多头进行平仓，因此净收益是价值为 F_t-F_0 的现金（这可以从清算所得到）。在当天结束时，实际操作中清算所会调整多头的保证金账户，并存入 F_t-F_0 的现金，这样的话，这份“旧”的期货合约的价值就又回到零（由于在当天结束时期货合约的价值通过保证金账户进行了现金支付）。进一步分析，由于期货合约可以在任何时间进行平仓，我们至少可以忽略这种逐日盯市，在任何时间 t，期货合约的价值是：

$$\boxed{V_t\text{（期货合约多头）}=F_t-F_0}$$

事实上，由于在实际操作中保证金账户的任何多余的资金（超过维持保证金的部分）都可以以无风险利率进行投资，而上面的表达式并没有考虑这一部分收入，因此上面的结论实际上是有些简化的。然而，这点细微的差别不会妨碍我们的结论。

2.6 本章摘要

- **期货头寸**往往在交割之前就进行**平仓**。期货合约是通过清算所**逐日盯市**的，这样使交易双方的信用风险最小化。
- **无风险套利**理论保证了期货合约的价格等于现货价格与“**持仓费用**”之和。
- 投资者可以通过卖出期货合约对自己持有的标的资产多头进行对冲（反之也成立）。由于 F 和 S 的变化趋势是一致的，因此这个策略创造了标的资产的收益和期货合约收益之间的负相关关系（这个关系几乎是完美的）。然而在对冲中还是经常会存在一些**基差风险**。
- 如果我们所要求的对冲期限非常长，而只有近期的期货合约可供使用，那么可以将这些期货合约**向前滚动**。
- 除了持有**裸头寸**的期货，**投机者**还可以通过利用同种商品的价差交易和不同种商品的价差交易来降低风险（同时也降低了收益）。

- 远期合约的价格和价值是不同的，合约的价格是起初（$t=0$ 时）商定的交割标的资产所需要的金额（因此有时也可以称为**交割价格**），而最初远期合约的价值为零，在到期日远期合约多头的价值是 $V_T=S_T-F_0$。在持有远期合约的过程中，它的价值可以是正的，也可以是负的。相比之下，由于期货合约是逐日盯市的，因此每天结束时，它的价值都会回到零（通过对保证金账户的支付和提取实现）。

章末练习

1. 期货合约为什么会提供杠杆力？

2. 在期货市场上为什么有时必须“滚动对冲”？

3. 现在你是 100 份交割价格为 50 000 美元的期货合约的多头，第 2 天上午 11 点，你以 51 000美元的价格又买到了另外 20 份合约。每份合约的初始保证金是 2 000 美元，这天结束时合约的结算价格变为 52 000 美元。那么在第 2 天内保证金账户会有怎样的变化？

4. 假设你买入了一份无红利支付股票的远期合约。到期时间为 1 年，$S_0=40$ 美元，$r=$ 每年 10%。

(a) 这份合约“无套利”（合成）期货价格是多少？

(b) 如果期货合约的实际价格是 $F=46$，你怎样才能获得无风险的套利利润？

(c) 如果期货合约的实际价格是 $F=42$，你怎样才能获得无风险的套利利润？

5. 利用期货进行的完美的对冲能否锁定现在的现货价格，这个价格将是未来进行支付的有效价格？

6. 什么是“便利收益”？它怎样使现货市场和期货市场之间的套利复杂化？

7. 讨论 Shiller 利用期货市场对房屋价格和劳动收入进行对冲这一方法的关键特征。

第3章

股票指数期货

学习目标

- 介绍合约规范（contract specification）的细节，结算程序以及报刊中股票指数期货的报价。
- 阐述如何由无风险套利建立股指期货的公平价格，同时介绍程序化交易（programme trading）是如何被用于赚取套利利润的。
- 演示如何利用股指期货对股票组合进行对冲。
- 分析使用股指期货的投机策略，包括品种间（intercommodity）和同品种的价差（intracommodity spreads）。

股票指数期货是以股票市场指数为标的物进行交易的合约，例如标准普尔500指数（S&P 500）、英国富时100指数（FTSE 100）或者日经225指数（Nikkei 100）。这些期货合约被广泛地应用于对冲、投机和指数套利。在一个充分多样化的股票组合中，单只股票的特殊风险已经被全部消除，只存在市场（“系统”或者“不可分散的”）风险。股指期货可以用

来消除股票组合的市场风险。例如，一个养老基金的经理可能担心 3 个月后股价下跌，那时正是对他业绩评估的最后时期。这时，他可以使用股指期货来消除这一市场风险，并且在未来 3 个月中以无风险利率取得收益。当然，他也可以通过出售全部股票，转而持有短期国债来获得无风险利率。但是，后者因为需要先出售，再于 3 个月后购回股票，这样会造成较高的交易成本。相比之下，使用指数期货要便宜得多。

再如下面一种情况，假设一个基金经理相信市场在未来的 3 个月中会变得更具有波动性（可能会有较大幅度的上涨或下跌），同时又希望能消除这一不确定性，那么他可以再一次使用指数期货来消除市场风险。在 3 个月后，如果他认为股票市场已经回归“正常”，他将会结清他的期货头寸，他持有的股票组合也将再一次与市场风险匹配（因为他可以获得比无风险利率更高的收益率）。又如，假设你计划用现金投资，在 3 个月后购买一个多样化的股票组合，但是又担心在接下来的 3 个月中股市会上涨。由于今天的期货价格是已知的，就可以通过购买股票指数期货来锁定价格，冲销未来股价上涨的可能性。

在对熊市或者牛市的投机中，使用指数期货与不断购买或出售大量股票来达到自己预期的证券组合的方法相比，前者的成本要比后者更低，更容易达到投机目的。最后，如果期货的报价不等于期货的合成价格，那么你可以通过同时在现货以及期货市场对指数交易，取得（几乎是）无风险的套利利润。

3.1　合约规范

股票指数期货合约标的于股票市场指数，并以现金进行结算。在美国，指数期货合约是在芝加哥商品交易所进行交易的，合约中的标的资产包括标准普尔 500 指数、迷你标准普尔 500 指数（E-Mini-S&P500）、S&P500/BARRA 成长指数和日经 225 指数，以及其他一些指数。其中，标准普尔 500 指数期货合约的交易量最大，如果将这些合约加总在一起，指数期货合约所标的股票的美元量已经超过了股票市场本身的美元总量。

在伦敦国际金融期货交易所交易的期货合约包括各种英国股票指数，比如英国富时 100 指数（FTSE100）和英国富时 250 指数（FTSE250），同样也包括欧洲的指数，例如泛欧 100 指数（FTSE Eurotop100）和 FTSE Eurotop300（包括英国以及不包括英国），当然还有其他一些指数。之所以会有如此多不同的期货合约，是因为指数期货要与投资经理们手中持有的证券组合最为匹配，他们可以使用指数期货有效地对股票组合进行对冲。表 3—1 给出其中一些合约的具体细节，大部分内容不需要再具体说明。全部的股票指数期货都是以现金进行结算的（不同的合约有不同的结算程序），但是几乎全部合约在到期前就已经平仓。现金结算是建立在**指数点数的价值**（value of an index point）z 美元，或者**合约乘数**（contract multiple）基础上的，这是由交易所确定的（以 S&P500 为例，$z=250$ 美元）。对于 S&P500 期货合约，**最小变动价格**（tick），即刻度，是 0.1 指数点，代表 25 美元的价值，也就是说，S&P500 指数期货合约中变化 1 点，代表着期货合约的账面价值变动 250 美元。如果 S&P500 的期货指数 $F_0=1\ 500$，那么一份期货合约的账面价值就是 375 000 美元（$=\text{FVF}=z\,F_0$）。

表 3—1 **股票指数期货的合约规格**

	FTSE100	S&P500	FTSE Eurotop300	Nikkei 225	S&P/BARRA 成长指数
交易单位	10 英镑每指数点	250 美元×指数	20 欧元×指数	5 美元×指数	250 美元×指数
	0.5=£5	0.1("10 点")=25 美元	0.5=10 欧元	5 点=25 美元	0.1("10 点")=25 美元
到期日	3 月/6 月/9 月/12 月	3 月/6 月/9 月/12 月	3 月/6 月/9 月/12 月	3 月/6 月/9 月/12 月	3 月/6 月/9 月/12 月
报价符号	FTSE100	S&P500	Eurotop300	Nikkei 225 MMI	S&P500/BARRA 成长指数
初始保证金	1 250 英镑	10 000 美元			
交易所	LIFFE	CME (IMM)	LIFFE	CME (IMM)	CME (IMM)
最后交易日		第 3 个星期五之前的星期四	交割月的第 3 个星期五		
交割方式	现金结算	最后交易日后的星期五以现金结算	现金结算	现金结算	现金结算

资料来源：相关交易所网站。

股票指数

S&P500 和 FTSE100 股票指数是通过使用价值加权的方法构造而成的。例如，S&P500 指数的计算公式

$$(\text{S\&P500})_t = \frac{\sum_{j=1}^{500} N_{jt} P_{jt}}{\text{BV}} \times 10 \tag{3.1}$$

其中，N_j为公司 j 的股票总数，P_j 为公司 j 的股票价格，BV 为基础值（也就是 1941—1943 年的指数平均值，当时设为 10）。

所有的股票指数都忽略了红利，因此不能完全真实地反映构成指数的所有股票的总回报率。

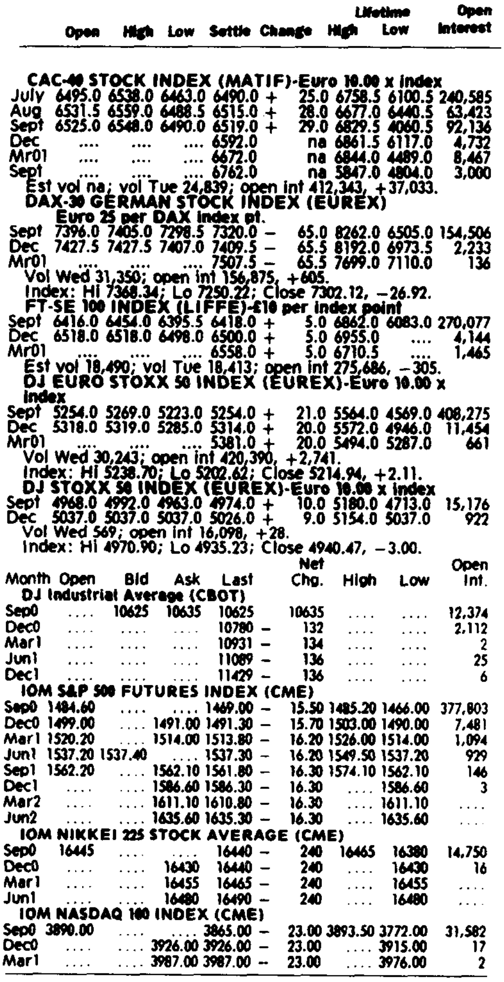
报纸行情

不同的股票指数期货合约在报刊中的行情表非常相似。举例说明，表 3—2 给出的是在 CME 交易的 S&P500 期货合约，选摘于 2000 年 7 月 27 日的《华尔街日报》（见图 3—1）。

表 3—2　　**报刊中的指数期货行情（2000 年 7 月 27 日）**

	IOM S&P500 期货指数（CME）							
	开盘	最高	最低	结算	变化	历史最高	历史最低	未平仓合约
9 月 0	1 484.60	—	—	1 469	−15.50	1 485.20	1 466	377 803
12 月 0	1 499.00	—	1 491.00	1 491.30	−15.70	1 503	1 490	7 481
3 月 1	1 520.20	—	1 514.00	1 513.30	−16.20	1 526	1 514	1 094
6 月 1	1 537.20	1 537.40	—	1 561.80	−16.20	1 549.50	1 537.20	929
9 月 1	1 562.20	—	1 562.10	1 561.80	−16.30	1 574.10	1 562.10	146
12 月 1	—	—	1 586.60	1 586.30	−16.30	—	1 586.60	3
3 月 2	—	—	1 611.10	1 610.80	−16.30	—	1 611.10	—
6 月 2	—	—	1 635.60	1 635.80	−16.30	—	1 635.60	—

资料来源：：*Wall Street Journal*, Thursday 27th July 2000.



						Lifetime		Open
	Open	High	Low	Settle	Change	High	Low	Interest
CAC-40 STOCK INDEX (MATIF)-Euro 10.00 x index								
July	6495.0	6538.0	6463.0	6490.0	+ 25.0	6758.5	6100.5	240,585
Aug	6531.5	6559.0	6488.5	6515.0	+ 28.0	6677.0	6440.5	63,423
Sept	6525.0	6548.0	6490.0	6519.0	+ 29.0	6829.5	4060.5	92,136
Dec	....	....	....	6592.0	na	6861.5	6117.0	4,732
Mr01	....	....	....	6672.0	na	6844.0	4489.0	8,467
Sept	....	....	....	6762.0	na	5847.0	4804.0	3,000
Est vol na; vol Tue 24,839; open int 412,343, +37,033.								
DAX-30 GERMAN STOCK INDEX (EUREX) Euro 25 per DAX index pt.								
Sept	7396.0	7405.0	7298.5	7320.0	– 65.0	8262.0	6505.0	154,506
Dec	7427.5	7427.5	7407.0	7409.5	– 65.5	8192.0	6973.5	2,233
Mr01	....	....	....	7507.5	– 65.5	7699.0	7110.0	136
Vol Wed 31,350; open int 156,875, +605.								
Index: Hi 7368.34; Lo 7250.22; Close 7302.12, −26.92.								
FT-SE 100 INDEX (LIFFE)-£10 per index point								
Sept	6416.0	6454.0	6395.5	6418.0	+ 5.0	6862.0	6083.0	270,077
Dec	6518.0	6518.0	6498.0	6500.0	+ 5.0	6955.0	....	4,144
Mr01	....	....	....	6558.0	+ 5.0	6710.5	....	1,465
Est vol 18,490; vol Tue 18,413; open int 275,686, −305.								
DJ EURO STOXX 50 INDEX (EUREX)-Euro 10.00 x index								
Sept	5254.0	5269.0	5223.0	5254.0	+ 21.0	5564.0	4569.0	408,275
Dec	5318.0	5319.0	5285.0	5314.0	+ 20.0	5572.0	4946.0	11,454
Mr01	....	....	....	5381.0	+ 20.0	5494.0	5287.0	661
Vol Wed 30,243; open int 420,390, +2,741.								
Index: Hi 5238.70; Lo 5202.62; Close 5214.94, +2.11.								
DJ STOXX 50 INDEX (EUREX)-Euro 10.00 x index								
Sept	4968.0	4992.0	4963.0	4974.0	+ 10.0	5180.0	4713.0	15,176
Dec	5037.0	5037.0	5037.0	5026.0	+ 9.0	5154.0	5037.0	922
Vol Wed 569; open int 16,098, +28.								
Index: Hi 4970.90; Lo 4935.23; Close 4940.47, −3.00.								

					Net			Open
Month	Open	Bid	Ask	Last	Chg.	High	Low	Int.
DJ Industrial Average (CBOT)								
Sep0	....	10625	10635	10625	10635	....	....	12,374
Dec0	....	....	....	10780	– 132	....	....	2,112
Mar1	....	....	....	10931	– 134	....	....	2
Jun1	....	....	....	11089	– 136	....	....	25
Dec1	....	....	....	11429	– 136	....	....	6
IOM S&P 500 FUTURES INDEX (CME)								
Sep0	1484.60	....	....	1469.00	– 15.50	1485.20	1466.00	377,803
Dec0	1499.00	....	1491.00	1491.30	– 15.70	1503.00	1490.00	7,481
Mar1	1520.20	....	1514.00	1513.80	– 16.20	1526.00	1514.00	1,094
Jun1	1537.20	1537.40	....	1537.30	– 16.20	1549.50	1537.20	929
Sep1	1562.20	....	1562.10	1561.80	– 16.30	1574.10	1562.10	146
Dec1	....	....	1586.60	1586.30	– 16.30	....	1586.60	3
Mar2	....	....	1611.10	1610.80	– 16.30	....	1611.10	....
Jun2	....	....	1635.60	1635.30	– 16.30	....	1635.60	....
IOM NIKKEI 225 STOCK AVERAGE (CME)								
Sep0	16445	....	....	16440	– 240	16465	16380	14,750
Dec0	....	....	16430	16440	– 240	....	16430	16
Mar1	....	....	16455	16465	– 240	....	16455	....
Jun1	....	....	16480	16490	– 240	....	16480	....
IOM NASDAQ 100 INDEX (CME)								
Sep0	3890.00	....	....	3865.00	– 23.00	3893.50	3772.00	31,582
Dec0	....	....	3926.00	3926.00	– 23.00	....	3915.00	17
Mar1	....	....	3987.00	3987.00	– 23.00	....	3976.00	2

图 3—1　指数期货合约（华尔街日报）

经《华尔街日报》允许后复制。

对行情中的各项基本不需要做更多说明。但需要注意的是，期限较长的合约比期限较短的合约价格要高一些（见表3—2第2列）。同时，这一价格就是结算价，用于盯市和确定保证金的支付。靠近2000年9月的S&P500期货合约具有最高的未平仓合约数（Open interest），同时它随着时间的推移迅速减小。图3—1给出的是摘自《华尔街日报》（2000年7月27日）的指数期货行情。这些行情涵盖了众多的指数期货合约，包括以美国高技术产业股票为基础构成的NASDAQ100期货合约（CME）、日本的日经225指数（CME）、英国的FTSE100指数（在LIFFE交易）、CAC-40法国股票指数（在巴黎的MATIF交易）、以及DAX-30德国指数（在法兰克福的EUREX交易）。其中标的于S&P500（CME）、DJSTOXX-50指数（EUREX）以及CAC-40指数（MATIF）的期货合约交易量最大，见图3—1中“Open interest”一列。

3.2 指数套利和程序化交易

在第2章中，我们使用“持仓成本”方法得到了无套利情况下的股票期货价格，公式如下：

$$F=S[1+(r-\delta)T] \quad (\text{单利}) \tag{3.2a}$$

$$F=S[1+(r-\delta)/q]^{qT} \quad (\text{离散复利}) \tag{3.2b}$$

$$F=Se^{(r_c-\delta_c)T} \quad (\text{连续复利}) \tag{3.2c}$$

其中，q为采用复利方式计算时，每年的周期数（例如一年4次$q=4$），T为年数（或者一年的分数），r_c为（连续复利）利率（通常以年利率表示），δ_c为（连续复利）红利收益率。

如果无风险利率大于红利收益率（即$r>\delta$），那么$F>S$（反之亦然）。实际上，$r>\delta$时，F通常大于S（以S&P500期货价格为例，见图3—1）。如果我们继续采用“持有成本”模型分析股指期货，还需要做出以下简单的假设：

- 我们可以通过买入或卖空“实际股票”来复制股票指数的表现，这一方法具有较低的交易成本。
- 从“复制”的股票组合中得到的实际红利可以近似地认为是（单位时间内）不变的（价值加权）红利收益。
- 从“复制”的股票组合中得到的离散红利（见下文）是已知的。

程序化交易

如果公式（3.2）不成立，就可以通过指数套利获得（几乎是）无风险的利润。在大型金融机构中，r，δ，T，S和F的实时数据被输入电脑，当察觉到出现违背公式（3.2）的时候，就会产生套利策略。通常可以在回购市场中（以利率r）借入或者贷出现金来实现套利交易。如果我们假设期货合约要求交割具有即期“价格”为S的股票组合，指数套利就非常容易理解。

假如股票现在的价格S等于200，r_c等于0.10，δ_c等于0.03，$T=1/3$（即4个月），那么“合成”或者“公平”的期货价格是$SF=Se^{(r_c-\delta_c)T}=200e^{(0.10-0.03)0.333}=204.04$。如果期货的报价是$F=210$，就会出现套利机会（高卖或者低买）。首先以$F=210$卖出期货合约，以$r_c=0.10$借

入 $S=200$，期限 4 个月（$T=0.3333$），同时购买当天的标的股票。4 个月后，以 $\delta=0.03$ 获得红利支付后，你已经拥有 204.04。然后交割股票，冲销空头期货头寸，收到 $F=210$（期货多头），最终得到 5.96（$=210-204.04$）的套利利润。

相反，如果期货报价是 $F=202$，低于 $SF=204.04$，可以采取下面的套利策略。以 202 “低”买期货合约，同时在 $t=0$ 以 $S=200$ 卖空股票，并继续投资无风险利率。到了期货多头头寸的交割日，需要支付 $F=202$ 并收到股票。将这些股票归还给经纪人，用于冲销 $t=0$ 时卖空的股票。同时支付经纪人所借股票的红利，因此以无风险利率、$S=200$ 进行的投资的净收入为 $Se^{(r_c-\delta_c)T}=204.04$。所以套利的利润为 2.04（收入 204.04 减去支出 202）。

实际上，红利支付总是集中在几个月内（在美国通常是 2 月和 3 月），因此恒定的红利支付率只是一种近似。然而，**当红利是以离散的形式支付时**，套利关系依然成立。考虑一种最简单的情形：如果标的股票只是恰好在期货合约到期前支付一次红利 D_T，由套利关系可以得到（使用连续复利）

$$F=Se^{r_cT}-D_T \tag{3.3}$$

所以，在时刻 T 支付的红利降低了持有成本。更确切地说，假设支付 N 次红利 D_j，每次支付距离现在有 t_j 年（或者年的分数）。如果以无风险利率投资（连续复利），在时间 T 时，每次单独的红利支付将具有价值 $D_je^{r_c(T-t_j)}$。所以，单独离散的红利支付在时间 T 时，价值为

$$D_T=\sum_{j=1}^{N}D_je^{r_c(T-t_j)} \tag{3.4}$$

综上所述，没有套利的期货价格就是公式（3.3），其中 D_T 由公式（3.4）给出。

在这个套利策略中还有一些**基差风险**（basis risk），交易员只是购买（或者出售）S&P500 股票中的一部分，所以他们的现金头寸可能并不完全准确地反映期货指数。我们同时还应考虑交易成本（做市商要支付交易股票价值的 0.6%）以及红利支付时间的不确定性。当然，也许不可能完全准确地在期货和股票市场同时进行交易，这样一来，标的股票的价格可能会发生变动。如果投资在股票上的套利资金为 2 000 000 美元，$S=1\,400$，指数乘数为 250 美元，需要期货合约的数量 $N_f=5.71$（=2 000 000 美元/1 400×250 美元）。可见套利策略不会完美，因为期货合约不可能被分割。在到期日，金融机构冲销头寸，例如，通过 NYSE 的计算机指定委托单处理系统，即 DOT（Designated Order Turnaround）使用收盘单（以收盘价）卖出股票。由于套利机会是计算机根据实际时间数据计算的，所以也被称做程序化交易，很多人认为这是加剧市场振荡的主要原因。（见文章 3.1）。

文章 3.1　程序化交易与 1987 年市场崩溃

关于程序化交易是否导致股票市场波动率上升这一问题，还存在许多的争论，尤其是在 1987 年市场崩溃之后。如果在期货合约到期日那天，程序交易员以收盘单的形式卖出全部股票，就可能会因为委托单不平衡导致波动率上升。当然，我们可以投资股票指数期权和标的于股指期货的期权。如果期权合约与期货合约在同一时间到期，股票（现货）市场的波动性会非常大，像这样的时期被称为“三巫日”（triple witching hour）。Stoll 和 Whaley（1986）发现，在期货到期那

天，股票市场波动率高于其他时段，尤其是在交易的最后几个小时。Brady 委员会也发现，程序化交易恶化了 1987 年的市场崩溃，但是目前还不清楚，在其他的正常时期中，主要的问题是否由它造成。有人建议增加期货交易的保证金，并且更频繁地使用“短路开关”，通过关闭市场的方式“冷却”过于激烈的交易。

* * *

虽然程序化交易很难把握，但是大量的金融机构仍从事于这一活动。NYSE 定义程序化交易为（几乎是）同时购买或出售多于 15 种股票，市场价值超过 100 万美元的一系列交易，并且这些交易与指数套利交易必须向 NYSE 汇报。《华尔街日报》也发布过一个概要。理论研究表明指数套利利润很难获得，但是在期限较长的合约中比较容易发生。这可能是因为这部分合约流动性较差，公平价格与实际价格可能会分离，这种情况的产生是由于交易员不能为这些较长期限的合约取得信用贷款，也因此无法实施套利交易。

3.3 使用股票指数期货对冲

一个充分多样化的证券组合已经消除了非系统（或特殊、可分散的）风险，但是我们可以进一步使用股票指数期货来对冲系统风险。如果被对冲的证券组合完全消除了系统风险，我们就能够以无风险利率获得收益（所以也被称为有效的“安全证券组合”）。然而之所以我们可以对冲，是因为现价与期货价格之间存在正的相关性。如果购买现货，再做期货合约的空头，就可以通过它们之间的负相关性对证券组合进行对冲。

当一个组合经理觉得在未来短期内货币市场可能有较大的波动，或者认为手中的证券组合已经很完美了，却担心指数会普遍下降，那么，她就会希望为持有的股票组合对冲。例如，她可以继续持有被低估的高 Beta 股票，通过股指期货对冲全部的头寸。这样，她就可以将市场时机选择问题与股票选择问题分离开。当然，她也可以选择卖出全部或者部分价格可能下跌的股票，但是使用股指期货来对冲要更有效。

由于她做了标的股票组合的多头，应该采用空头期货来对冲（卖出指数期货）。但是要建立一个有效的对冲头寸，还需要计算一下需要卖出的期货合约的数额。这里我们可以采取两种方法，一种“简单方法”和一种“最优方法”。幸运的是这两种方法得出的对冲结果非常相似。先采用最简单的方法考虑这一问题，假设一个股票组合完全符合 S&P500 指数的构成，拥有这些股票相当于有一个 140 万美元的现货头寸。因此，我们就假设指数 S 与期货指数 F 之间具有完美的相关性（相关系数$=+1$，两个指数变动的绝对数值相同 $\Delta S=\Delta F$）。

情况 A：方法一

假设期货报价 $F_0=1\,500$，一份期货合约的账面价值

$$\mathrm{FVF}_0=zF_0=250(1\,500)=375\,000\ (\text{美元}) \tag{3.5}$$

需要的期货合约数额 N_f^* 可以直观地得出

$$N_f^* = -\left(\frac{\text{现货头寸的价值}}{\text{一份期货合约的面值}}\right) = -\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right) \tag{3.6}$$

$$= -\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{zF_0}\right) = -\left(\frac{1\,400\,000\ \text{美元}}{250\ \text{美元}(1\,500)}\right) = -3.73\ \text{（即卖出 3.73 份合约）}$$

附录 3.1 给出上式与最小方差对冲结果的关系。

如果投资者持有一个多样化的组合，但是这个组合变动程度高于或者低于 S&P500，也就是他的组合 β 值与市场不一致。由于期货指数是伴随标的指数移动的，所以期货指数的“beta 值”等于 1（不一致会出现指数套利机会，见前文）。如果组合的 beta 值超过了 1，那么组合的价值变动将高于期货指数，他就必须卖出更多的期货合约。因此，上式变成

$$N_f^* = -\left(\frac{\text{现货头寸的价值}}{\text{一份期货合约的面值}}\right)\beta = -\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\beta \tag{3.7}$$

情况 B：方法二

接下来简单直观地考虑一下用另一种方法来计算 N_f，这种方法也与最小方差对冲率相关。假设 $S_0=1\,400$，那么持有的股票中包含 $N_{s,o}$ 单位指数：

$$N_{s,o} = \left(\frac{\text{现货头寸的价值}}{t=0\ \text{时现货指数的价值}}\right) = \left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{S_0}\right) = \left(\frac{1\,400\,000}{1\,400}\right) = 1\,000\ \text{（指数单位）} \tag{3.8}$$

这意味着对于每个 $\Delta S=+1$，股票价值变化 1 000 美元，或者 140 万美元被分配在 1 000 “股” S&P500 中。如果指数 S 和以指数为标的资产的期货完全统一，变化一致，我们就可以卖出足够的期货，使其等价于 1 000 指数单位，从而对股票的头寸对冲。换种说法就是，合适的期货合约数量应该是每个期货单位对应 S&P500 中的 1 “股”。所以给出期货中包含的指数单位为 $N_{f,o}=-N_{s,o}=-1\,000$，意味着应该卖出 4 份期权合约：

$$N_f = -\left(\frac{N_{s,o}}{z}\right)\beta = -\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{zS_0}\right)\beta = -\left(\frac{1\,000}{250}\right)(1) = -4 \tag{3.9}$$

由于这里的股票组合构成与 S&P500 相同，因此 $\beta=1$。这两种计算 N_f 方法的不同之处涉及表达式的分母：方法一使用“期货指数的现在价值”（$\mathrm{FVF}_0=zF_0$），方法二使用了“指数本身的名义值”（zS_0）。如果 F_0 和 S_0 非常接近，两种方法就会得到相似的结果。

接下来我们再为另一个投资经理持有的股票组合计算一下 N_f。假设现在是 6 月 20 日，我们希望为价值 100 万英镑的英国股票组合进行 5 个月的对冲，股票投资组合的 Beta 值 $\beta=1.5$（见表 3—3）。由于对冲的期限已经超过了 10 月份期货合约的到期日，我们不得不使用 12 月份的 FTSE100 期货合约。我们可以得出，如果没有基差风险，卖出 23 份 12 月份期货合约，可以保证无论英国股票组合的价值发生怎样的变化，都可以大部分被期货头寸的价值变化对冲掉。

表 3—3 使用股指期货对冲（FTSE100）

数据： 6 月 20 日，一个养老基金准备为价值 100 万英镑的股票组合对冲。对冲的期限为 5 个月。股票组合的 Beta 值 $\beta=1.5$。股票组合的红利收益为 $\delta=4\%$，$r=10\%$（连续复利）。选择使用 12 月到期的 $T=6/12$ 年的期货合约。现在 FTSE100 为 6 400。

6 月 20 日：

$S_0=6\ 400$（FTSE100）

$F_0=6\ 400e^{(0.10-0.04)(1/2)}=6\ 595$（12 月交割）

期货合约：

合约乘数＝10 英镑每指数点

刻度大小＝0.5

刻度价值＝5 英镑

问题： 为了使股票组合能够规避风险，应该卖出多少份（N_f）期货合约？请分别使用方法一和方法二进行计算。

解答：

$$N_f=-\left(\frac{\text{现货头寸的总价值}}{\text{期货合约的面值}}\right)\beta=-\left(\frac{\text{TVS}}{\text{FVF}}\right)\beta$$

$$=-\left(\frac{\text{TVS}}{10\text{ 英镑}\times\text{期货指数}}\right)\beta=-\frac{1\ 000\ 000}{(10\text{ 英镑})\ (6\ 595)}\ (1.5)$$

$$=-22.7\ \text{（卖出 23 份 12 月份指数期货合约）}$$

若使用方法二：

$$N_{s,o}=\text{持有指数单位数量}=\left(\frac{\text{TVS}_0}{S_0}\right)=\frac{1\ 000\ 000}{6\ 400}=156.25$$

$$N_f=-\left(\frac{N_{s,o}}{z}\right)\beta=-\left(\frac{\text{TVS}_0}{zS_0}\right)\beta=-\left(\frac{156.25}{10\text{ 英镑}}\right)1.5=-23.4$$

两种方法都得出卖出 23 份期货合约的结果。（两种方法的结果一致，是因为对于较短到期时间的指数期货，F_0/S_0 接近于 1，本例中 F_0 仅比 S_0 大 3.1%）

实际的对冲

现在让我们再看一个稍微复杂的例子，在这个对冲的例子中包括了股票组合的红利支付和期货价格的计算。（由于所有的股票指数都忽略了红利支付，而期货的价格是以股票指数为标的资产建立的，所以期货的价格也没有考虑这一影响。）基本数据如下：

对冲的证券组合（对冲期限＝3 个月）

150 万美元股票组合：　$\beta=1.5$

股票指数：　$S_0=1\ 500$

无风险利率：　$r=10\%$ 每年（连续复利）

股票红利收益（股票指数）：　$\delta=$每年 4%（连续复利）

合约乘数：　$z=250$ 美元

指数期货

选择的远期合约期限＝4 个月（$T_0=4/12$ 年）。使用套利定价公式，计算现在的期货价格 F_0：

$$F_0=S_0\exp[(r-\delta)T_0]=1\,500\ \exp[(0.10-0.04)4/12]=1\,530.3 \tag{3.10}$$

一份期货合约的账面价值＝250 美元×1 530.3＝382 575 美元。

用方法二计算（卖出）期货合约的数量 N_f：

$$N_f=-\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\beta=-\frac{1\,500\,000\text{ 美元}}{382\,575\text{ 美元}}(1.5)=-5.88\quad\text{（卖出 6 份期货合约）} \tag{3.11}$$

3 个月后

假设 3 个月后，离到期日还有 1 个月时间，S&P500 的价格下降了 10%，$S_0=1\,350$，投资者决定现在结清期货合约。期货报价（期限 $T_1=1/12$ 年）：

$$F_1=S_1e^{(r-\delta)T_1}=1\,350\ \exp[0.06(1/12)]=1\,356.8$$

因此期货头寸盈利：

$$\text{期货盈利}=N_f(F_0-F_1)500=6(1\,530.3-1\,356.8)250=260\,250\text{（美元）}$$

3 个月期间股票组合损失的百分比（现货市场头寸）就是经过股票组合 beta 值调整后在股票指数上的损失（即资本损失减去红利收入）。

股票指数（即市场指数）损失（百分比）：

$$R_m=\frac{S_1-S_0}{S_0}+\frac{\delta}{4}=\frac{1\,350-1\,500}{1\,500}+0.01=-0.09\ (9\%) \tag{3.12}$$

（3 个月）股票组合损失（百分比）：

$$R_p=r+\beta(R_m-r)=2.5+1.5(-9-2.5)=-14.75\% \tag{3.13}$$

3 个月后股票组合的预期价值＝1 500 000 美元（1－0.147 5）＝1 278 750（美元）

对冲者的头寸＝股票组合价值＋期货盈利

＝1 278 750 美元＋260 250 美元＝1 539 000（美元）

$$\text{对冲头寸的变化百分比}=\left(\frac{1\,539\,000}{1\,500\,000}-1\right)=2.6\%$$

使用方法二得到

$$N_f=-\left(\frac{N_{s,0}}{z}\right)\beta=-\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{zS_0}\right)\beta=-\left(\frac{1\,000}{250}\right)1.5=-6\quad\text{（卖出 6 份期货合约）} \tag{3.14}$$

实际结果非常接近方法一的 5.88 份合约。对冲的证券组合头寸具有 3 个月 2.6%的预期净收益率，非常接近 3 个月的无风险利率 2.5%。因此对冲的组合或者说“无风险头寸”预期可以获得无风险利率。投资者也可以通过售出证券组合的同时购买短期债券来赚取无风险利率，但是如果投资者认为股市的波动只具有短期性，就应该使用指数期货对冲，这样就可以节省交易成本。同样，如果她坚信手中持有的一些股票表现将优于平均水平，可以利用指数期货对冲整个证券组合的系统风险，获取“股票选择”策略的收益。同时，指数期货“对冲的风险”也会因为以下原因而上升：

- 股票证券组合的 beta 值估计不准确，或者在对冲期间发生变化。
- 股票组合没有充分多样化，还存在一些非系统风险（因此股票组合的 beta 值可能不会正确度量出组合的价值变化）。
- 安全率 r 或者红利收益率 δ（基差风险的来源）在对冲期间变化（会改变 F_1 与 S_1 之间的关系）。

第一点也许是最重要的，如果 beta 值确实随时间变化，风险可能上升，但是有人曾假设一个固定的 beta 值，做过回归分析。beta 的可变性可以通过迭代回归进行评估（使用不同长度的数据集，估计多个 beta 值），也可以给出预测对冲期间 beta 值的方法（假设 beta 值的变化具有随机性的时间趋势，用 Kalman filter 方法估计）。另外，我们注意到

$$\beta=\frac{\sigma_{(\Delta S/S,\ \Delta F/F)}}{\sigma^2_{\Delta F/F}} \tag{3.15}$$

因此，如果我们能准确地度量出（标的组合中）股票的收益与“期货收益变化量”之间的协方差 $\Delta F/F$，就可以使用公式（3.15）计算出“beta”。最近，利用 ARCH 和 GARCH 模型（见 Cuthbertson & Nitzsche，2001 和 Cuthbertson，1996）对时间变化方差和协方差的模拟相当成功，因此可以结合上式用这些模型预测 β 值。有证据表明，用上述得出的结果进行保值，效果要相比固定的 β 值有所提高（见 Cecchetti 等，1988 或 Baillie and Myers，1991）。

追加对冲

我们还需要解决另一个实际问题，即根据保证金账户利息的支付与收取，调整上文所建立的对冲头寸。这就是**追加对冲**（tailing the hedge）。假设如上文所述，你已经为期货空头对冲。如果期货价格下跌，期货空头头寸就会损失，不得不额外支付保证金，这就使得整个对冲的成本上升。为了抵消这部分提高的成本，可以持有期货的多头头寸。因此，如果一开始卖出（买入）N_f 份期货合约，追加对冲将需要买入（卖出）期货。追加的头寸永远与初始的 N_f 份期货头寸相反。下面是一种计算追加头寸的方法：

$$N_{追加}=-N_f rT \tag{3.16}$$

其中，$N_{追加}$ 为追加对冲的期货合约，N_f 为初始期货合约，r 为变动保证金的借入利率或者再投资利率（假设盈余保留在保证金账户中），T 为距到期日的时间。

设初始 $N_f=-100$ 份 S&P500 期货合约，$T=90/360$。如果期货指数升高一点，$r=$ 每年 8%，得出：

变动保证金＝(＋1 点)×(－100 份合约)×250 美元＝－25 000(美元)
利息成本＝25 000 美元×(0.08)×(90/360)＝500(美元)
追加对冲的期货＝－(－100)×(0.08)×(90/360)＝＋2
追加期货的盈利＝(＋1 点)×(2 份合约)×250 美元＝500(美元)

由此，我们计算追加对冲的公式抵消了估计的变动保证金带来的额外利息成本。在实际中，r 会在期货的生命期变动，显然，追加对冲不会得出上述的完美结果。当然，初始 $N_f=-100$ 份

合约和 $N_{\text{tail}} = +2$ 份合约相当于实际只持有 98 份合约的头寸。追加的期货数量要定期重新计算，当 r 变化或是随着到期日的临近 T 变小时，对冲组合也要相应调整。

改变股票组合的 beta 值

在公式（3.14）中，尽管股票组合（单独）的 beta 为 1.5，卖出 6 份合约的对冲头寸得到一个 beta 等于零的结果。如果卖出 3 份期货合约使 deta 为 0.75，买入 3 份合约使 beta 升至 2.25。因此，指数期货提供了一个改变股票组合 beta 值的低成本方法，使用期货指数不需要在证券组合中买入或者卖出股票（参见附录 3.2）。

一个适合**多头（期货）对冲**的例子是，投资者预期未来会有现金流入，准备用这些资金购买一个多样化的股票组合，但又担心（比如）3 个月后股票市场普遍上扬。如果股票确实上涨，同样指数期货也会上涨，所以期货多头头寸可以在 3 个月后平仓赚取一定利润。在期货上的盈利可以有效地降低在现货市场上购买的高额成本。上述的讨论同样可以用于一个公司的入侵，如果它以某家公司作为**兼并目标**（takeover target），购买其股票，并且希望每几个月就少量购买股票，以免惊动其他的市场参与者，但是又担心股票市场普遍上扬（显然会提高购买目标企业股票的成本）。多头期货头寸就可以对冲股市上升，保护购买者。但是被兼并企业的 beta 值很难准确地度量，beta 在这段期间内也未必恒定不变，所以对冲也相当不确定。需要注意的是，指数期货对冲不能保护公司入侵者在兼并过程中面临的非系统风险，比如，兼并的消息泄露，目标股票的价格极有可能迅速上涨，速度远高于整个市场。可见，在这里期货头寸不能冲销非系统风险（如果市场上有目标企业的股票期权，这类非系统风险就可以通过购买看涨期权来对冲）。

3.4　利用股票指数期货投机

持有股指期货的裸头寸是极具风险性的，但是与持有标的股票的等额期货头寸相比，前者具有附加的杠杆作用以及较低的交易成本。投机的思想自然是“低买—高卖”或者“高卖—低买”。图 3—2 描绘了在新加坡工作的英国巴林银行交易员尼克·利森（Nick Leeson）是如何在日经 225 指数期货上巨额亏损的。他买“高”，但是这一赌博策略没有获得回报，期货价格反而下降。当他收到变动保证金的通告时，巴林银行才对这未经授权的交易做出反应。然而利森利用巴林银行的一个秘密账户“88888 账户”隐藏了他的损失，最终造成了 14 亿美元的亏损，后文中的“5 个 8 等于 14 亿美元”也因此得来。文章 3.2 给出了利森裸期货策略的具体细节。

文章 3.2　利森的杠杆失误

1995 年 2 月 26 日，由于利森在衍生证券市场损失 14 亿美元，这一数额已经超过了巴林银行报告的 6.15 亿美元的资产，英国巴林银行不得不宣布破产。造成巨额损失的主要原因是利森在大阪和新加坡持有的价值大约 70 亿美元的日经 225 期货合约多头头寸（尽管在日经 225 的期权合约以及日本政府债券、欧元—日元期货合约中也遭受了损失）。

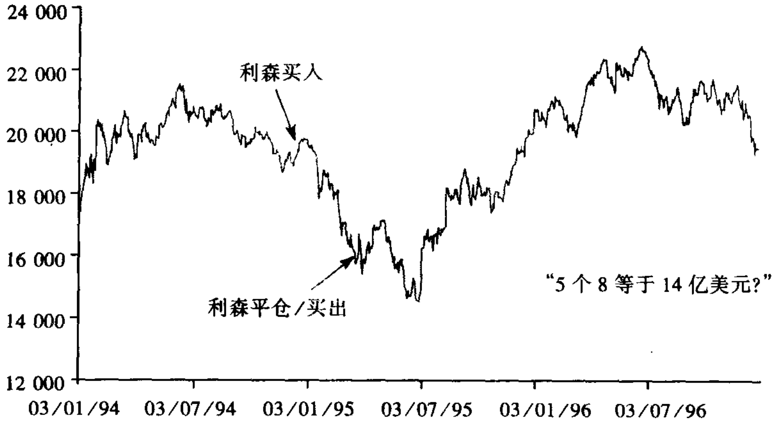


图 3—2　日经期货（利森的交易）

巴林银行伦敦总部批准利森可以执行的官方交易策略是一种被称为“转换”（switching）的套利策略。计划利用在不同的交易所进行日经 225 指数期货的套利，主要是在新加坡国际货币交易所（SIMEX）和大阪股票交易所（OSE）。因此利森本应在其中的一个交易所以“低”价买入日经 225 期货，并且同时在另一个交易所以稍高的价格出售相同的合约，从而在短期的价格失衡中获利。因此他的头寸实际是匹配的，几乎没有风险暴露。

由于需要每周汇报头寸，利森在 OSE 的头寸为公众所知。他在 OSE 的多头头寸应与在 SIMEX 的空头头寸相匹配。(实际上由于 SIMEX 的每份合约只有 OSE 的一半，利森需要 2 倍的期货合约。) 但是利森没有在 SIMEX 卖出期货合约，相反也做了期货的多头。之所以可以完成上述交易，是由于他可以操纵记录每天交易的“后勤部门”，通过一个秘密的“错误账户 88888”来隐藏他造成损失的头寸。截止到 1995 年 2 月底，利森已经持有了高杠杆开放头寸，价值达 70 亿美元之多。需要指出的是，因为每参与一次交易，只需要“支付”交易所“初始保证金”（标的合约资产的一小部分），所以他才能够搭筑成这么巨大的头寸。

在 1995 年 1 月 17 日神户地震爆发后，日经 225 指数大幅下跌至 18 950 点，利森在这时进入期货市场购买了大部分的日经 225 期货合约。1995 年 1 月 20 日，也就是神户地震后 3 天，他在已经持有 3 000 份期货合约的基础上，又购买了 11 000 份合约。大概他认为日经指数在这次地震后反应过度，不久就会上升，那么他可以在较高的价格平仓所有的多头头寸，赚取巨额利润。但是日经指数不升反降，到 1995 年 1 月 23 日，也就是星期一，日经指数下降了大约 1 000 点，跌至 17 950 点。在接下来的 3 周，利森“破釜沉舟”，截止到 2 月底，他已经做了 61 000 份多头合约（主要是 3 月份的合约，共 55 000 份，6 月份合约 6 000 份）。

1 月到 2 月的两个月期间，为了填补 SIMEX 催缴的变动保证金，巴林银行从东京和伦敦向新加坡急调 83 500 万美元的巨额资金。这已经超出了巴林银行的 61 500 万美元的报告资产。尽管巴林银行未平仓的期货合约已经比第二大头寸高出 8 倍之多，但是新加坡和大阪交易所的官员没有对利森的过度期货头寸采取任何行动。虽然巴林银行 1994 年全球利润的一半来自新加坡，但是当 1995 年 2 月，利森在衍生证券中的真实头寸被发现后，他一夜之间从“奇迹少年”变成了“劣迹少年”。随后，巴林银行（也被称为“女王的银行”，当年伊丽莎白二世曾使用该银行）被英格兰银行关闭，股票价格跌至零，股东损失超过 10 亿美元，并最终以每股 1 美元的价格卖

给了荷兰银行（ABN-Amro）。

利森在法兰克福被捕，引渡到新加坡后受到了在樟宜（Changi）监狱监禁 6 年半的处罚。2001 年，巴林银行的债权人仍然在采取法律行动，他们认为英格兰银行作为领导者在整个事件中有失职之嫌，但多次上诉仍没有取得成功。

同品种价差交易

同品种价差交易比裸头寸风险要小得多。这种方法指的是建立同一标的股票到期时间不同的两个相反的期货头寸（买入一份合约，同时卖出一份）。这种策略的依据是，到期日较晚的期货合约对于现价变动的敏感度高于到期日较近的期货合约。用套利情况可以很容易得到（单利）

$$F=S(1+rT) \tag{3.17}$$

T 越大，S 变动对 F 的影响越大。如果你期望市场将是牛市，可以采取同品种价差交易策略买入（到期日）“远”的合约 F_2 同时卖出“近”的合约 F_1。如果现货市场价格上升，多头盈利（ΔF_2）超过空头合约的损失（ΔF_1），因此投机盈利。同样，市场下降时，多头头寸的损失部分（ΔF_2）被空头头寸的盈利抵消，从而限制了市场下降带来的损失（相对裸头寸而言）。

品种间价差交易

假设投机者预期股票市场下跌，可以采取品种间价差交易，卖出 9 月份的 NASDAQ100 期货，买入 9 月份的 S&P500 期货。相比 S&P500，NASDAQ100 指数包括了高波动率（beta 值高）的小公司的股票，如果股票市场下降，NASDAQ100 的期货价格将会比 S&P500 下降得多。卖出 NASDAQ100 期货合约带来的盈利将超过 S&P500 期货多头头寸的损失。

3.5　本章摘要

- **股票指数期货**提供了一种为现在持有的股票组合或者未来购买股票组合对冲（预期对冲）的低成本方法。投资经理也可以通过购买或者卖出指数期货改变持有股票组合的 beta 值来实现他的相时策略。如果预期市场上升，就可以提高 beta 值，实现希望达到的风险暴露程度来改变在市场中的收益（反之亦然）。
- **对冲并不完美**，持有的股票组合一般不能完全准确地复制指数期货的成分；买卖标的股票不能与交易期货合约完全同步。这中间还有交易成本需要考虑，并且证券组合的 **beta 值是估计得到的**，在对冲期间可能不准确。这些因素造成了**对冲过程中的基差风险**。
- **指数期货价格**可以通过**持有成本理论**确定，如果违背了其间的关系，就会产生一种被称为**程序化交易**的形式。
- 使用**指数期货投机**比现货市场投机具有更高的杠杆作用和更低的交易成本。为了冲销裸

头寸的风险，投机者可以使用**同品种价差和品种间价差交易**。

章末练习

1. 如果你是一个养老基金经理，手中持有价值 5 000 万美元的分散化股票组合，这些股票在 12 月后将会被售出，并以养老年金的形式发放。此刻，你对于 6 个月后的股票市场十分不确定，但是相信 6 个月后市场将恢复“正常”状态。请比较出售股票并投资于无风险证券（如短期国债）与使用期货合约这两种方法各自的优点。

2. 在期货市场中，什么是“同品种价差交易”？假设很快就会出现牛市，但又不希望有非常大的暴露头寸，请给出一种投机方案。

3. 在市场“相时”策略中，如何使用股票指数期货进行低成本投机？

4. 在为股票组合对冲时，什么是最小方差对冲率？“基差”在这里扮演什么角色？

5. 股票现价 400，4 个月期货合约报价 405，$r=10\%$，红利收益率 4%（均为连续复利）。请问如何获得套利收益？

6. 目前掌握了以下信息：

“持有”分散化的股票组合，价值 2 000 万美元；
Beta（参照市场组合）=1.2；
S&P500 期货合约，$F_0=400$（每份合约的指数乘数为 250 美元）。

(a) 对股票组合对冲需要多少份期货合约？

(b) 如果希望将对冲组合的“beta”降至 0.6，如何操作？

7. 11 月 8 日，S&P500 $S_0=441.15$。红利收益率 3%，无风险利率 3.2%（均为连续复利）。40 天后（12 月 18 日）到期的 12 月份期货合约报价 $F_0=444$。

(a) 计算 12 月份期货合约的合成（公平）价格。

(b) 设计一种指数套利策略，假设使用了最大信用额度，从银行借入 2 000 万美元，请计算无风险收益。假设到期日的现货率 $S_T=439$（它可以是任意数值，你仍可获利）。

附录 3.1　最小方差对冲率

可以通过股票指数期货演示如何得到对冲现货头寸的最优期货合约数量。假设 A 持有充分分散化的股票组合现货头寸，并且完全模拟市场指数（如 S&P500），但是担心价格下跌，希望使用期货合约对持有的头寸对冲。已知：

S=S&P500 指数现价
TVS_0=初始持有现货总值（就是 150 万美元）
F=期货价格（S&P500 指数期货）
FVF_0=一份期货合约的账面价值
$N_{s,0}$=现货持有的指数单位数量

N_f＝持有的期货合约数量

$S_0 = 1\ 500$

$F_0 = 1\ 530.3$

“合约乘数”或者 S&P500 指数每点价值 $z=250$ 美元。因此

$$\mathrm{FVF}_0 = F_0 z \tag{A3.1}$$

如果现货头寸是 TVS_0 美元，投资者初始持有 $N_{s,o}$单位指数，则

$$N_{s,o} = \mathrm{TVS}_0 / S_0 = 1\ 500\ 000/1\ 500 = 1\ 000\ \text{单位指数} \tag{A3.2}$$

$t=0$ 时，对冲者在现货市场上为多头，因此在期货市场上空头卖出 N_f 份合约。在 $t=1$ 时刻，结清持有的头寸，对冲的组合价值变化如下：

$$\begin{aligned} \Delta V &= \text{即期市场头寸的变化} + \text{期货头寸的变化} \\ &= N_{s,o}(S_1 - S_0) + N_f(F_1 - F_0)z \\ &= N_{s,o}\Delta S + N_f(\Delta F)z \end{aligned} \tag{A3.3}$$

其中，$\Delta S = S_1 - S_0$，$\Delta F = F_1 - F_0$。

对冲组合的方差是

$$\sigma_V^2 = (N_S^2)\sigma_{\Delta S}^2 + (N_f z)^2 \sigma_{\Delta F}^2 + 2N_s N_f z \sigma_{\Delta S,\Delta F} \tag{A3.4}$$

其中，$\sigma_{\Delta S}^2$是 S 的变化的方差。对公式（A3. 4）的 N_f 微分，并使之为零（来得到最小值），也就是 $\partial \sigma_V^2 / \partial N_f = 0$，得到最优值：

$$N_f z^2 \sigma_{\Delta F}^2 = -N_{s,o} z \sigma_{\Delta S,\Delta F} \tag{A3.5}$$

$$N_f = -\left(\frac{N_{s,o}}{z}\right)\frac{\sigma_{\Delta S,\Delta F}}{\sigma_{\Delta F}^2} \tag{A3.6}$$

代替公式（A3. 2）中的 $N_{s,o}$，得到最小方差对冲率

$$N_f = -\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{zS_0}\right)\frac{\sigma_{\Delta S,\Delta F}}{\sigma_{\Delta F}^2} = -\left(\frac{\text{现货头寸的总价值}}{t=0\ \text{时现货指数的价值}}\right)\beta_{\Delta S,\Delta F} \tag{A3.7}$$

其中，“beta”为现货资产绝对变化量 ΔS 对期货价格绝对变化量 ΔF 回归得到的回归系数：

$$\Delta S = \alpha_0 + \beta_{\Delta S,\Delta F}(\Delta F) + \varepsilon_t \tag{A3.8}$$

$$\beta_{\Delta S,\Delta F} = \sigma_{\Delta S,\Delta F}/\sigma_{\Delta F}^2 = \rho\sigma_{\Delta S}/\sigma_{\Delta F} \tag{A3.9}$$

如果投资者手中持有的股票组合精确地反映了 S&P500 的组成，beta 值就会与之一致，于是

$$N_f = -\left(\frac{N_{s,o}}{z}\right) = -\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{zS_0}\right) = -\left(\frac{1\ 000\ \text{个指数单位}}{250\ \text{美元}}\right) = -4\ \text{（份合约）} \tag{A3.10}$$

期货合约中持有的指数单位数量是$(z\ N_f) = N_{s,o} = 1\ 000$，与现货市场中持有的指数单位数量相同。注意，$N_f$ 最优值的分母是$(z\ F_0)$，而不是 $\mathrm{FVF}_0 = z\ F_0$。但是，下面我们可以看到，如果我们采用更为普通的证券组合 beta 的定义，以百分比变动来描述的话，就可以合理地以 N_f 来改写 FVF_0。

注意，在一些对冲率的说明中，有如下定义 $h=N_f z/N_{s,o}$，因此公式（A3.3）变为 $\Delta V=N_{s,o}(\Delta S+h\Delta F)$，方差根据 h 最小化。这样给出的最优对冲率答案自然与前面得到的相同。

其他一些公式

最小方差对冲率是

$$N_f=-\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{zS_0}\right)\left(\frac{\sigma_{\Delta S,\Delta F}}{\sigma_{\Delta F}^2}\right)=-\frac{\mathrm{TVS}_0}{zS_0}\left(\frac{\rho\sigma_{\Delta S}}{\sigma_{\Delta F}}\right) \qquad \text{(A3.11)}$$

相关系数 $\rho=\sigma_{\Delta S,\Delta F}/\sigma_{\Delta S}\sigma_{\Delta F}$。如果 $\rho=0$，$N_f=0$，对冲不能降低风险。如果 $\beta_{\Delta S,\Delta F}=1$（即 $\rho=1$，$\sigma_{\Delta S}=\sigma_{\Delta F}$），标的股票组合完全模拟 S&P500，那么“简单”对冲率 $N_f=\mathrm{TVS}_0/zS_0$ 是最优解（对冲率 $N_f=\mathrm{TVS}_0/\mathrm{FVF}_0$ 也通常给出合理的对冲率）。

依据公式（A3.1），容易得出 $z=\mathrm{FVF}_0/F_0$，这样，我们就可以使最小方差对冲率的公式（A3.7）中出现“期货合约的账面价值”FVF_0：

$$N_f=-\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\left(\frac{F_0}{S_0}\right)\beta_{\Delta S,\Delta F} \qquad \text{(A3.12)}$$

如果 F_0/S_0 接近于 1，利用 $\beta_{\Delta S,\Delta F}$（$\mathrm{TVS}_0/\mathrm{FVF}_0$）可以得到与实际最优值相似的结果。例如，对于支付红利的股票 $F_0/S_0=[1+(r-\delta)T]$，$r=5\%$，$\delta=4\%$，$T=0.25$，$F_0/S_0=1.0025$，非常接近于 1。

股票组合

假设我们持有的股票组合可以充分分散化，但是构成却没有精确地反映“市场指数”，如 S&P500。尽管前面公式中的 N_f 使用绝对变化量，但证券组合的报酬率通常以变化的比例（或百分比）表示。现在来修正这一点，假设 A 的标的股票组合没有模拟 S&P500 指数，但是预期（比例）回报率 R_p 与“市场指数”回报率 R_m 相关，这里的指数仍然为 S&P500。单指数模型给出

$$R_p=\alpha+\beta_p R_m+\varepsilon_p \qquad \text{(A3.13)}$$

其中，ε_p 为随机误差，描绘股票组合的非系统风险。从前文的回归中估计股票组合的 β_p。如果忽略红利支付，那么 $R_p\equiv\Delta S/S$，S 是 A 持有的证券组合的股票价格。需要补充的是，如果假设 S&P500 期货价格和 S&P500 指数变化情况大体相同（由于指数套利的可能性），那么

$$\frac{\Delta F}{F}\equiv R_m \qquad \text{(A3.14)}$$

因此

$$\beta_p=\frac{\sigma_{\Delta S/S,\Delta F/F}}{\sigma_{\Delta F/F}^2} \qquad \text{(A3.15)}$$

但是由于 S_0 和 F_0 已知（在 $t=0$）：

$$\sigma_{\Delta F/F}=\sigma_{\Delta F}/F_0 \qquad \text{(A3.16a)}$$

并且

$$\sigma_{\Delta S/S,\Delta F/F}=\frac{\sigma_{\Delta S,\Delta F}}{S_0F_0} \tag{A3.16b}$$

因此

$$\beta_{\mathrm{p}}=\frac{\sigma_{\Delta S,\Delta F}}{\sigma_{\Delta F}^2}\left(\frac{F_0}{S_0}\right)=\beta_{\Delta S,\Delta F}\left(\frac{F_0}{S_0}\right) \tag{A3.17}$$

将公式（A3.17）带入公式（A3.12）中，最小方差对冲率可以被表示成“组合 beta”与 FVF_0 的形式：

$$N_{\mathrm{f}}=\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\beta_{\mathrm{p}} \tag{A3.18}$$

这个表达式的优点是可以使用基于 beta 资料库中的“证券组合 beta 值” $\beta_{\mathrm{p}}=\sum_{i-1}^{n}w_i\beta_i$（$w_i$ 是持有的股票中每种股票所占的比例）。公式（A3.12）与公式（A3.18）的主要差别是 β_{p} 是由股票组合回报率 R_{p} 与市场回报率 R_{m}（也是非常好的 $\Delta F/F$ 的代理变量）回归得到的，而公式（A3.12）是建立在绝对变化量 ΔS 与 ΔF 的回归上。注意公式（A3.13），如果不认为 R_{m} 是好的 $\Delta F/F$ 的代理变量，我们可以对百分比变动 $\Delta S/S$ 与 $\Delta F/F$ 进行回归，直接得到 β_{p} 的估计值。根据公式（A3.18），如果证券组合的 beta β_{p} 是 1，对冲需要的最优期货是 $N_{\mathrm{f}}=\mathrm{TVS}_0/\mathrm{FVF}_0$。但是，对于一个股票组合，如果变动大于市场（$\beta_{\mathrm{p}}>1$），由于期货价格变动的比例小于标的股票，则需要更多的期货才能成功地对冲。

附录 3.2　利用期货实现股票的相时策略

一个投资经理想要提高或者降低她的市场（系统）风险暴露。例如，她认为市场将会变得更具波动性，希望降低证券组合的 beta 值来减低下行风险（同样会降低上行收益）。或者，她确信市场会上升，于是准备提高证券组合的 beta 值。若要改变 beta，可以通过购买和出售股票这一高成本方法，但是也可以使用股票指数期货这一低成本方法达到，下面我们将会加以证明。既然我们要试图得到希望的 beta 值，那么先确定对冲组合的 beta 值。对冲组合为 TVS_0 美元，持有的股票中含 $N_{\mathrm{s,o}}$ 指数单位并且期货中包含 N_{f} 指数单位，其百分比回报为

$$R_{\mathrm{h}}=\frac{N_{\mathrm{s,o}}\Delta S+N_{\mathrm{f}}z\Delta F}{\mathrm{TVS}_0} \tag{A3.19}$$

用 $N_{\mathrm{s,o}}=\mathrm{TVS}_0/S$ 代入上式，一份期货合约的账面价值 $\mathrm{FVF}_0=zF$：

$$R_{\mathrm{h}}=\frac{\Delta S}{S}+N_{\mathrm{f}}\left(\frac{\mathrm{FVF}_0}{\mathrm{TVS}_0}\right)\frac{\Delta F}{F} \tag{A3.20}$$

其中，S 为股票价格，F 为期货价格。

忽略任何的红利支付，$\Delta S/S$ 是股票组合的收益率百分比。由 CAPM 模型可以得到

$$\left(\frac{\Delta S}{S}\right)=r+\beta_p(ER_m-r)+\varepsilon_p \tag{A3.21}$$

ε_p 是股票组合的**独特风险**。股票指数期货价格也遵循 CAPM 模型，并且 beta 值一致（假设所有的非系统风险都已经被分散掉，比如类似 S&P500 指数）：

$$E(\Delta F/F)=ER_m-r \tag{A3.22}$$

在公式（A3.4）左边没有出现无风险利率，是因为期货合约不带来任何“直接”成本，在期货合约中没有占用货币的机会成本。将公式（A3.21）和公式（A3.22）带入公式（A3.20）中得

$$R_h=r+\beta_h(ER_m-r)+\varepsilon_p \tag{A3.23}$$

其中

$$\beta_h=\beta_p+N_f\left(\frac{\mathrm{FVF_0}}{\mathrm{TVS_0}}\right)$$

假设投资者对于对冲组合的 β_h 有一个目标 beta 值，解得 N_f：

$$N_f=(\beta_h-\beta_p)(\mathrm{TVS_0}/\mathrm{FVF_0}) \tag{A3.24}$$

下面给出不同的目标 beta 值对应的期货头寸：

$\beta_h=0$，$N_f=-\beta_p$ $(\mathrm{TVS_0}/\mathrm{FVF_0})$（卖出期货）

$\beta_h=0$，$N_f>0$（买入期货）

$\beta_h=0$，$N_f<0$（卖出期货）

对冲非系统风险

如果选择的期货合约的数量消除了全部系统（或者市场）风险，那么 $N_f=-\beta_p(\mathrm{TVS_0}/\mathrm{FVF_0})$，根据公式(A3.5)得出 $\beta_h=0$ 以及

$$R_h=r+\varepsilon_p \tag{A3.25}$$

对冲的组合预期收益率是无风险利率（在正文中已述）并且期货头寸只能被用于对冲系统风险，任何非系统风险 ε_p 仍然存在（除非股票组合本身已充分多样化）。

第4章

货币远期和期货

学习目标

- 通过创造一个合成的或复制的由货币市场两个利率和即期汇率组成的投资组合来对**货币远期/期货定价**。这就是所谓的**抛补套利**（covered interest arbitrage）。
- 概括出某特定期货合约的**合约规范**、结算流程以及报纸行情。
- 阐释怎样用货币期货来**对冲外汇的空头或者多头**。
- 演示货币远期和货币期货如何被用来**投机**。
- 比较**货币期货**和**货币远期**定价原理的异同。

外汇交易（FOREX）市场的两种主要交易涉及即期汇率和远期汇率。即期汇率就是向买方立即交割货币时所使用的汇率（事实上，交割是在两个工作日后进行的）。第二种类型的交易涉及远期汇率。远期汇率是在今天确定，将来某一时间买方交割货币时所使用的承诺价格。货币远期和期货非常相似，尽管在实际的契约内容上，两种合约有所不同。

货币远期合约和货币期货合约的持有者都有义务在将来特定的交割日，以合同约定的特定汇率进行一种货币兑换另一种货币的交易。两种类型合约的交易成本相对于平均交易规模来说是非常小的。那么为什么我们还需要两种合约呢？原因就在于两者的微小差别。

一个货币**远期交易**（forward deal）可以根据代理商的要求特别设计，包括交易中的本金数量、确切的交割日期以及合约涉及的币种。它是一种场外交易的合约。大多数远期交易涉及广泛的币种，主要发生在伦敦、纽约和东京，以及在远东很有影响力的中国香港和新加坡。这个OTC市场的交易成本低，市场非常有效率。

远期交易是通过大型跨国银行（例如美林、花旗集团、摩根·斯坦利等）协商确定，在将来某一特定日期由一种货币（如瑞士法郎）兑换另一种货币（通常是美元，这种货币被称为中介货币）的交易。所谓的交叉汇率远期交易（不涉及美元）也可以通过协商达成，例如瑞士法郎兑欧元的交易。对于大多数主要货币而言，交易最活跃的到期时间是1到6个月，某些时候也有3到5年到期的合约。使用远期市场能够消除任何即期汇率变动造成的风险。这是因为即便现货交易是在1年后发生，交易所用的汇率在今天就已经确定下来了。

相比较而言，货币期货是在交易所交易的金融工具，它只涉及有限的币种。其合约规模（如125 000瑞士法郎）和交割日期都是确定的。对于远期合约来说，实际交割经常发生，而期货合约却不必进行货币的实际交割，因为你可以很容易冲销掉你的头寸。例如，如果你是一个期货的多头可是又不愿意进行实际交割，那么通过卖出一个到期日相同的期货你就可以冲销掉多头头寸。最后，期货合约是盯市的，几乎没有信用风险，而远期合约却涉及交易对手的信用风险问题。

货币远期和期货可以被用来对出口商/进口商的外币收入和支出以及所持有的外国债券、股票、银行存款和银行贷款等金融资产进行对冲。它们也可以在货币的投机活动中起到杠杆作用。

在不同的交易所（主要是芝加哥商品交易所的国际货币市场部IMM）有大量的货币期货合约在进行交易。例如，在IMM，下列货币多数从20世纪70年代就开始了兑换美元的交易：英镑、欧元、日元、瑞士法郎、加拿大元、澳大利亚元、墨西哥比索以及一些其他的货币。其他著名的外汇期货交易中心有新加坡国际货币交易所（SIMEX）和悉尼期货交易所（SFE）。

4.1 远期合约

远期合约的定价涉及远期汇率和三个其他变量：即期汇率、两个国家的货币市场利率以及所谓的**抛补利率平价**（covered interest parity，CIP）的关系。我们将会看到，在一个有效的市场中，交易中所使用的远期汇率能够保证通过即期市场、两个异地货币市场和远期市场之间的交易无法获得无风险套利利润。CIP是“无套利”均衡条件。即期和远期汇率的CIP关系可以通过下文所述推导出来。

假设一家英国公司的财务官有一笔资金，如A英镑。她可以把这笔钱投资在美国或者英国1年，不过到期时利润必须以英镑支付。我们假设所有交易都没有信用风险。因此，对于财务官来说，如果把钱投资在英国得到的回报等于投资在美国以英镑衡量的收益，那么她会认为投资在美国还是英国没有差异。假设英国公司的财务官面临着下列国内货币市场（英镑）和国外货币市场

（美元）两种利率。即期汇率 S 和所用的 1 年期远期汇率是以本国货币兑每单位外国货币衡量的（即英镑/美元）：

$r_d=0.11$（11%）　　$r_f=0.10$（10%）

$S=0.6667$ 英镑/美元　　（等价于 1.5 美元/英镑）

$F=0.6727$ 英镑/美元　　（等价于 1.4865 美元/英镑）

我们通过计算可以知道上述这些数字使得投资于英国和美国产生相同的收益。并且，两种投资策略都不涉及市场风险，因此财务官认为把她的钱投资在美国还是英国是无差异的，这种“零利润”条件就是**抛补利率平价**关系。

1. 在英国投资

1 年后将会收到（期末价值）

$$\mathrm{TV}_{\mathrm{UK}}=A\ (1+r_d)\ \text{英镑}=100\ (1.11\ \text{英镑})\ =111\ (\text{英镑})$$

2. 在美国投资

（1）今天在即期市场将 100 英镑兑换为 100 英镑/0.6666 英镑/美元=150 美元，然后

（2）投资美元存款，年底应收美元数为

$$(100/0.6666)(1.10\ \text{美元})=(A/S)(1+r_f)\text{美元}=165(\text{美元})$$

（3）同时在今天签订一个 1 年后买英镑卖美元的远期合约，并确保收到的期末价值 TV（以英镑衡量）为

$$\begin{aligned}\mathrm{TV}_{\mathrm{US}}&=[(A/S)(1+r_f)]F\ \text{英镑}=[(100/0.6666)(1.10)]\text{美元}\times 0.6727\ \text{英镑/美元}\\&=111(\text{英镑})\end{aligned}$$

以上(1)至(3)的交易是在今天按照已知价格操作的，因此没有（市场）风险。因为两种投资策略都是无风险的，所以套利将保证它们得到相同的期末价值：

$$\mathrm{TV}_{\mathrm{UK}}=\mathrm{TV}_{\mathrm{US}} \tag{4.1}$$

$$A(1+r_d)\text{英镑}=[(A/S)(1+r_f)]\times F\ \text{英镑}$$

因此抛补利率平价可以表述为

$$F/S=(1+r_d)/(1+r_f) \tag{4.2}$$

从（4.2）式公式两端同时减去 1，得到

$$(F-S)/S=(r_d-r_f)/(1+r_f) \tag{4.3}$$

上述公式很精确，但是如果 r_f 很小（如 0.03），那么（$1+r_f$）就约等于 1，因此从（4.3）式我们得到

$$(F-S)/S\approx(r_d-r_f) \tag{4.4}$$

远期升水/贴水率=利率差

我们很容易验证上述数据和 CIP 条件，即公式（4.3），是一致的：

$$利率差=(r_d-r_f)/(1+r_f)=(0.11-0.10)/1.10=0.0091 \quad (或\ 0.91\%) \tag{4.5a}$$

$$英镑远期贴水=(F-S)/S=0.91\% \tag{4.5b}$$

“抛补利率平价”（CIP）条件是一种基于无风险套利的均衡条件。如果 CIP 条件不成立，那么市场力量会使得市场迅速恢复均衡。举例来说，如果 $F=S$，但是 $r_d(\mathrm{UK})>r_f(\mathrm{US})$，那么美国居民就可以通过购买英国票据获得无风险利润，从而抬高了票据价格而使得英国利率下跌。（或者美国居民都要投资英镑存款，从而银行会降低英镑存款利率。）为购买英国资产，美国居民需要买即期英镑。为了抛补头寸，他们需要同时卖远期美元。因此即期英镑将会升值（即 S 下降，S 以英镑/美元衡量），F 将会上升。这些 r_d，S 和 F 的变动会使得公式（4.2）迅速恢复成立。

另一个需要注意的地方是，如果 S 和 F 是用外国货币兑单位本国货币来衡量的话，CIP 公式（公式 4.2）看起来会略有差别。然而，下面的“经验法则”却总是成立的。

> **如果 S（或者 F）是用“本国货币兑单位外国货币”（即本币/外币）来衡量的，那么在公式（4.2）中，利率也是本币/外币的。**

举例来说明，如果 S 和 F 是用瑞士法郎兑美元来衡量的，那么 CIP 条件就是

$$F/S=(1+r_{\mathrm{SF}})/(1+r_{\$}) \tag{4.6}$$

其中，r_{SF} 和 $r_{\$}$ 分别为瑞士和美国的利率。

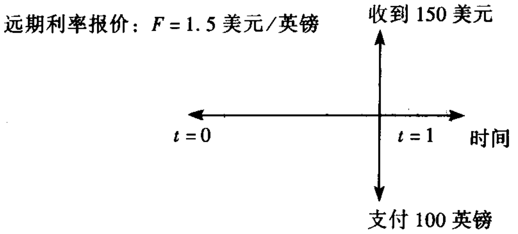
应该引用何种远期汇率

下文中我们将会看到，一个公司的财务官可以创造一个“合成远期”，如果实际远期汇率不等于这个“合成远期”的汇率，那么银行就给了公司财务官一个获得无风险利润的机会。在一个有效的市场里，这种无风险获利的机会会迅速消失，并由此决定了均衡的远期汇率。为阐明这一点，我们首先考虑在一个实际的远期合约中发生的现金流情况，然后我们再用其他“资产”（各个国家的货币市场和即期汇率）精确复制这些现金流。这就是合成远期合约。由于两种现金流是相同的，所以实际远期合约的“价值”和“价格”必须和合成远期合约的相等，否则就有可能获得无风险套利利润。

举例来说，如果你是一个英国居民，那么你可以这样来创造一个“合成远期汇率”：以 r_{UK} 的成本借入英镑，在外汇市场做一个买美元的即期交易，然后把这些钱以 r_{US} 的利率存入美元账户。这样你就承诺了在年底的时候归还英镑借款，当然同时你也会收到美元存款的本息。后者就相当于是一个 1 年内收到美元的合成远期合约。下面我们来深入研究这个问题。

实际远期合约中发生的现金流

如果实际的远期汇率报价为 $F=1.5$ 美元/英镑，那么现金流情况如图 4—1 所示。注意今天并没有发生现金转手。



$t=1$ 时，将要收到 150 美元，支出 100 英镑。

今天($t=0$)，没有使用“自有”资金，没有现金转手。

图 4—1　实际外汇远期合约：现金流

合成远期合约中发生的现金流

假设货币市场利率和即期汇率分别为：

$r_{UK}=11\%$　$r_{US}=10\%$　$S=1.513\ 6$ 美元/英镑

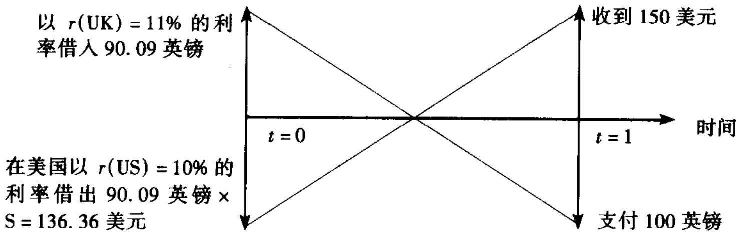
现在我们可以产生和实际远期合约相同的现金流（见图 4—2）。首先，在 $t=0$ 时刻借入 $100/(1+r_{UK})$英镑并同时在即期市场兑换成美元，从而在 $t=1$ 时刻产生了 100 英镑的现金流出。接着把这些资金全部投入美元存款 1 年，在 $t=1$ 时刻将有一笔确定的收益。通过把所有的英镑借款投资在美国，我们在 $t=0$ 时刻复制了一个零现金流的状态（模拟了一个真实的远期合约的情形）。合成远期合约的现金流为：

利用货币市场和即期外汇汇率。

相关数据：$r(\text{UK})=11\%$，$r(\text{US})=10\%$，$S=1.513\ 636$（美元或英镑）

创造和实际远期合约等价的现金流。

通过“创造”在 $t=1$ 时刻 100 英镑的现金开始。


以 $r(\text{UK})=11\%$ 的利率借入 90.09 英镑
收到 150 美元
$t=0$
$t=1$
时间
在美国以 $r(\text{US})=10\%$ 的利率借出 90.09 英镑 × $S=136.36$ 美元
支付 100 英镑

注意，交易过程中没有动用自有资金。

图 4—2　合成外汇远期合约

- 借入 $100/(1+r_{UK})$英镑 $=90.09$ 英镑，$t=0$ 时刻；
- 归还借款本息和 $=100$ 英镑，$t=1$ 时刻；
- 兑换成 $100/(1+r_{UK})S$ 美元 $=136.36$ 美元，$t=0$ 时刻；
- 投资在美国并收回$[100/(1+r_{UK})]S(1+r_{US})$美元 $=150$ 美元，$t=1$ 时刻。

合成远期(*SF*)汇率

$$SF=\frac{t=1\text{ 时刻收取美元数}}{t=1\text{ 时刻支付英镑数}}=\frac{150\text{ 美元}}{100\text{ 英镑}}$$

$$SF=S(1+r_{US})/(1+r_{UK}) \tag{4.7}$$

实际的远期汇率 F 必须等于合成远期汇率 SF，否则将会有无风险套利利润产生。所以，外汇交易者会通过精确计算，然后采用等于 $S(1+r_{US})/(1+r_{UK})$ 的汇率以消除任何套利机会。但是这仅仅是抛补利率平价关系。

获得无风险利润的可能性

如果银行的远期汇率报价不等于合成的远期汇率，那么公司财务官就可以获得无风险利润。为阐释这种可能性，我们假设公司财务官面临着下面的相关数据：

实际远期汇率报价 $F=1.45$ 美元/英镑。所以在 $t=1$ 时刻支付 140 美元就可以兑换 100 英镑。

合成远期（货币市场）

相关数据：$r_{UK}=11\%$，$r_{US}=10\%$，$S=1.5136$ 美元/英镑；

合成远期汇率 $SF=1.5$ 美元/英镑，即 150 美元兑换 100 英镑。

因此，$SF(=1.5$ 美元/英镑$)>F(=1.4$ 美元/英镑$)$，在实际的远期市场，美元显得贵了。那么财务官就可以在实际的远期市场卖出美元(以 1.4 美元/英镑的汇率)，然后以 1.5 美元/英镑的汇率在合成远期市场购买美元。交易细节如下。

套利策略：

- $t=1$ 时刻卖出 140 美元买进 100 英镑（即利用实际的远期合约）；
- $t=0$ 时刻在英国货币市场借入 90.09 英镑（于是在 $t=1$ 时刻应归还本息 100 英镑）；
- $t=0$ 时刻在即期市场将 90.09 英镑兑换为 136.36 美元；
- 将 136.36 美元投资于美国货币市场存款，$t=1$ 时刻收回 150 美元（合成的）。

因此无风险利润＝150 美元－140 美元＝10 美元。

市场上有了这样无风险获利的机会，所有交易者都会尝试执行这种交易策略。但是这样做的结果就导致了：

- 在实际的远期市场购买英镑导致远期汇率 F 下降；
- 在货币市场借入英镑导致英镑利率 r_{UK} 上升，同时借出美元使得美元利率趋于下降，购买即期美元使 S 上升。

以上情形使得 F 趋于上升，SF 趋于下降，最终将导致它们相等。在现实中，上述计算会考虑到买卖价差和创造合成远期时的交易成本。

有时候以线性形式表述 CIP 条件十分有用。首先注意连续复利 r^c 和离散利率是通过 $r^c=\ln(1+r)$ 相联系的。因此，将公式（4.2）两边同时取对数，得到

$$f-s=\ln(1+r_d)-\ln(1+r_f)=r_d^c-r_f^c \tag{4.8}$$

其中，$f(=\ln F)$ 为远期汇率的对数值，$s(=\ln S)$ 为即期汇率的对数值。注意当我们用离散复利的时候，公式(4.8)也是近似成立的，因为 $\ln(1+r)\approx r$。其中 r 是一个十进制的小数。

利用远期合约进行对冲

通过锁定将来进行交易时所用的汇率，远期合约可以对冲外汇风险，不过它们也可以被用来针对一种货币的前景（涨跌）进行直接投机。

多头对冲

假设现在是 4 月 1 日，6 个月后（即 10 月 1 日），一个美国进口商为从瑞士进口商品需要支付 500 000 瑞士法郎。现在作为瑞士法郎的空头，她担心瑞士法郎相对美元会表现出强势（升值）。如果 6 个月后瑞士法郎升值（即美元贬值），那么她就需要多支付美元（和现在的即期汇率相比）。为了对冲这个空头头寸，她买进（做多）一份瑞士法郎远期合约。如果 10 月 1 日交割的远期合约所用远期汇率 F 为 0.662 0 美元/瑞士法郎，那么今天这个进口商就可以确定 10 月 1 日她只需要支付固定的 331 000 美元。她通过远期合约消除了不确定性。

同样的道理适用于一个有瑞士法郎债务的美国投资者（该投资者可能是因为发行了以瑞士法郎标示的债券，或者有一笔以瑞士法郎标示的银行贷款）。未来他面临着息票（或银行利息）支付，或者要赎回债券（归还银行贷款）。如果将来瑞士法郎升值，那么拥有瑞士法郎债务的美国投资者就必须多支付美元。但是通过购买一份瑞士法郎远期合约，她可以进行对冲。

空头对冲

如果想利用远期合约进行空头对冲，那么需要这个美国居民在外汇即期市场有一个多头头寸，比如，如果在 4 月份一个美国跨国公司预计 10 月份（即 6 个月后）它将要收到一笔英镑付款，或者来自于在英国的销售收入，或者来自于英镑的投资，那么美国的这个跨国公司在即期市场就处于“英镑多头”的状态。它担心英镑会贬值，导致将来少收美元。于是通过在远期市场购买英镑，美国的出口商或投资者就可以做到对冲。

在购买了远期英镑后，到底是进行对冲好还是不进行对冲好要取决于 10 月 1 日即期汇率的情况。例如考虑一个有瑞士法郎收益的美国进口商的多头对冲情况。如果 10 月份的时候即期汇率变为 $S_T=0.66$ 美元/瑞士法郎，而她在远期合约中锁定的汇率为 $F_0=0.662\ 0$ 美元/瑞士法郎，那么不进行对冲对进口商来说就更合适。因为以较高（美元价格较低即瑞士法郎价格较高——译者注）的价格 $S_T=0.66$ 美元/瑞士法郎购买瑞士法郎（支付美元）要比以 $F_0=0.662\ 0$美元/瑞士法郎购买更经济。但这里的关键点是 4 月份的时候，我们并不知道 10 月份的即期汇率是怎样的。如果你选择了对冲，那么你就规避了任何汇率波动带来的风险，但是，当然，你同时也失去了不进行对冲时会发生的任何潜在收益和损失的机会。

在远期市场进行投机

假设现在是 4 月 1 日，10 月 1 日进行交割的远期合约所用的远期汇率为 $F_0=1.50$ 美元/英镑，并且你相信到 10 月 1 日的时候即期汇率会变为 $S_T=1.52$ 美元/英镑。因此，你会认为 10 月 1 日的时候，英镑在即期市场一定会比现在远期汇率中所显示的值钱。如果你关于 S_T 的猜想是

正确的，那么通过下面所述的“低买高卖”（即 $F_0<S_T$）活动你就可以获得投机利润。

今天（4 月 1 日）：同意在 10 月 1 日买 1 英镑远期卖 1.50 美元。

10 月 1 日：在即期市场，卖 1 英镑，收到 1.52 美元。

在远期合约的交易中收到 1 英镑，支付＝1.50 美元。

交易中所得利润＝1.52 美元/英镑－1.50 美元/英镑＝0.02 美元/英镑。

如果交易中的本金金额为 $Q=100\,000$ 英镑，那么

$$\text{以美元标示的总利润}=(S_T-F_0)Q=2\,000(\text{美元}) \tag{4.9}$$

请注意，这是一种高风险的交易活动，因为一旦 10 月份的时候即期汇率低于 1.5 美元/英镑，投机者就会蒙受损失（而这种损失可能是巨大的，因为理论上即期汇率可以变为零）。同时，这是一种杠杆交易，投机者在 4 月 1 日购买远期以及她在 10 月 1 日做反向操作的时候并没有用到她的自有资金。在后面的章节中我们将会看到利用期货合约进行对冲或投机活动与远期合约是非常相似的，最主要的区别就在于期货合约交易可以在到期日前很容易地进行平仓。

4.2 期货合约

期货合约投机

我们现在从远期合约转到期货合约的学习。在 CME 交易最活跃的期货合约有欧元、加拿大元、日元、瑞士法郎和英镑（见表 4—1）。在 IMM，利用 GLOBEX 交易系统，还可以在交易所开盘之外的时间进行期货交易。如果合约的交易者想要在不同的交易所进行交易，那么欧元期货的交易可以在任何时间进行。我们将会集中讨论 CME 的欧元期货合约（见表 4—1）。如果你做了一个期货合约的多头，那么：

欧元期货多头⇒收取 125 000 欧元并支付美元

表 4—1 **IMM 货币期货（CME）**

	交易单位	刻度（最小变化价值）	交割月份	初始保证金	维持保证金
1. 英镑	62 500 英镑	0.02 美分/英镑（12.50 美元）	A	2 000 美元	1 500 美元
2. 瑞士法郎	125 000 瑞士法郎	0.01 美分/瑞士法郎（125 美元）	A	2 000 美元	1 500 美元
3. 日元	12 500 000 日元	0.01 美分/100 日元（12.50 美元）	A	1 500 美元	1 000 美元
4. 加元	100 000 加元	0.001 美元/加元（100 美元）	A	900 美元	700 美元
5. 欧元	125 000 欧元	0.01 美分/欧元（12.50 美元）	A	变动	变动

注：（1）A＝1 月份/3 月份/4 月份/6 月份/7 月份/9 月份/10 月份/12 月份。

（2）交割日期是交割月份的第 3 个星期三。

（3）最后交易日是交割前的第 2 个工作日。

（4）如果交易中涉及投机价差或者对冲头寸，保证金经常会小于表中所示金额。交易所会对保证金做经常性的调整。

（5）没有每日波幅限制。

假设 A 在 3 月 1 日购买（做多）了一份 9 月份欧元期货合约，期货所用汇率为 $F_0=1.04$ 美元/欧元。9 月份到期日的时候，她将要收到 125 000 欧元，并支付 130 500 美元。期货合约是盯市的。所以，如果 3 月 2 日时汇率变为 $F_1=1.0450$ 美元/欧元，那么 A 就会获得收益，因为远期欧元已经升值，她的保证金账户将会被注入 625 美元（即 50 刻度×12.50 美元）。

结算

虽然绝大多数合约在到期日前就被平仓了，但是考虑一下结算时发生的情况仍然十分有用。假设结算用的即期汇率是 $S_T=1.05$（美元/欧元）。从表 4—2 中，我们可以很清楚地看到，A 支付 131 250 美元是基于到期日时的即期汇率 $S_T=1.05$（美元/欧元）的。然而这却被期货保证金账户的 1 250 美元收益冲销掉了。这意味着她锁定了一个汇率“$F_0=1.04$（美元/欧元）”。（此处计算忽略了持有合约期间保证金账户上的任何利息收益。）换言之，以 S_T 的价格购买即期美元，那么从保证金账户所得的利润等于把价格锁定在最初的 $F_0=1.04$（美元/欧元）时所得的收益。

表 4—2　　**欧元货币期货的结算**

1. 合约要求：9 月份进行结算。

A 在名义上收到 125 000 欧元，支付 130 000 美元。

$F_0=1.04$ 美元/欧元

2. 结算惯例。

货币是以到期日的前 1 个交易日通行的汇率进行交割。

$S_T=1.05$ 美元/欧元

A 收到 125 000 欧元，支付 131 250 美元（=1.05 美元/欧元×125 000 欧元）。

到期日期货价格等于现货价格 $F_T=1.05$ 美元/欧元

A 的保证金账户上的增加金额为

$$1\,250\text{ 美元}=100\text{ 点}\times 12.50\text{ 美元}=(1.05\text{ 美元/欧元}-1.04\text{ 美元/欧元})(125\,000\text{ 欧元})$$
$$=(F_T-F_0)(125\,000\text{ 欧元})$$

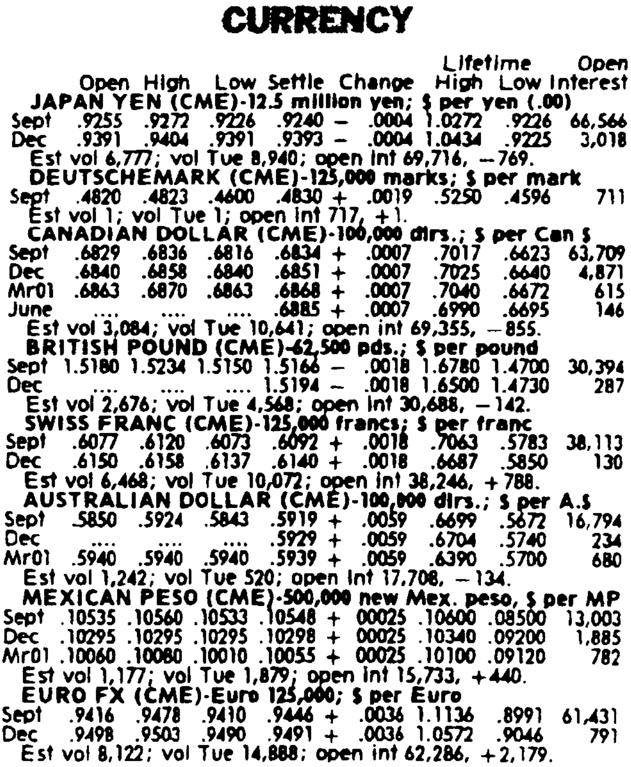
（注意：$S_T=F_T$）

A 的净成本＝现货市场支出－期货市场收益

$$=[S_T-(F_T-F_0)]\times 125\,000\text{ 欧元}=F_0\times 125\,000\text{ 欧元}$$
$$=1.04\text{ 美元/欧元}\times 125\,000\text{ 欧元}=130\,000(\text{美元})$$
$$=[S_T\times 125\,000\text{ 欧元}-(F_T-F_0)\times 125\,000\text{ 欧元}]$$
$$=131\,250\text{ 美元}-1\,250\text{ 美元}=130\,000(\text{美元})$$

报纸行情

图 4—3 显示了市场上交易最活跃的期货货币种类，有欧元、加元和日元（“未平仓数”）。货币期货是以“每单位外汇××美元”的形式来报价的。例如，2000 年 7 月 27 日（见图 4—3），9 月份到期的欧元期货报价为 $F_{\text{Sept}}=0.9416$ 美元/欧元，12 月份到期的期货报价为 $F_{\text{Dec}}=0.9498$ 美元/欧元。给定一个现行的即期汇率 $S=0.9420$ 美元/欧元，那么 $F_{\text{Sept}}=0.9416$ 美元/欧元的



CURRENCY

						Lifetime		Open
	Open	High	Low	Settle	Change	High	Low	Interest
JAPAN YEN (CME)-12.5 million yen; $ per yen (.00)								
Sept	.9255	.9272	.9226	.9240	− .0004	1.0272	.9226	66,566
Dec	.9391	.9404	.9391	.9393	− .0004	1.0434	.9225	3,018
Est vol 6,777; vol Tue 8,940; open Int 69,716, −769.								
DEUTSCHEMARK (CME)-125,000 marks; $ per mark								
Sept	.4820	.4823	.4600	.4830	+ .0019	.5250	.4596	711
Est vol 1; vol Tue 1; open Int 717, +1.								
CANADIAN DOLLAR (CME)-100,000 dlrs.; $ per Can $								
Sept	.6829	.6836	.6816	.6834	+ .0007	.7017	.6623	63,709
Dec	.6840	.6858	.6840	.6851	+ .0007	.7025	.6640	4,871
Mr01	.6863	.6870	.6863	.6868	+ .0007	.7040	.6672	615
June	....	....	....	.6885	+ .0007	.6990	.6695	146
Est vol 3,084; vol Tue 10,641; open int 69,355, −855.								
BRITISH POUND (CME)-62,500 pds.; $ per pound								
Sept	1.5180	1.5234	1.5150	1.5166	− .0018	1.6780	1.4700	30,394
Dec	....	....	....	1.5194	− .0018	1.6500	1.4730	287
Est vol 2,676; vol Tue 4,568; open Int 30,688, −142.								
SWISS FRANC (CME)-125,000 francs; $ per franc								
Sept	.6077	.6120	.6073	.6092	+ .0018	.7063	.5783	38,113
Dec	.6150	.6158	.6137	.6140	+ .0018	.6687	.5850	130
Est vol 6,468; vol Tue 10,072; open Int 38,246, +788.								
AUSTRALIAN DOLLAR (CME)-100,000 dlrs.; $ per A.$								
Sept	.5850	.5924	.5843	.5919	+ .0059	.6699	.5672	16,794
Dec	....	....	....	.5929	+ .0059	.6704	.5740	234
Mr01	.5940	.5940	.5940	.5939	+ .0059	.6390	.5700	680
Est vol 1,242; vol Tue 520; open Int 17,708, −134.								
MEXICAN PESO (CME)-500,000 new Mex. peso, $ per MP								
Sept	.10535	.10560	.10533	.10548	+ 00025	.10600	.08500	13,003
Dec	.10295	.10295	.10295	.10298	+ 00025	.10340	.09200	1,885
Mr01	.10060	.10080	.10010	.10055	+ 00025	.10100	.09120	782
Est vol 1,177; vol Tue 1,879; open Int 15,733, +440.								
EURO FX (CME)-Euro 125,000; $ per Euro								
Sept	.9416	.9478	.9410	.9446	+ .0036	1.1136	.8991	61,431
Dec	.9498	.9503	.9490	.9491	+ .0036	1.0572	.9046	791
Est vol 8,122; vol Tue 14,888; open int 62,286, +2,179.								

图 4—3　货币期货（《华尔街日报》，7 月 27 日）

经《华尔街日报》允许后复制。

期货意味着期货 9 月份到期的时候，每个欧元相对于 7 月 27 日来说，将会少收到 4 个点/刻度的美元。因此 9 月份的时候，欧元折价，或者称为**贴水**（discount）：

> 9 月份欧元期货贴水 ⇒ 相对于即期市场来说，
> 期货市场的每个欧元将兑换较少的美元，$F<S$。

相比较而言，如果期货价格 $F>S$，那么相对于即期市场来说，可以在期货市场以溢价（或升水）出售欧元（例如，交割 12 月份期货得到的美元数要多于在即期市场交割时得到的美元数）：

> 欧元期货升水 ⇒ 在期货市场出售一个欧元得到的收
> 益多于在即期市场上得到的收益，$F>S$。

由上文我们也可以看出，市场预期 7 月 27 日到 9 月间的即期欧元兑即期美元发生贬值（但预期 7 月到 12 月之间升值）。

4.3　投机和对冲

投机

通过持有货币期货，A 的收益曲线形状（见图 4—4）显示了 A 的收益随着期货价格的涨落而波动。期货的“原始”价格 $F_0=1.04$ 美元/欧元和后来的期货价格 $F_1=1.05$ 美元/欧元意味着 1 250 美元的利润（即保证金账户中的增加额）。如果价格变为 $F_2=1.03$ 美元/欧元，那么 A 的保证金账户上就会减少 1 250 美元（若这个时候进行平仓，那么 1 250 美元就会实际损失掉）。如果到期日的价格为 $F_T=1.05$ 美元/欧元（$=S_T$），那么由于在合约持有期间保证金账户上的利息收入或损失，她的收益将会和 1 250 美元稍有出入：

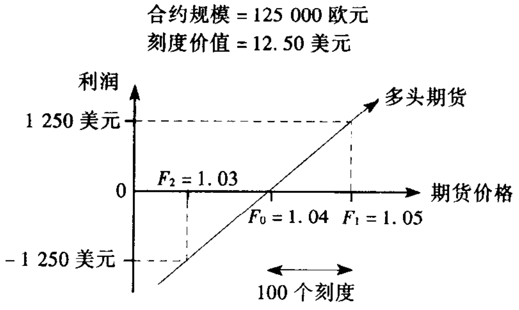


图 4—4　欧元期货合约多头

$$\text{到期日的收益}=(F_T-F_0)125\,000\text{ 美元}=(S_T-F_0)125\,000\text{ 美元} \tag{4.10}$$

如果期货合约在到期日（$t=1$）前被平仓，那么每份合约的美元收益$=(F_T-F_0)125\,000$ 美元。

对冲

国际投资者和跨国公司更易受到**交易暴露**（transaction exposure）的冲击，即所谓未来现金（外汇）收付的汇率风险。由于现货价格和期货价格的高度相关性，利用所谓的**简单对冲比率**（naive hedge ratio），期货就可以被用来对冲这类风险暴露。为了使美元的期货风险暴露等于美元的即期风险暴露，简单对冲率的应用涉及选择期货合约的数量问题。例如，如果一个投资者在即期市场是多头状态（即持有外汇期货），那么她在期货市场就应该是空头状态（反之亦然）。

多头对冲

让我们回到美国进口商的例子。现在是 4 月 1 日，她要在 6 个月后为瑞士进口的货物支付 500 000 瑞士法郎的货款。如果 6 个月后瑞士法郎升值（即美元贬值），那么相比于今天现行的即期汇率来说，她就要多支付美元。为了对冲瑞士法郎的空头头寸，她可以做一个瑞士法郎期货的

多头。这样，在期货市场平仓时，她在即期市场的损失就可以通过期货市场的收益来冲销（反之亦然）。她的对冲头寸为

6个月后需要支付瑞士法郎⇒今天购买瑞士法郎期货

假设现在她面临着下列相关的汇率：

S_0＝即期汇率＝0.670 0美元/瑞士法郎

F_0＝期货价格(10月份交割)＝0.673 8美元/瑞士法郎

合约规模 z＝125 000瑞士法郎

一个刻度(价值)＝0.000 1美元/瑞士法郎（12.50美元）

简单对冲率（4月1日，$t=0$）

首先我们来计算一下为保护即期头寸需要的期货合约数目。计算过程中用瑞士法郎或美元做“通用货币”（common currency）均可以，而两种方法通常会给出相似的答案。(哪一种方法更有用，部分地取决于我们是希望知道 F 和 S 的绝对变化还是它们的百分比变化，我们将在附录4.1中深入讨论这个问题。)

方法1：最简单的方法就是利用瑞士法郎的未偿金额部分 $\text{TVS}_0=500\ 000$ 瑞士法郎，然后除以合约规模 $z=125\ 000$ 瑞士法郎。通常情况下，这种算法都是足够准确的，在本章的例子中，我们将主要使用这种方法：

$$N_f=\frac{\text{即期市场瑞士法郎头寸}}{\text{合约规模}}=\frac{\text{TVS}_0}{z}=4\ \text{（份合约）} \tag{4.11}$$

方法2：是一种将即期市场头寸和期货合约规模都转换为美元（美国进口商所用的货币）计算的稍微复杂一点的方法：

$$\begin{aligned}N_f&=\frac{\text{即期市场头寸的美元价值}}{\text{1份期货合约的美元价值}}=\frac{\text{TVS}_0\ \text{美元}}{\text{FVF}_0\ \text{美元}}\\&=\frac{(\text{TVS}_0)S_0}{zF_0}=\frac{500\ 000\times 0.670\ 0}{125\ 000\times 0.673\ 8}=\frac{335\ 500\ \text{美元}}{84\ 225\ \text{美元}}=3.98(4\ \text{份合约})\end{aligned} \tag{4.12}$$

其中，TVS_0 为瑞士法郎头寸即期暴露的总价值，TVS_0 美元为美元头寸即期暴露的总价值，S 为美元兑瑞士法郎的即期汇率，F 为瑞士法郎期货所用的价格（汇率），z 为合约规模（125 000瑞士法郎），FVS_0 美元为一份瑞士法郎期货合约以美元标示的面值（$=zF_0$）。

我们既可以根据即期头寸减去期货头寸的净变化，也可以根据美国进口商得到的美元收益情况，对美国进口商的对冲情况进行分析。下面我们逐个讨论。

表4—3显示了在10月1日（$t=1$），瑞士法郎从 $S_0=0.67$ 美元/瑞士法郎升值到 $S_1=0.72$ 美元/瑞士法郎（即500个刻度）时的头寸状况。美国进口商在即期市场增加的成本是 $\text{TVS}_0(S_1-S_0)=25\ 000$ 美元。然而，随着瑞士法郎即期汇率的升值，期货价格也从 $F_0=0.673\ 8$ 美元/瑞士法郎上升到了 $F_1=0.720\ 4$ 美元/瑞士法郎，增加幅度为466个刻度。于是得到多头期货合约头寸的收益为466个刻度×12.50美元×4份合约＝23 300美元（此式也可以表述为 $N_f z(F_1-F_0)=23\ 300$ 美元）。从期货市场得到的收益几乎可以抵消即期市场增加的成本。这里对冲能够成功的关键点是 $\Delta S\approx\Delta F$，因此基点差的变化 $b_1-b_0=(S_1-F_1)-(S_0-F_0)=(\Delta S-\Delta F)=0.003\ 4$

（34 个刻度）相对来说较小。多头期货合约的收益有效抵消了在即期市场以美元标示的进口成本。

表 4—3　　**多头对冲（瑞士法郎期货）**

---

4 月 1 日

$S_0=0.6700$（美元/瑞士法郎）

- **美国进口商需要支付**

  $\mathrm{TVS}_0=500\,000$ 瑞士法郎，10 月 1 日

  TVS_0 美元＝进口商品以美元标示的价值＝$(\mathrm{TVS}_0)S_0=335\,000$ 美元

  z＝合约规模＝125 000 瑞士法郎

  $F_0=0.6738$ 美元/瑞士法郎

  $\mathrm{FVF}_0=F_0z=84\,225$ 美元

  $$N_f=\frac{\text{即期头寸以美元标示的价值}}{\text{期货合约以美元标示的价值}}=\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVS}_0}=\frac{335\,500}{84\,225}=3.98\text{（4 份合约）}$$

  备忘：初始基点差＝$b_0=S_0-F_0=-0.0038$ 美元/瑞士法郎（－38 个刻度）

10 月 1 日

$S_1=0.7200$ 美元/瑞士法郎（瑞士法郎升值，美元贬值）

$F_1=0.7204$ 美元/瑞士法郎

- **美国进口商即期需支付**

  TVS_1 美元＝$(\mathrm{TVS}_0)S_1=500\,000$ 瑞士法郎×$0.7200=360\,000$（美元）

  额外需支付即期美元＝TVS_1 美元－TVS_0 美元＝$\mathrm{TVS}_0(S_1-S_0)=25\,000$（美元）

- **期货合约的收益**

  $N_fz(F_1-F_0)=4\times125\,000\times(0.7204-0.6738)=23\,300$（美元）

  $=4\times12.50$ 美元×466 个刻度＝23 300（美元）

  备忘：最终基点差＝$b_1=S_1-F_1=-0.0004$（4 个刻度）

  基点差变化＝$\Delta S-\Delta F=b_1-b_0=-(-4)-(-38)=+34$（个刻度）

分析：

即期瑞士法郎的升值使得进口货物显得更加昂贵，但是从 4 份期货合约上得来的收益抵消了这些增加的成本。考察对冲效果的一种方式就是期货合约的收益 23 300 美元约等于即期市场的损失 25 000 美元。

或者，我们有

以美元标示的进口货物净成本＝即期市场成本－期货市场收益

$=(\mathrm{TVS}_0)S_1-N_fz(F_1-F_0)$

$=360\,000$ 美元－23 300 美元＝336 700（美元）

进口货物的有效成本接近于美国进口商在 4 月 1 日利用远期合约进行保值的情况（此时成本为 336 900 美元＝$F_0\mathrm{TVS}_0=0.6738\times500\,000$ 美元）。因为对于简单对冲率 $\mathrm{TVS}_0=N_fz$，进口货物净成本＝$\mathrm{TVS}_0[S_1-(F_1-F_0)]=\mathrm{TVS}_0(b_1+F_0)$，因此，假如最终基点差很小，那么 F_0 是锁定的。

现在让我们考察一下对于美国进口商来说，出于略微不同的目标而对最终美元成本进行对冲的情况。10 月份净成本为

$$\text{进口货物的美元净成本＝即期市场成本－期货市场收益} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}&=(\mathrm{TVS}_0)S_1-N_f z(F_1-F_0)\\&=\mathrm{TVS}_0(S_1-F_1+F_0)=\mathrm{TVS}_0(b_1+F_0)\\&=360\ 000\text{ 美元}-23\ 300\text{ 美元}=336\ 700(\text{美元})\end{aligned}$$

注意，在上述计算中，我们用到了 $N_f z=\mathrm{TVS}_0$，并且公式（4.13）解释了只要最终基点差 $b_1=S_1-F_1$ 比较小，那么对冲就在 $t=0$ 时刻将期货价格锁定在 F_0。也就是说，进口商支付 336 700美元就可以收到 500 000 瑞士法郎，这意味着 $t=1$ 时刻的有效汇率为

$$\frac{\text{净成本}}{\mathrm{TVS}_0}=\frac{336\ 700\text{ 美元}}{500\ 000\text{ 瑞士法郎}}=b_1+F_0=0.673\ 4\ (\text{美元/瑞士法郎}) \tag{4.14}$$

这和 $t=0$ 时刻的初始期货价格 $F_0=0.673\ 8$ 美元/瑞士法郎非常接近，最终的基点差为 $b_1=-4$个刻度。

空头对冲

一个美国居民若要利用期货合约进行空头对冲，那么他需要在外汇即期市场有一个多头头寸。在 4 月 1 日，如果一个跨国公司预计它在 10 月 1 日会收到一笔英镑款项（可能是由于向英国销售货物，或者是由于英镑投资），那么在即期市场它就拥有了英镑的多头头寸。为避免英镑贬值带来损失，该公司利用英镑期货合约空头进行对冲：

6 个月后将会收到英镑⇒今天出售英镑期货

如果即期英镑在 4 月份到 10 月份期间贬值，那么该跨国公司在即期市场将蒙受损失。但是，由于即期英镑的贬值通常伴随着期货价格的下跌，所以这时通过对英镑期货空头头寸平仓，公司将获得利润。当然，这两种对冲策略都涉及基点差风险：如果美国或其他国家（即英国或瑞士）的利率有剧烈的变动，那么 F 和 S 将不再同步变化，这时候对冲的效果会比预期差得多。

4.4 货币期货合约定价

我们已经学习了根据抛补利率平价的无套利条件对远期合约进行定价。抛补套利涉及以 r_d 的利率借入本国货币，再以即期汇率 S 转换为外汇，然后以 r_f 的利率投资外汇，最后通过在汇率 F 上卖一个外汇远期来创造一组无风险交易。根据单利得出的无套利远期汇率（即远期合约的价格）为

$$F=S\,\frac{(1+r_d T)}{(1+r_f T)} \tag{4.15}$$

上述公式中，S 和 F 是以“本国货币兑每单位外国货币”来衡量的；另外我们加入了时间跨度 T（以年或 1 年的分数来表示）。CIP 与期货定价里面的**持有成本**（carrying cost）方法类似。融资成本等于国内利率 r_d，（负的）储存成本可以被理解为（减去）外国利率 r_f。货币期货的经纪人佣金非常少。

因此，如果我们转换为连续复利计算，那么持有成本（CC）就是利率的微分：

$$CC = r_d^c - r_f^c \tag{4.16}$$

利用持有成本模型，有

$$F = Se^{(r_d^c - r_f^c)T} \tag{4.17}$$

把英镑作为本币，美元作为外币，并假设英国利率高于美国的利率（即 $r_{UK} > r_{US}$），但是 $F = S$。基于这些假设，美国居民就会购买英镑资产，因为在年底的时候，他们会获得美元的无风险利润。但这不是一个均衡头寸（或者说市场有效）。为了恢复零套利利润条件，美国居民在年底的时候（与年初相比）每英镑就只能兑换较少的美元。每个英镑兑换较少的美元，意味着在远期市场每个美元将兑换较多的英镑，因此 $F > S$。这正和公式（4.17）相吻合，因为 $r_{UK} > r_{US}$，并且 $F > S$，意味着与即期市场相比，在远期市场上每个美元能够兑换更多的英镑。因此，在远期市场，美元以溢价出售（兑换英镑）。

公式（4.17）利用了连续复利计算，我们可以写出使用单利的 CIP 的通常形式。于是从公式（4.17）我们得到

$$Fe^{r_f^c T} = Se^{r_d^c T} \tag{4.18}$$

令 $T = m/365$，其中，m 是距离到期日的天数。我们又假设两个利率都是根据“实际天数/365”来衡量的（否则，需要用 $m/360$ 来计量其中一个或两个货币市场）。那么根据连续复利的定义，我们有

$$e^{r_d^c T} \equiv [1 + r_d T] \tag{4.19}$$

从公式(4.18)和(4.19)，我们得到了通常的 CIP 关系：

$$F[1 + r_f T] = S[1 + r_d T] \tag{4.20}$$

这和公式(4.15)是相同的。从公式(4.20)我们很容易看出，如果利率保持为常数，F 和 S 几乎是同步变动的。

抛补套利：远期和期货

在到期（或交割）之前，一个远期合约的交易不涉及资金的转手，因此，远期合约所用的汇率在合约签订之初就被锁定了。如果期货合约被持有至到期日，那么上述说法对于期货合约也是适用的。但是，即使都是被持有至到期日，远期和期货也还是有一点微小的差别。为了能在 F 上升时将收益存进保证金账户，在 F 下跌时进行保证金催付，期货合约是每日盯市的。在期货合约签订之初并不知道保证金付款所适用的利率。再投资利率造成了期货合约中的基点差风险，但是其大小是不确定的。如果在持有合约期间利率是一个常数，那么利用期货锁定的有效外汇汇率就可以进行很好的预测，但是也不能完全依赖这种预测。如果利率发生了变动，合约在到期日前就被平仓了，那么由于即期外汇汇率和期货价格之间并不具备完美的相关性，于是就产生了基点差风险。然而，对于所有的实际目的而言，再投资的基点差风险：

$$b=S-F=S[1-e^{(r_d^c-r_f^c)T}] \tag{4.21}$$

通常都不能大到足以明显区别货币期货和货币远期的程度（Park 和 Chen，1985）。

值得一提的是，利用持有成本决定期货价格要假定卖空是可能的。在 $t=0$ 时刻，投资者创造一个合成远期/期货合约的时候，她并没有动用自有资金。因此，我们假定了投资者可以通过卖空短期国债或商业票据（也可以通过欧洲共同市场借入资金），以 r_d 的国内利率借入资金。

当利用期货合约对冲一个即期货币市场的头寸时，我们很容易看到基点差风险的来源。如果在对冲期间，利率差（r_d-r_f）保持为一个常数，那么 F 和 S 将会完全相关，并且基点差“b”就是可以预测的。在对冲期间，（r_d-r_f）的变化越大，对冲的头寸也就越不确定。

4.5 本章摘要

- 货币远期是一**种场外**（OTC）交易的合约，它可以在合约规模、交割日期、币种方面为代理商量身定制。
- 可以利用即期汇率和两个货币市场利率来“创造”一份真实的远期合约的现金流，这就是所谓的“**合成远期**”。无风险套利能够保证真实远期汇率等于合成远期的汇率。这就是**抛补利率平价**（CIP）条件。
- **货币远期**可以被用于对冲和投机，尽管两种交易都要求远期合约在它的到期日执行。
- **货币期货**和货币远期相似，主要区别在于期货可以在到期日（交割日）前很容易地平仓。
- 在知道未来外汇收入或支出（即交易头寸暴露）的情况下，**货币期货**提供了一种低成本的对冲方法。实际上由于保证金的应用，货币期货是没有信用风险的。
- 由于国内或国外利率在对冲期间内可能发生变化，所以当在到期日前进行平仓的时候，就会产生期货合约的**基点差风险**。
- **期货价格**可以通过**持有成本方法**（等价于**抛补利率平价条件**）来确定。进行了抛补的期货合约交易存在一些风险，因为在交易开始，保证金催付所适用的利率是不确定的。然而，在现实中远期合约的价格和期货合约的价格相差甚微。
- **利用货币期货进行投机**比利用即期外汇市场进行投机拥有更大的杠杆效应，因为为取得一种货币的开放头寸，交易所只要求初始保证金的支付。

章末练习

1. 什么是抛补利率平价（CIP）条件？什么决定 CIP 条件在任一时点是否成立？

2. 假定 10 月 15 日，即期汇率为 0.85 美元/欧元，交割日为 12 月 15 日的远期汇率为 0.853 美元/欧元。请问欧元兑美元是远期升水还是远期贴水？市场对于 10 月到 12 月间即期汇率的变化情况是持什么样的观点？

3. 对于一个 6 个月后将要从瑞士进口货物的美国公司来说，它应怎样利用期货市场进行对冲？

4. 假设美国 6 个月期的利率为每年 10%（连续复利），英国 6 个月期的利率为每年 5%。即期汇率 $S=2$ 美元/英镑。如果抛补利率平价条件成立，那么，英镑兑美元是远期升水还是远期贴水？升/贴水的幅度是多少？请解释原因。另外，市场是远期升水还是远期贴水？

5. 瑞士法郎（CHF）的即期价格是 0.65 美元/瑞士法郎，两个月期期货价格为 0.66 美元。两个月期利率在瑞士和美国分别为每年 2%和 8%（连续复利）。请问是否存在套利机会？

6. 假设你是一家美国跨国公司的财务主管。6 月 27 日，你得知你的英国子公司在 9 月 28 日会往纽约转一笔 1 000 万英镑的款项。你决定利用 IMM（CME）的期货合约对冲这个头寸。6 月 27 日时即期汇率和期货价格分别为：

$S_0=1.363\,0$ 美元/英镑　　$F_0=1.375\,0$ 美元/英镑

9 月 28 日汇率为：

$S_1=1.237\,5$ 美元/英镑　　$F_1=1.238\,0$ 美元/英镑

(a) 你会选择期货合约的哪一种（9 月，10 月，12 月）到期日？

(b) 你是选择做英镑期货的多头还是空头？你会购买/出售几份期货合约？（一份英镑期货合约的合约规模是 62 500 英镑。）

(c) 9 月 28 日进行对冲和不进行对冲的结果分别怎样？

(d) 最初的基点差和最终的基点差分别为多少？这意味着什么？

7. 英国一家制衣公司的财务主管预计 3 个月后会收到一位慕尼黑客户出口毛织品的款项。她的销售部门已经售出 1 000 件“100%羊毛成分”的衣服，每件价格为 250 欧元。在 6 月 10 日的《金融时报》上她读到了下面的数字：

即期外汇汇率	0.850 欧元/英镑
3 个月远期外汇汇率	0.853 欧元/英镑
英镑 3 个月期利率(转换为年率)	$r=5(9/16)(=0.055\,625)$
欧元 3 个月期利率(转换为年率)	$r^*=7(1/16)(=0.076\,25)$

(a) 利用上述数据，请解释该财务主管应怎样对冲她的欧元应收款：

(1) 利用远期合约进行抛补；

(2) 利用货币市场进行抛补。

(b) 如果这个财务主管采取了一种未抛补（开放）头寸，当 3 个月后即期汇率发生下述变化时，她收到的英镑数量将分别为多少？

(1) 0.653 欧元/英镑；

(2) 0.658 欧元/英镑；

(3) 0.640 欧元/英镑。

在每种情况中，请将对冲的结果与不抛补的结果进行比较。

(c) 请问 6 月 15 日市场上现行的一套利率和汇率与抛补利率平价相一致吗？如果不一致，请解释在相关市场中均衡关系是怎样建立起来的。

附录 4.1　利用期货进行对冲的数学原理

外汇期货

本附录将本章中对冲的例子用代数的形式表达了出来。对冲可以用两种方式（并不等价）来理解。首先，它可以被理解为试图固定最终支付的美元数（在 $t=1$ 的时候）。在这种情形下，我们将会看到对冲在对冲操作开始的时候就可以把汇率“锁定”在一个接近期货价格 F_0 的水平。其次，对冲的目的可以被理解为使外汇头寸成本或收益的变化幅度最小化。

考虑一个将来有 500 000 瑞士法郎应付款（即拥有外汇债务）的美国进口商。如果瑞士法郎升值，那么她付出的美元数就会增加。由于 F 和 S 是正相关的，所以美国进口商应该做瑞士法郎期货的多头（购买）。我们将会用到下述记号：

TVS_0 = 即期市场外汇头寸的价值（= 500 000 瑞士法郎）
S_0 = 即期汇率（= 0.647 0 美元/瑞士法郎）
TVS_0 美元 = $(\mathrm{TVS}_0)S_0$ = 即期市场美元头寸的价值
z_f = 合约规模（= 125 000 瑞士法郎）
V_1 美元 = 对冲结束时付出的美元数

情形 A：基于外币（即瑞士法郎）的对冲比率

方法 1

$$N_f=\frac{\mathrm{TVS}_0}{z_f}=4\ (\text{份合约})\qquad (\text{注意，}\mathrm{TVS}_0\text{ 和 }z_f\text{ 是以瑞士法郎标示的})\tag{A4.1}$$

有效美元成本 = 即期市场美元成本 − 期货空头头寸的美元收益

$$V_1\ \text{美元}=S_1(\mathrm{TVS}_0)-N_f z_f(F_1-F_0)$$

因为 $\mathrm{TVS}_0=N_f z_f$，所以

$$V_1\ \text{美元}=\mathrm{TVS}_0[(S_1-F_1)+F_0]=\mathrm{TVS}_0[b_1+F_0]\tag{A4.2}$$

因此，如果基点差 $b_1=(S_1-F_1)$ 很小，那么对冲操作就把期货价格锁定在了 F_0。这种解释对冲的方式并非模棱两可。但是，许多从业者认为期货对冲抵消了即期市场的任何变动风险（尽管不能将价格锁定在 S_0）。所以现在我们来看一看进口货物美元成本的变动情况。利用 $S_1=S_0+\Delta S$ 和 $N_f=\dfrac{\mathrm{TVS}_0}{z_f}$，在公式（A4.2）中我们得到

$$V_1\ \text{美元}=(S_0+\Delta S)\mathrm{TVS}_0-\mathrm{TVS}_0(\Delta F)=S_0(\mathrm{TVS}_0)+\mathrm{TVS}_0(\Delta S-\Delta F)\tag{A4.3}$$

初始美元成本为 V_0 美元 $=(\mathrm{TVS}_0)S_0$，因此最终美元成本的增加额为

$$V_1\ \text{美元}-V_0\ \text{美元}=\mathrm{TVS}_0(\Delta S-\Delta F)\tag{A4.4}$$

如果 ΔS 总是等于 ΔF，那么 ΔS 对相对于 ΔF 的绝对变化进行回归得出的“β”将是 1。（如果 ΔS 和 ΔF 的方差相等并且它们的相关系数为 $+1$，那么后者的情况将会发生。）在这样的情况下，对冲操作不会使进口货物的美元成本有任何变化。但是事实上，这种情形不一定总是发生。

情形 B：基于本币（即美元）的对冲比率

现在让我们利用第二种对冲比率重复上面的过程。

方法 2

$$N_f = \frac{\mathrm{TVS}_0 \text{ 美元}}{\mathrm{FVF}_0 \text{ 美元}} = \frac{\mathrm{TVS}_0(S_0)}{z_f F_0} = 3.98\text{（份合约）} \tag{A4.5}$$

进口货物的最终美元成本为

$$V_1 \text{ 美元} = (\mathrm{TVS}_0)S_1 - N_f(\Delta F)z_f \tag{A4.6}$$

代入 N_f，得

$$V_1 \text{ 美元} = \mathrm{TVS}_0(S_0 + \Delta S) - \mathrm{TVS}_0(S_0)(\Delta F/F_0) = S_0(\mathrm{TVS}_0) + S_0(\mathrm{TVS}_0)\left[\frac{\Delta S}{S_0} - \frac{\Delta F}{F_0}\right] \tag{A4.7}$$

因此，如果 F 和 S 成比例地变化，在这种对冲比率下最终美元成本就会接近于 $t=0$ 时刻的成本（即 $S_0\mathrm{TVS}_0$）。

现在我们来看成本的增加值：

$$V_1 \text{ 美元} - V_0 \text{ 美元} = S_0(\mathrm{TVS}_0)\left[\frac{\Delta S}{S_0} - \frac{\Delta F}{F_0}\right] \tag{A4.8}$$

这和情形 A 非常相似，但是如果 F 和 S 的变化比例相同，那么对冲头寸的成本就没有增加（以美元）。显然，如果 $F_0 = S_0$，那么两种对冲比率给出的结果是非常接近的。

注意，如果 $F_0 = S_0$，那么最终支付的美元数 V_1 美元和美元金额的变化在 A 和 B 两种情形下是相同的。另外，对冲的效果取决于 ΔF 的绝对变化是否等于 ΔS 的绝对变化，或者它们的百分比变化是否大致相同。期货价格（利用连续复利）由下式给出：

$$F = S\mathrm{e}^{(r_d - r_f)(T-t)} \tag{A4.9}$$

或者把公式（A4.9）两边取对数后得到

$$\ln(F) - \ln(S) = (r_d - r_f)(T-t) \tag{A4.10}$$

其中，$(T-t)$ 是距离到期日的时间。如果利率是常数，S 和 F 在对冲期间内只有很小幅度的变动，那么

$$\Delta(\ln F) - \Delta(\ln S) \approx \left[\frac{\Delta S}{S_0} - \frac{\Delta F}{F_0}\right] = (r_d - r_f)(-\Delta t) \tag{A4.11}$$

因此，可以认为如果对冲期间很短，以至于 Δt 很小，利率变为常数的时候，F 的百分比变化等于 S 的百分比变化（而不是这些变量的绝对变化）。于是情形 B 的对冲比率就显得更为恰当。

然而实际中，用情形 A 和情形 B 来计算 N_f 得出的结果几乎没有差别，因为 S_0 和 F_0 通常情况下都非常接近，以至于比例变化和绝对变化非常类似。在任何情况下，基点差风险（即对冲期间内利率的变化）都有可能发生，这导致了两种对冲比率中误差的存在。

第5章

短期利率期货

学习目标

- 讨论3月期英镑、3月期欧洲美元和美国短期国债期货合约的合约规范、结算程序和报纸行情。
- 考察利率期货在投机和对冲中的应用，包括对价格敏感对冲率(price sensitivity hedge ratio)的计算。
- 讨论欧洲美元滚动和叠期对冲(Eurodollar stack and strip hedge)的相对优点，它可以用来对冲一系列未来利息的支出或收入。
- 考察对于短期国债期货使用隐含回购利率(implied repo rate)套利的策略。
- 考察使用期货进行投机性价差交易(speculative spread trade)，它期望从收益率曲线“拱起”中获利，而同时又能对冲所有利率的普遍上升或下降。

20 世纪 70 年代后期和 80 年代前期，市场利率波动加剧，利率期货开始变得重要起来。这一部分归因于较高的通货膨胀和央行通过调节利率而控制货币供应和汇率的结果，另外则是一些政府拖延偿付外债利息甚至拒绝偿还所引起的。

5.1 合约规范

在美国，欧洲美元期货（CME/IMM）是交易最活跃的期货合约之一，比欧洲日元期货和美国短期国债期货更加流行。表 5—1 列出了 3 月期的英镑期货（LIFFE）、欧洲美元期货（CME/IMM）和美国短期国债期货的合约规范。（其他利率期货的合约规范将在后文涉及。）

表 5—1 **期货合约规范**

	3 月期英镑期货（LIFFE）	A. 90 天欧洲美元（IMM） B. 美国短期国债（IMM）
交易单位	500 000 英镑	100 万美元
交割月份	3 月/6 月/9 月/12 月	3 月/6 月/9 月/12 月
报价方式	（100－期货利率% p. a.）	欧洲美元：IMM 指数＝100－期货收益率 短期国债：IMM 指数＝100－期货贴现率
刻度大小（价值）	0.01（12.50 英镑）	二者皆为 1bp（25 美元）
结算	现金结算	欧洲美元：现金结算 短期国债：90 至 92 天短期国债
最后交易日	交割月份的第 3 个星期三的上午 11 点	欧洲美元：交割月份的第 3 个星期三之前的第 2 个工作日 短期国债："新"短期国债发行日的前一个工作日
第 1 交割日	最后交易日后的第 1 个工作日	欧洲美元：在最后交易日进行现金结算 短期国债：交割月份的第 1 个工作日

注释：(1) 对于投机者的保证金要求高于对对冲者和持有价差者的要求。保证金变化频繁。

(2) 没有每日价格限幅。IMM 的交易时间是中部时间 7：20am～2：00pm。

美国短期国债期货

毫无疑问，美国短期国债期货合约的标的资产是美国的短期国债。通常为 91 天期折价销售的短期国债（报价基于"实际天数/360"，参考 Cuthbertson and Nitzsche，2001）。例如，持有一个 90 天期的短期国债至到期日，面值为 100 美元，贴现率的报价 $d=8\%$。那么，由下式可知其市场价格为 98 美元：

$$P=100\left[1-\left(\frac{d}{100}\right)\left(\frac{90}{360}\right)\right] \tag{5.1}$$

其非连续复利的形式为

$$y_{TB}=(100\text{ 美元}/98\text{ 美元})^{365/90}-1=0.08538\quad(\text{每年 }8.538\%)\tag{5.2}$$

现在，我们开始研究 IMM 的短期国债期货合约。期货合约允许交割 90 天、91 天或 92 天期的短期国债，但是期货的价格是基于 90 天期的短期国债。合约规模为 100 万美元。期货合约中有期货贴现率 d_f，指数价格 Q_f 和期货价格 F，这些参数也许有点令人混淆，它们之间都是相互关联的。如果一个期货合约中的贴现率 d_f 的报价为 8%，那么（IMM 或 CME 的）指数报价 $Q_f=92$（$=100$ 美元-8 美元），由此可以看出

$$\text{指数报价 }Q_f=100\text{ 美元}-d_f\tag{5.3}$$

很显然，IMM 指数并不是期货合约交易的实际价格。例如，如果 6 月份交割的期货合约的 IMM 指数为 $Q_f=92$，那么它的实际期货价格 F（每 100 美元的面值）可由此求出：

$$\begin{aligned}F&=100-(100-Q_f)(90/360)\\&=100-(100-\text{IMM 指数})/4\end{aligned}\tag{5.4}$$

由此可以看出，对于 $Q_f=92$ 的 6 月份交割的期货合约，其 $F=98$ 美元（每 100 美元），合约规模为 $z=100$ 万美元，那么期货合约的面值或者说票面价格就是

$$FVF_0=z(F_0/100\text{ 美元})=1\,000\,000\text{ 美元}(98\text{ 美元}/100\text{ 美元})=980\,000(\text{美元})\tag{5.5}$$

可以看出，短期国债期货的价格决定方式与现货市场的短期国债的价格决定方式相同。由于 $F=100-(100-Q_f)(90/360)$，我们进行 $Q_f=100$ 美元$-d_f$ 的替换，就可以得到

$$F=100\left[1-\left(\frac{d_f}{100}\right)\left(\frac{90}{360}\right)\right]\tag{5.6}$$

根据上式，对于报价贴现率 d_f 为每年 8% 的期货合约，90 天的贴现率就为 2%，合约的实际价格（每 100 美元的面值）$F=100-2=98$ 美元，这与式（5.4）计算出的数值相同。

《华尔街日报》之所以采用 IMM 指数报价，主要是因为交易者能准确、快捷地判断他们的损益。

> IMM 指数 Q_f（或者贴现率 d_f）发生 1 个基本点的变动，就会引起期货合约价格 25 美元的变动。期货合约的最小变动单位为 1 个基本点，其对应变动价值为 25 美元。

例如，IMM 指数降低 1 个基本点，从 92.00 变为 91.99，新的期货价格变为 $F=97.9975$，期货合约（面值为 100 万美元）的价格为 979 975 美元，下降了 25 美元。同样的道理，根据公式(5.4)，1 个基本点的变化，如($\Delta Q_f=0.01$)会引起 F 值 0.002 5 即($\Delta Q_f/4$)的变化，对于 100 万美元的期货面值，就会产生 25 美元的变化。这种报价方法也保证了买入价总是低于卖出价。

通常交割的是 91 天期的短期国债，但并不限于此，期货合约可以交割 90 天，91 天和 92 天期的短期国债。如果 91 天或 92 天期的短期国债在到期日交割，对于应付的数额 F，只需将公式中的“90”替换为“91”或“92”即可。而且，期货的交割日通常设定为与剩余 90 至 92 天到期

的 365 天短期国债的到期日一致，这样就可以利用流动的现货市场进行交割。期货合约的交割月份为 3 月、6 月、9 月和 12 月，最后交易日为对应发行日期的前一个工作日。合约的有效期可以长至 2 年。交割日可以是最后交易日的下一个工作日，也可以是此后到期月内的任何一个工作日，这些安排暗示着合约往往都在合约期满以前平仓。

报纸行情

基于美国短期国债、欧洲美元和 3 月期英镑的利率期货合约的报纸和交易显示屏报价非常相似，所有的报“价”都是以小数表示的。在 7 月 27 日的《华尔街日报》上，9 月的美国短期国债期货合约的 IMM 报价指数 $Q_t=93.86$，其相应的贴现率报价是 $d_t=6.14\%$。每一合约均基于面值为 100 万美元的 90 天期短期国债。交易的截止日期由 CME 的官方来改变，以使新发行的短期国债可以马上用于到期的期货合约的交割。

3 月期欧洲美元期货

（现货市场的）欧洲美元存款是指存于外国银行或美国银行的国外分支机构的 3 个月期的美元存款。计日惯例是按照实际除以 360 的方式，报价是以收益率（或“附加”）为基础。因此，如果一个 90 天期欧洲美元定期存款的报价收益率是 $y=$每年 12%，那么面值为 1 亿美元的定期存款在 90 天后将变为 103 000 000 美元，即 100 000 000[1+0.12(90/360)]美元，其隐含的复利为 12.74%，即$(103/100)^{365/90}-1=0.127\,4$。

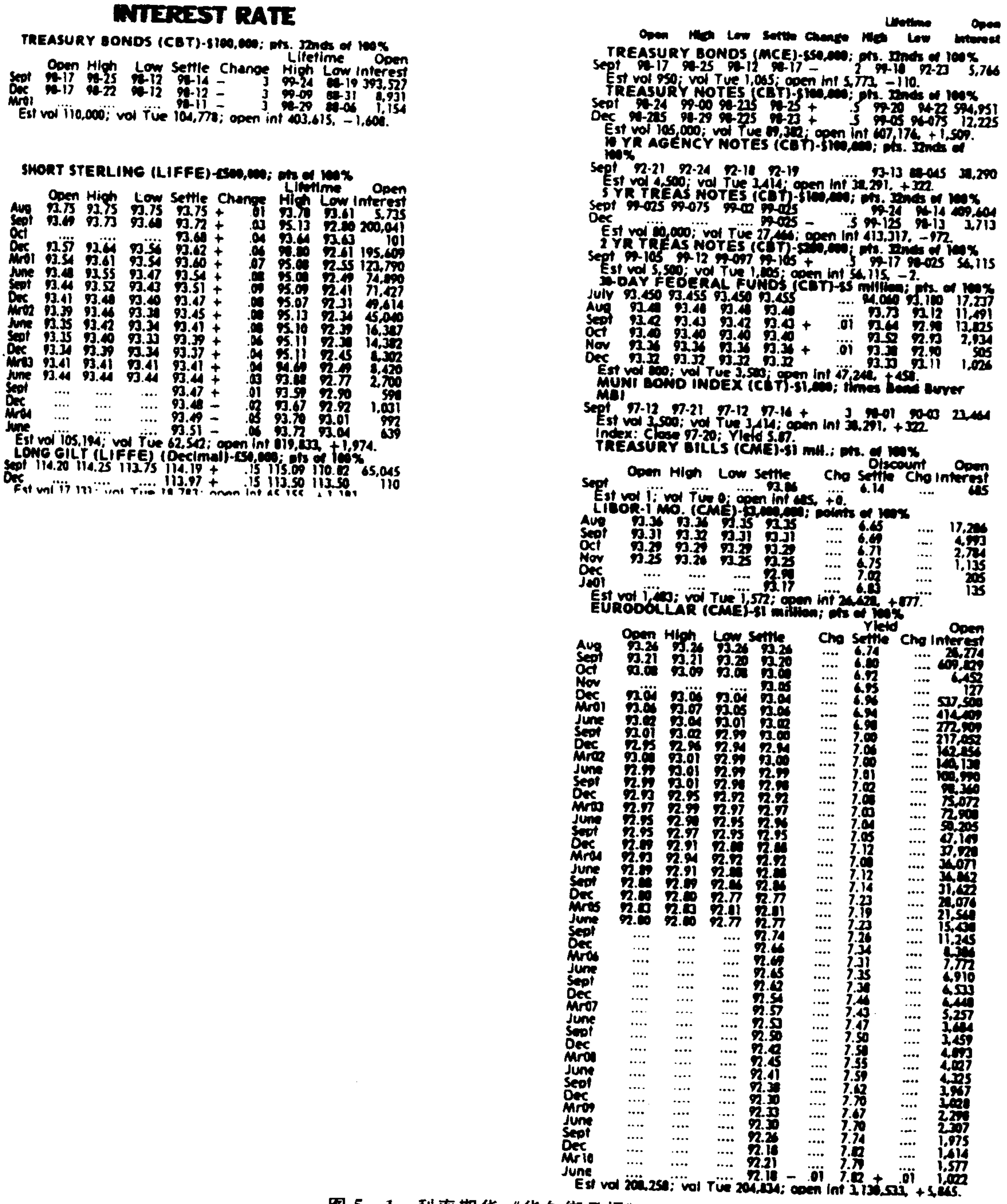
现在我们开始关注标的资产为 3 月期欧洲美元定期存款的期货。由于欧洲美元的定期存款是不可转移的，所以，期货合约都以现金结算。最后交易日的结算是根据伦敦银行同业拆放利率（LIBOR）或 CME 的官方利率进行的。期货合约是基于 3 月期（90 天）欧洲美元 LIBOR 利率，就像公式（5.4）显示的短期国债期货的价格转换机制一样，对于欧洲美元期货，《华尔街日报》上的期货合约 IMM 指数报价 Q_t（见图 5—1）也可以转换成实际的期货价格 F（使用 90/360 方式）。

> **对于合约规模为 100 万美元的欧洲美元期货，IMM 报价指数 Q_t 一个基本点的变动相应会引起期货合约价格 25 美元的变动。报价的结算收益率可由 $y_t=100-Q_t$ 求出。**

如图 5—1 所示，期货的交割月份分别为 3 月、6 月、9 月和 12 月。这种期货广泛应用于对冲，用来规避基于浮动利率的长期银行贷款和存款的风险以及平衡互换交易的浮动净利率头寸，因此其有效期可以延续至 10 年。另一种常用的工具是基于 30 天期存款的欧洲美元期货。

3 月期英镑期货

这一期货的标的资产是 3 月期的英镑存款，期货合约的面值为 500 000 英镑，有效期可以延续至 4 年。如图 5—1 所示的“Open interest”一项中所示，近期的合约交易异常活跃。期货价格



INTEREST RATE

TREASURY BONDS (CBT)-$100,000; pts. 32nds of 100%

						Lifetime		Open
	Open	High	Low	Settle	Change	High	Low	Interest
Sept	98-17	98-25	98-12	98-14	– 3	99-24	88-19	393,527
Dec	98-17	98-22	98-12	98-12	– 3	99-09	88-31	8,931
Mr01	....	....	....	98-11	– 3	98-29	88-06	1,154

Est vol 110,000; vol Tue 104,778; open int 403,615, –1,608.

SHORT STERLING (LIFFE)-£500,000; pts of 100%

						Lifetime		Open
	Open	High	Low	Settle	Change	High	Low	Interest
Aug	93.75	93.75	93.75	93.75	+ .01	93.78	93.61	5,735
Sept	93.69	93.73	93.68	93.72	+ .03	95.13	92.80	200,041
Oct	....	....	....	93.68	+ .04	93.64	93.63	101
Dec	93.57	93.64	93.56	93.62	+ .06	98.80	92.61	195,609
Mr01	93.54	93.61	93.54	93.60	+ .07	95.08	92.55	123,790
June	93.48	93.55	93.47	93.54	+ .08	95.00	92.49	74,890
Sept	93.44	93.52	93.43	93.51	+ .09	95.09	92.41	71,427
Dec	93.41	93.48	93.40	93.47	+ .08	95.07	92.31	49,614
Mr02	93.39	93.46	93.38	93.45	+ .08	95.13	92.34	45,040
June	93.35	93.42	93.34	93.41	+ .08	95.10	92.39	16,387
Sept	93.35	93.40	93.33	93.39	+ .06	95.11	92.38	14,382
Dec	93.34	93.39	93.34	93.37	+ .04	95.11	92.45	8,302
Mr03	93.41	93.41	93.41	93.41	+ .04	94.69	92.49	8,420
June	93.44	93.44	93.44	93.44	+ .03	93.88	92.77	2,700
Sept	....	....	....	93.47	+ .01	93.59	92.90	598
Dec	....	....	....	93.48	– .02	93.67	92.92	1,031
Mr04	....	....	....	93.49	– .05	93.70	93.01	992
June	....	....	....	93.51	– .06	93.72	93.04	639

Est vol 105,194; vol Tue 62,542; open int 819,833, +1,974.

LONG GILT (LIFFE) (Decimal)-£50,000; pts of 100%

Sept	114.20	114.25	113.75	114.19	+ .15	115.09	110.82	65,045
Dec	....	....	....	113.97	+ .15	113.50	113.50	110

Est vol 17,131; vol Tue 18,783; open int 65,155, +1,181.

						Lifetime		Open
	Open	High	Low	Settle	Change	High	Low	Interest

TREASURY BONDS (MCE)-$50,000; pts. 32nds of 100%

Sept	98-17	98-25	98-12	98-17	– 2	99-10	92-23	5,766

Est vol 950; vol Tue 1,065; open int 5,773, –110.

TREASURY NOTES (CBT)-$100,000; pts. 32nds of 100%

Sept	98-24	99-00	98-235	98-25	+ .5	99-20	94-22	594,951
Dec	98-285	98-29	98-225	98-23	+ .5	99-05	96-075	12,225

Est vol 105,000; vol Tue 89,382; open int 607,176, +1,509.

10 YR AGENCY NOTES (CBT)-$100,000; pts. 32nds of 100%

Sept	92-21	92-24	92-18	92-19	....	93-13	88-045	38,290

Est vol 4,500; vol Tue 3,414; open int 38,291, +322.

5 YR TREAS NOTES (CBT)-$100,000; pts. 32nds of 100%

Sept	99-025	99-075	99-02	99-025	....	99-24	96-14	409,604
Dec	....	....	....	99-025	– .5	99-125	98-13	3,713

Est vol 80,000; vol Tue 27,466; open int 413,317, –972.

2 YR TREAS NOTES (CBT)-$200,000; pts. 32nds of 100%

Sept	99-105	99-12	99-097	99-105	+ .5	99-17	98-025	56,115

Est vol 5,500; vol Tue 1,805; open int 56,115, –2.

30-DAY FEDERAL FUNDS (CBT)-$5 million; pts. of 100%

July	93.450	93.455	93.450	93.455	....	94.060	93.180	17,237
Aug	93.48	93.48	93.48	93.48	....	93.73	93.12	11,491
Sept	93.42	93.43	93.42	93.43	+ .01	93.64	92.98	13,825
Oct	93.40	93.40	93.40	93.40	....	93.52	92.93	2,934
Nov	93.36	93.36	93.36	93.36	+ .01	93.38	92.90	505
Dec	93.32	93.32	93.32	93.32	....	93.33	93.11	1,026

Est vol 800; vol Tue 3,580; open int 47,248, +458.

MUNI BOND INDEX (CBT)-$1,000; times Bond Buyer MBI

Sept	97-12	97-21	97-12	97-16	+ 3	98-01	90-03	23,464

Est vol 3,500; vol Tue 3,414; open int 38,291, +322.
Index: Close 97-20; Yield 5.87.

TREASURY BILLS (CME)-$1 mil.; pts. of 100%

						Discount		Open
	Open	High	Low	Settle	Chg	Settle	Chg	Interest
Sept	....	....	....	93.86	....	6.14	....	685

Est vol 1; vol Tue 0; open int 685, +0.

LIBOR-1 MO. (CME)-$3,000,000; points of 100%

Aug	93.36	93.36	93.35	93.35	....	6.65	....	17,286
Sept	93.31	93.32	93.31	93.31	....	6.69	....	4,993
Oct	93.29	93.29	93.29	93.29	....	6.71	....	2,784
Nov	93.25	93.26	93.25	93.25	....	6.75	....	1,135
Dec	....	....	....	92.98	....	7.02	....	205
Ja01	....	....	....	93.17	....	6.83	....	135

Est vol 1,483; vol Tue 1,572; open int 26,428, +877.

EURODOLLAR (CME)-$1 million; pts of 100%

						Yield		Open
	Open	High	Low	Settle	Chg	Settle	Chg	Interest
Aug	93.26	93.26	93.26	93.26	....	6.74	....	28,274
Sept	93.21	93.21	93.20	93.20	....	6.80	....	609,829
Oct	93.08	93.09	93.08	93.08	....	6.92	....	6,452
Nov	....	....	....	93.05	....	6.95	....	127
Dec	93.04	93.06	93.04	93.04	....	6.96	....	537,508
Mr01	93.06	93.07	93.05	93.06	....	6.94	....	414,409
June	93.02	93.04	93.01	93.02	....	6.98	....	272,909
Sept	93.01	93.02	92.99	93.00	....	7.00	....	217,052
Dec	92.95	92.96	92.94	92.94	....	7.06	....	162,856
Mr02	93.00	93.01	92.99	93.00	....	7.00	....	140,138
June	92.99	93.01	92.99	92.99	....	7.01	....	100,990
Sept	92.99	93.01	92.98	92.98	....	7.02	....	98,360
Dec	92.93	92.95	92.92	92.92	....	7.08	....	75,072
Mr03	92.97	92.99	92.97	92.97	....	7.03	....	72,908
June	92.95	92.98	92.95	92.96	....	7.04	....	50,205
Sept	92.95	92.97	92.95	92.95	....	7.05	....	47,149
Dec	92.89	92.91	92.88	92.88	....	7.12	....	37,928
Mr04	92.93	92.94	92.92	92.92	....	7.08	....	36,071
June	92.89	92.91	92.88	92.88	....	7.12	....	34,862
Sept	92.88	92.89	92.86	92.86	....	7.14	....	31,622
Dec	92.80	92.80	92.77	92.77	....	7.23	....	28,076
Mr05	92.83	92.83	92.81	92.81	....	7.19	....	21,548
June	92.80	92.80	92.77	92.77	....	7.23	....	15,438
Sept	....	....	....	92.74	....	7.26	....	11,245
Dec	....	....	....	92.66	....	7.34	....	8,386
Mr06	....	....	....	92.69	....	7.31	....	7,772
June	....	....	....	92.65	....	7.35	....	6,910
Sept	....	....	....	92.62	....	7.38	....	6,533
Dec	....	....	....	92.54	....	7.46	....	6,448
Mr07	....	....	....	92.57	....	7.43	....	5,257
June	....	....	....	92.53	....	7.47	....	3,684
Sept	....	....	....	92.50	....	7.50	....	3,459
Dec	....	....	....	92.42	....	7.58	....	4,893
Mr08	....	....	....	92.45	....	7.55	....	4,027
June	....	....	....	92.41	....	7.59	....	4,325
Sept	....	....	....	92.38	....	7.62	....	3,967
Dec	....	....	....	92.30	....	7.70	....	3,028
Mr09	....	....	....	92.33	....	7.67	....	2,298
June	....	....	....	92.30	....	7.70	....	2,307
Sept	....	....	....	92.26	....	7.74	....	1,975
Dec	....	....	....	92.18	....	7.82	....	1,614
Mr10	....	....	....	92.21	....	7.79	....	1,577
June	....	....	....	92.18	– .01	7.82	+ .01	1,022

Est vol 208,258; vol Tue 204,834; open int 3,130,533, +5,845.

图 5—1　利率期货《华尔街日报》

经《华尔街日报》允许后复制。

可以用下式表示：

$$F=(100-\text{每年期货报价利率}\%)=100-f \tag{5.7}$$

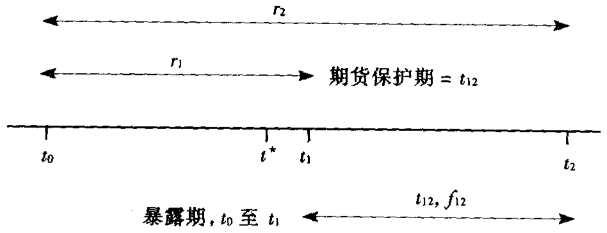
年利率 1 个基本点的变化相当于 3 月期利率 0.25 个基本点的变化，由此可知 $\Delta F=0.0025$，

对于面值为 500 000 英镑的期货合约，就相当于 12.50 英镑的变动。

最小刻度值是 1 个基本点（0.01%），对于合约规模为 500 000 英镑的（3 月期）英镑期货空头，相应的刻度价值为 12.50 英镑。

从公式（5.7）可以看出，对于所有的利率期货合约，期货价格 F 与期货利率呈反向变动的关系。另一个重要的特征就是期货合约交割的资产，都是在交割之后的某个时候到期。这一点可以从图 5—2 所示的美国短期国债期货多头看出。该期货在 t_1 时刻到期并交割 90 天期的美国短期国债，事实上，短期国债于 $t_2=t_1+(90/360)$ 到期。对于 3 月期英镑期货来说，标的资产是名义的 3 月期英镑存款，在期货合约的到期日 t_1 交割，那么它名义上的到期日就是 t_2。期货利率 f_{12} 从何而来呢？我们可以通过研究 3 月期英镑期货合约解释这点。无风险套利保证以 r_2 的利率将 1 美元投资 2 年，其效果必然等同于先将 1 美元按 r_1 的利率投资 1 年，然后继续再按 $t=1$ 和 $t=2$ 之间的远期利率投资 1 年（参考 Cuthbertson 和 Nitzsche，2001），这一远期利率在 $t=0$ 时刻就已经确定：

$$(1+r_1t_1)(1+f_{12}t_{12})=(1+r_2t_2) \tag{5.8}$$



t_1 = 期货合约的到期日

图 5—2　利率期货合约

在这里，r_1 和 r_2 是用单利表示的即期利率，t 是用年表示的时间。因此

$$f_{12}=\frac{1}{t_{12}}\frac{(r_2t_2-r_1t_1)}{(1+r_1t_1)}\approx\frac{t_2}{t_{12}}r_2-\frac{t_1}{t_{12}}r_1 \quad 其中 \quad t_{12}=t_2-t_1 \tag{5.9}$$

在上式中，我们假设 $t=0$ 时，期货的交易日与货币市场的存款估值日相同（但这通常需要两天时间才能完成），t_1 时的期货交割日与存于 t_1 至 t_2 时间段的存款的到期日相同，而事实上也会有两天的差距。考虑到这些现实的因素，往往会将问题复杂化。

我们注意到，尽管期货合约将逐渐逼近交割日期（例如在 t^* 点），但时间段 t_{12} 在整个合约的有效期内是保持不变的。随着 t_1 和 t_2 的变化，r_1，r_2 随之变动，从而引起 f_{12} 的变动。由于期货合约在 t_1 时刻交割，所以其利率必须等于 t_1 至 t_2 时间段的即期利率。这一利率是基于英国银行家协会结算利率（BBAISR）所确定的最后一个交易日（即交割月份的第 3 个星期三）上午 11 点钟的 3 月期英镑存款利率。交割日的期货价格 F 通常称做交易所交割结算价格（ESDP），交割日是最后交易日过后的第 1 个工作日。由此可以看出，在交割日之前的期货价格 F 并不是由现行即期利率 r_1 决定的，而是由 t_1 至 t_2 之间的远期利率决定的。

5.2　隐含回购利率的套利分析

由于美国短期国债期货交割实际（而不是名义）资产，这就使得在短期国债期货市场和短期国债现货市场进行套利成为可能。我们随后可以看到，这一套利过程其实就是短期国债期货的定价过程。

假设现在（$t=0$ 时），你可以从现货市场上购买 33 天后到期的美国短期国债，你还可以以 F_0 的价格购买短期国债期货合约，该合约在 33 天后交割 90 天期的短期国债。这样，你的两宗交易就相当于购买了一个 123 天期的美国短期国债，也就是说，你已经创造了一个合成的 123 天期的美国短期国债。如果 33 天期的短期国债、123 天期的短期国债以及期货合约没有正确定价，那么就可以进行无风险套利。在现实世界中，这一套利机会用隐含回购利率这一概念来描述，这也是我们需要进一步研究的问题。首先让我们来关注最基础的现购自运套利，该模型中用离散复利所表示的无套利条件是

$$F_{0,T}=S_0(1+r)^T \tag{5.10}$$

其中，S_0 为现货市场价格，$F_{0,T}$为在 T 时交割的期货价格，T 为用整数或小数表示的时间，r 为金融市场的实际利率。如果

$$F_{0,T}>S_0(1+r)^T \tag{5.11}$$

只要“低买高卖”，现购自运套利就有利可图：

- 在 $t=0$ 时，按利率 r 借款，购买现货 S_0，并以价格 $F_{0,T}$卖出期货。
- 在 $t=T$ 时，偿还贷款 $S_0(1+r)^T$，用现货交割期货，得到 $F_{0,T}$。

我们可以看到该套利的净现金流 NPV 是正的。下面我们用另一种方式解释这一模型：在 $t=0$ 时购买现货，在 $t=T$ 时交割得 $F_{0,T}$，除去本身的投资成本，这样我们就可以得到一个用复利表示的总收益率：

$$\hat{r}=(F_{0,T}/S_0)^{1/T}-1 \tag{5.12}$$

$\hat{r}$ 就是隐含回购利率。如果式（5.11）成立，很容易看出这一隐含利率 $\hat{r}>r$。

> **当隐含回购利率 $\hat{r}$ 大于金融市场的实际利率 r 时，**
> **通过购买现货，做空期货就能获得无风险套利。**

采用隐含回购利率类似于采用内部收益率的评价标准。在现购自运套利中，隐含利率就是其内部收益率，只有其超过金融市场的实际利率时，才能保证的正的套利收益。通常用实际的回购利率来表示金融市场的实际利率，因此就相对有了隐含回购利率这一概念。如果

$$F_{0,T}<S_0(1+r)^T\quad \text{这意味着}\quad \hat{r}<r \tag{5.13}$$

反向现购自运套利是有利可图的：

- 在 $t=0$ 时，以 S_0 的价格卖空持有的现货，以利率 r 存入银行，同时以价格 $F_{0,T}$买入期货

（在 $t=0$ 时成本为零）。

- 在 $t=T$ 时，从银行获得 $S_0(1+rT)$，执行期货合约，付出 $F_{0,T}$，标的的现货，可以用来“代替”最初卖空的即期资产。

因此：

> **当实际回购利率 r 超过隐含回购利率 $\hat{r}$ 时，通过卖空现货并按利率 r 投资，购买期货就能获得无风险套利。**

表 5—2 中给出了一个用回购利率进行现购自运套利的例子。期货合约基于美国短期国债，需要交割 90，91 或 92 天期的短期国债。尽管期货价格的报价都是基于 90 天期的短期国债，但如果需要交割 91 天期的短期国债，只需在公式中用 91 代替 90 即可。期货合约的到期日是 33 天，那时可以交割 91 天期的短期国债。因此，你现在就需要购买一个 124 天期的短期国债，以便在 33 天后能交割一个 91 天期的短期国债。现购自运套利中隐含回购利率 $\hat{r}=6.95\%$，超过了实际回购利率 $r=6.04\%$，该利率是在回购中用 33 天期短期国债做抵押所使用的利率。因此做空期货，以相对低价 $r=6.04\%$买入现货将获得正的套利收益。

表 5—2 **隐含回购利率及套利**

数据： 33 天期美国短期国债，贴现率 $d=5.77\%$；
124 天期美国短期国债，贴现率 $d=6\%$；
91 天期短期国债期货，IMM 指数为 94.20，贴现率为 5.8%。

问题： (i) 计算隐含回购利率。
(ii) 是否能获得套利收益？

回答： (i) 124 天期短期国债的价格：$S_0=100$ 美元-6 美元$(124/360)=97.933$（美元）
期货报价：$F_{0,T}=100$ 美元-5.8 美元$(90/360)=98.55$（美元）
上式是用 90 天期短期国债表示的期货价格，由于交割的短期国债是 91 天期的，因此有
期货实际价格：$F_{0,T}=100$ 美元-5.8 美元$(91/360)=98.53$（美元）
隐含回购利率：
$\hat{r}=(F_{0,T}/S_0)^{365/33}-1=0.0695$ （通常用百分比 6.95%表示）
(ii) 33 天期的实际利率是由 33 天期的短期国债收益率来表示的。
33 天期短期国债价格：$P=100$ 美元$-5.77(33/360)$美元$=99.4711$（美元）
收益率：$r_{33}=(100$ 美元$/99.4711$ 美元$)^{365/33}-1=0.0604$ （通常用 6.04%表示）

分析： 隐含回购利率 $\hat{r}=6.95\%$超过了实际利率 $r=6.04\%$，因此，现购自运套利能获得无风险收益，只需买入一份 124 天期短期国债并卖出期货合约。33 天后，124 天期短期国债将成为 91 天期短期国债，用做期货交割。

在实际金融市场中使用实际回购进行现购自运套利常常会涉及一些市场风险。回购市场的很多交易都是隔夜回购，对于超过两周的回购，其流动性很低，因此套利者不得不在期货合约到期之前不断地向前滚动，以达到最终的套利目的。这种基于多重回购所进行的套利的成本要取决于短期回购利率的未来变化。

5.3 对冲：利率期货

下面我们阐述投资者如何利用利率期货对货币市场的资产进行对冲，如美国短期国债、欧洲美元存款以及借款。考虑如下情况：

- 你持有价值 1 000 万美元的 91 天期的美国国债，1 个月后将卖掉国债获取现金支付你的债权人。你担心下个月的利率上升，从而使短期国债的价值降低。在这种情况下，你可以通过卖掉美国短期国债期货合约，来对你的国债头寸进行对冲。
- 你在 6 个月后将收到 1 000 万美元，届时你想投资 90 天期的欧洲美元存款。你担心随后的 6 个月利率将下降，这就意味着你的投资收益将减少。在这种情况下，你可以通过买入欧洲美元期货合约来规避这一风险。
- 你希望在 3 个月后发行价值 1 000 万美元的 6 月期的商业票据，这就相当于筹款。你担心在随后的 3 个月中利率将上升，这样，你的借款成本将增加。在这种情况下，你可以通过卖空短期国债期货合约来对你的借款成本进行对冲。由于没有以商业票据为标的物的期货合约，你不得不使用短期国债期货，这是一个交叉对冲的例子。

当利用利率期货进行对冲时，关键要记住利率、收益率或贴现率下降时，期货的价格将上升，反之亦然。但是，对于具体指哪个利率并不是很精确。为简便起见，我们假设各种到期日的期货利率变化是相同的，这样一来，收益率曲线就会有平行的变化。从公式（5.9）中我们可以看出，如果 $\Delta r_1=\Delta r_2=z\%$，那么这就隐含着 $\Delta f_{12}=z\%$，这样所有的利率都以相同的量变化着，至少近似如此。

利率期货可以用来对基于未来现金流的支出或收入进行对冲。假设 4 月 15 日，一投资者将在 2 个月后的 6 月 15 日收到 100 万英镑，他希望能将这笔钱投资在 3 月期的存款上。从图 5—2 中可以看出，风险暴露期是 2 个月，期货合约中的保护期为 3 个月。假设他担心在随后的 2 个月中，利率将下降，这样在 2 个月后进行的投资所得的利息将减少。如果现货价格和期货价格变化是相同的，那么，如果他利用期货合约的多头进行对冲，他就可以利用期货市场的资本利得来抵消他在 2 个月后的现货市场的低利率所带来的损失。如果他希望购买短期国债，担心利率下降，也就是短期国债价格下降，也可以利用多头对冲。对冲的策略如下：

希望未来购买短期国债或等价地借出现金⇒购买（看多）利率期货合约

同样的道理，如果他想在 2 个月后发行商业票据来筹款，他担心利率上升从而使筹资成本升高。利率的升高就意味着期货价格的下降。如果利率真的上升的话，如果他卖空利率期货，他就可以在 2 个月后在一个较低的价位平衡头寸，这样的话，2 个月后，他在利率期货上的收益至少可以部分地抵消他在现货市场上由于利率上升所引起的筹资成本升高的损失。如果他计划在 2 个月后卖掉短期国债，但是担心利率上升，他同样可以通过做空短期国债期货进行对冲。由此可知：

希望未来发行债券或等价地借入现金⇒卖出（看空）利率期货合约

他应该买入或卖出多少期货合约呢？这种情形很像前面所讨论的股票指数期货。例如，假设投资者持有 $TVS_0=200$ 万美元的短期美国短期国债，他担心利率上升，从而引起价值的降低，那么他应该卖空短期国债期货。“基础”的对冲比率为

$$N_f(\text{“基础”})=\frac{TVS_0}{z}=\frac{2\ 000\ 000\ \text{美元}}{1\ 000\ 000\ \text{美元}}=2(\text{份合约}) \tag{5.14}$$

另外，如果期货合约的面值是 $FVF_0=98\ 000$ 美元$(=zF_0=1\ 000\ 000(98/100))$。那么简单对冲比率为

$$N_f(\text{“简单”})=\frac{TVS_0}{FVF_0}=\frac{2\ 000\ 000\ \text{美元}}{980\ 000\ \text{美元}}=2.04\quad(2\ \text{份合约}) \tag{5.15}$$

这两个对冲比率往往得到相同的结果。

简单的例子：卖空英镑期货合约

为阐述问题，我们考虑一个用英镑期货进行对冲的简单例子。假设 4 月 15 日，一投资者将在 2 个月后的 6 月 15 日获得 100 万英镑，他希望将这笔钱投资在 3 月期的存款上，从下边的叙述可以看出，这正好是期货合约的保护期。如果他担心 2 个月后的 3 月期即期利率将下降，他可以通过购买一个 3 月期英镑期货合约进行对冲。对冲的策略如下所示：

预期未来的现金流入，担心利率下降⇒买入（看多）利率期货合约

期货利率的变化与其隐含的远期利率变化紧密相随。如果所有的即期利率下降，期货利率也会下降，期货价格 F 将上升。如果进行多头对冲，期货的资本利得将抵消 3 个月内在现货市场的低利率损失。为简便起见，我们假设 3 月期的即期利率 r 和远期（期货）利率 f 以相同的绝对数量变动。这样我们就可以得到表 5—3 那样的结果。

表 5—3　　利用卖空英镑期货合约进行简单对冲

	即期利率	期货利率	报价
4 月 15 日（今天）	$r_0=10\%$	$f_0=10.5\%$	$F_0=100-f_0=89.5$
6 月 15 日（对冲结束）	$r_1=8\%$	$f_1=8.5\%$	$F_2=100-f_1=91.5$

分别用 r_0 和 r_1 来表示在 $t=0$ 和 $t=1$ 时的 3 月期即期利率（不是前述的“空头”和“多头”即期利率）。因为我们假设即期利率和期货利率变化的幅度相同，那么所要购买的期货合约数量，即简单对冲比率为

$$N_f(\text{“简单”})=\frac{TVS_0}{FVF_0}=\frac{1\ 000\ 000\ \text{英镑}}{500\ 000\ \text{英镑}\times 0.895}=2.33\quad(\text{即 2 份合约}) \tag{5.16}$$

6 月 15 日的结果如下所述：投资者的存款在货币市场损失 2%(10%−8%)，但是在期货市场上盈利 $f_2-f_1=2\%(=10.5\%-8.5\%)$。由于期货是现金结算的，所以更精确地说，其在多头期

货合约上盈利了 $\Delta F=200$ 个刻度。由此，我们可以得到一个完美的对冲：

在货币市场的损失$=0.02(1/4)(1\,000\,000$ 英镑$)=5\,000$ 英镑
在期货市场的盈利$=2\times(200$ 个刻度$)\times12.50$ 英镑$=5\,000$ 英镑

由于在 4 月 15 日还没有获得那笔资金，投资者就不会将其以 $r_1=10\%$ 的利率投资，因而其在货币市场的损失的计算只是一个技术问题。事实上，投资者能做的事情仅仅是“锁定”在最初的期货利率 f_0 上。我们随后还要讨论这些细小的差别。但由此可以看出，对冲头寸的价值变动（在这里为 0）远比不进行对冲的价值变动（在这里为 5 000 英镑的损失）要小。

价格敏感性（久期）对冲比率

上述的公式没有考虑到下列问题：

- 2 个月后的对冲期限也许是 1 年，远远超过期货合约的标的物资产的 3 个月期限。
- 期货价格和标的资产现货市场的价格并不是“一对一”的。

第一个问题很容易解决。例如，如果 2 个月后的即期暴露风险为 1 年期的银行贷款利率，用 3 月期的期货来进行对冲，我们只需增加到 4 个期货合约就可以了。第二个问题是由于收益率曲线的不平行性造成的，这也使得标的资产即 1 年期银行贷款的利率和 3 月期的期货合约利率变动幅度不一致。但是，我们可以用最小方差对冲比率来分析这两个问题。

我们需要知道标的资产价格和期货价格的变动百分比之间的关系，也就是 β 值。如果现货短期国债价格的变动百分比大于期货价格的变动百分比，那么 β_b 将大于 1，要成功进行对冲就需要更多的期货合约，因此

$$N_f=-\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\beta_0 \tag{5.17}$$

为估计 β_b，我们可以对标的物现货的短期国债价格 S 的变动百分比和期货价格 F 的变动百分比进行回归，得到**价格敏感性对冲比率**。但是，在固定收益市场，我们使用久期来考虑收益率变动并与价格变动相联系。事实上，我们可以在式（5.17）用一个近似的组合久期来替代 β_b，我们就可以得到**基于对冲比率的久期**。利用连续复利表示的久期公式如下：

$$\Delta S/S=-D_s\Delta y_s \tag{5.18a}$$

$$\Delta F/F=-D_f\Delta y_f \tag{5.18b}$$

这里，Δy_s 是标的物的即期利率变动，Δy_f 是远期利率的变动。由此可得

$$\beta_b=\frac{\Delta S/S}{\Delta F/F}=\frac{D_s\Delta y_s}{D_f\Delta y_f} \tag{5.19}$$

基于对冲比率的久期为

$$N_f=-\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\frac{D_s\Delta y_s}{D_f\Delta y_f} \tag{5.20}$$

负号表示现货市场的多头需要期货市场的空头进行对冲。注意，我们仍需要利用回归得到 $\Delta y_s/\Delta y_f$ 的估计值。但是，如果假设收益率曲线是平行的，即 $\Delta y_s=\Delta y_f$，公式（5.20）就变为

$$N_f=-\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\,\frac{D_s}{D_f}\right) \tag{5.21}$$

如果远期利率为 f_{12}，那么 D_s 就是指从期货到期日 $t=1$ 到你希望结束对冲的时间 t_3，t_3 可以大于、小于或等于期货合约的标的资产的到期日 t_2。

交叉对冲

比较复杂一点的是交叉对冲，其所利用的期货合约的标的物并不是你想规避风险的资产。假设一投资者 2 个月后将 100 万英镑投资于 6 月期的英镑 CD，但他希望在随后的 2 个月内，用 3 月期英镑利率期货合约进行对冲。假设现货市场我们有 $\mathrm{FVS}_0=1\ 000\ 000$ 英镑，英镑期货合约的面值 $\mathrm{FVF}_0=500\ 000$ 英镑。6 月期 CD 有 $D_s=0.5$，3 月期期货合约有 $D_f=0.25$。对于具有平行移动的收益率曲线，对冲比率 $N_f=4$ 份合约。但是，对于非平行移动的收益率曲线，我们需要通过回归分析得知 Δy_s 和 Δy_f 之间的联系。例如，如果 $\Delta y_s=0.7\Delta y_f$，也就是说，多头的即期利率的变动小于基于标的资产的空头期货的利率变动，由此我们可得 $N_f=4(0.7)=2.8=3$ 份合约。

美国短期国债期货

就像《华尔街日报》所显示的那样，由于期货的报价与其面值之间的差异，利用美国短期国债期货进行对冲有点复杂。我们的例子是关于交叉对冲的。如图 5—3 所示，假设在 5 月份，X 公司的财务人员期望在 8 月份收到 100 万美元，并希望将其投资于 6 月期的美国短期国债，直到次年 2 月（见图 5—3）。财务人员担心利率下降，这将暗示着其从 8 月开始的投资将获得较少的利息，相当于短期国债的成本将更高。利率的下降意味着价格的上升，所以财务人员**买入短期国债期货**以使在期货上的盈利能补偿其在现货市场投资的损失。该公司利用 9 月份到期的 3 月期国债期货进行对冲，这种期货最接近风险暴露期，但是又超过对冲的时间段，即 5 月至 8 月。这是一个交叉对冲，因为期货合约的标的资产为 3 月期国债，与财务人员想规避风险的标的资产 6 月期国债并不一致。

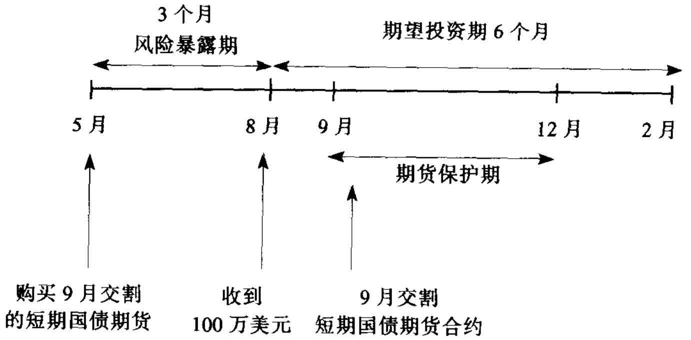


图 5—3　利用美国短期国债期货进行对冲

如果《华尔街日报》上的 9 月到期的短期国债期货合约的 IMM 指数报价 $Q_f=89.2$，那么对于面值为 100 美元来说，其期货价格和期货合约的面值可以从下式求出：

$$F_0=100-(1/4)(100-Q_f)=97.30 \tag{5.22}$$

$$\text{FVF}_0=(1\,000\,000\text{ 美元})(F_0/100)=973\,000(\text{美元}) \tag{5.23}$$

需要购买的期货合约的数量：

假设收益率曲线为平行的，即 $\Delta y_s=\Delta y_f$，价格敏感性对冲利率为

$$N_f=\frac{\text{TVS}_0}{\text{FVF}_0}\,\frac{D_s}{D_f}=\frac{1\,000\,000\text{ 美元}}{973\,000\text{ 美元}}\left(\frac{0.5}{0.25}\right)=2.05\quad(2\text{ 份合约}) \tag{5.24}$$

如表 5—4 所示，5 月份到 8 月份的 6 月期即期利率是下降的，由于该笔资金必须在 8 月投资于当时较低的即期利率，财务人员只能得到 $y_1=9.6\%$的收益率，而不是 $y_0=11\%$的收益率。但是，较低的即期利率暗示着其隐含的 3 月期远期利率也同时下降了，从而期货价格上升。而后者的收益可以弥补前者在现货市场的损失。

表 5—4　　**短期国债期货的交叉对冲**

	现货市场（5 月）（短期国债收益率）	3 月期短期国债期货：9 月交割 CME 指数报价 Q_f	期货价格 F（每 100 美元）	100 万美元期货合约的面值
5 月	y_0(600 万)$=11\%$	$Q_{f,0}=89.2$	97.3	973 000 美元
8 月	y_1(600 万)$=9.6\%$	$Q_{f,1}=90.3$	97.58	975 750 美元
变化	-1.4%	1.10(110 个刻度值)	0.28	2 750 美元(每份合约)

久期：$D_s=0.5$，$D_f=0.25$

需要对冲的数额：100 万美元　　期货合约数量：2 份期货合约

期货头寸的收益

$$=(\text{FVF}_1-\text{FVF}_0)N_f=z[(F_1/100)-(F_0/100)]N_f$$

$$=(975\,750\text{ 美元}-973\,000\text{ 美元})2=1\,000\,000\text{ 美元}(0.975\,75-0.973)2=5\,500(\text{美元})$$

或

期货头寸收益（$\Delta Q=0.01$ 是 1 个刻度，每个刻度的价值为 25 美元）：

110 个刻度×25 美元×2 份期货合约＝5 500（美元）

将此 5 500 美元的收益以 $y_1=9.6\%$的收益率投资 6 个月：

5 500 美元$[1+(0.096/2)]=5\,764$(美元)

6 个月的现货市场损失：($y_0=11\%$，$y_1=9.6\%$)

1 000 000 美元$[0.11-0.096](1/2)=7\,000$(美元)

净损失：对冲头寸

7 000 美元－5 764 美元＝1 236（美元）

如果该公司没有进行对冲，那么净损失将是 7 000 美元，而不是 1 236 美元。另一个衡量对

冲效果的方式是计算对冲后其隐含的利率。期货头寸的收益 5 500 美元，投资 6 个月后为 5 764 美元，那么，对冲后收益：

$$\text{实际利率(单利)}=y_1+\frac{5\ 764\ \text{美元}}{1\ 000\ 000\ \text{美元}}\times 2=0.096+0.011\ 5=0.107\ 5\quad(10.75\%)$$

对冲后的收益率 10.75%明显地大于未进行对冲前的利率 9.6%，并且接近 9 月到期的期货合约的隐含利率 11.1%，即(100/97.3－1)4。对冲并不是完美无缺的，这是由于期货价格和现货价格并不是完全相关的，从而收益率曲线的变动并不是平行的。而且，在讨论上述对冲问题时，还进行了一些简化处理。

- 我们给定现货市场的短期国债**收益率** y，而事实上，通常用**贴现率**报价，收益率需要从贴现率推导出。
- 我们计算收益和损失时用的是单利，而用复利甚至连续复利似乎更加准确，特别是在计算基于对冲的久期公式中我们使用了连续复利。
- 我们用 100 万美元的面值计算收益和损失的基准是现货市场的即期利率 $y_0=11\%$。但是，由于在 $t=0$ 时，那笔资金还没有获得，所以财务人员并不能希望锁定这个利率。在 $t=0$ 时，他只能试图锁定隐含的远期利率 fw，这一利率对应的日期是 8 月到次年 2 月之间的 6 个月，这表明当他购买短期美国短期国债时，希望能达到的基准。

5.4 欧洲美元期货叠期

到期日可延续至 10 年的欧洲美元期货合约是交易最活跃的期货合约之一，这主要是由各种对冲者的需要决定的。较短期限的期货合约流动性会更强些，但是市场上 4 年后到期的期货合约仍有相当大的流动性。拥有基于浮动利率净头寸资产的任何投资者都希望利用欧洲美元期货来进行对冲。我们来考虑下列几种情况：

- 银行 A（或存贷机构）拥有 1 亿美元的固定利率为 11%的贷款，同时有 1 亿美元的基于浮动利率的存款，其利率每 3 个月调整一次，目前的利率为 10%。
- 银行 B 拥有基于 180 天 LIBOR 浮动利率的 1 亿美元的贷款，同时有基于 90 天 LIBOR 浮动利率的 1.1 亿美元的存款。
- 一公司有 5 年期的基于浮动利率的 1 000 万美元的借款，其利率每 3 个月调整一次。
- 一互换交易者同意每 3 个月支付基于 90 天期的 LIBOR 的利息，同时获得基于固定利率为 10%的利息。假设互换仍剩余 8 个利率调整期，其本金为 1 亿美元。

现在考虑上述情况所引发的问题。固定贷款利率 11%，浮动存款利率 10%，银行 A 目前能获得 1%的利差，但是如果存款的利率在将来的升高幅度大于 1%，那么银行将会亏损。银行 B 的存款和贷款都是基于浮动利率的，但是他必须对 1 000 万美元(＝1.1 亿美元－1 亿美元)的净头寸支付浮动利息。因此，其对利率水平的升高以及 180 天期和 90 天期的 LIBOR 利率差都很敏感。

显而易见，拥有基于浮动利率的 1 亿美元借款的公司对利率的上升很敏感。最后，互换交易者的情形与银行 A 相似，如果利率升高，就要支付较高的利息。我们注意到，由于基于浮动利

率的利息是定期调整的，在所有的情形下，当事者都会对一些调整期很敏感。这种情况可以利用欧洲美元期货合约进行对冲。首先，我们必须明确欧洲美元期货的价格 F 与远期利率 f 反向相关，因此：

> 如果你担心现货市场的利率将来会上升，那么可以通过做空 90 天期欧洲美元期货进行对冲。

在现货市场上增加的利息支付将被短期期货头寸的获利所抵消。这是因为，如果现货市场的 90 天期利率上升，那么通常将伴随着整个利率曲线的上升，从而所有的即期利率增加，进一步使得隐含的远期利率上升。但是远期（期货）利率的上升意味着期货价格 F 的下降，从而持有期货合约的空头能获利。

利用欧洲美元期货进行对冲

让我们进一步探讨公司的借款案例。现在是 5 月 1 日，基于浮动利率的 1 000 万美元借款每 30 天调整一次利率，即 6 月一次，7 月一次。但是参考利率是基于每段时期开始时的 90 天期 LIBOR 利率，到 8 月止，该借款有 3 次调整。我们利用 9 月到期的期货进行对冲。目前的 LIBOR 利率 L_0 为 10%，未来的 LIBOR 利率和期货价格在图 5—4 中给出。

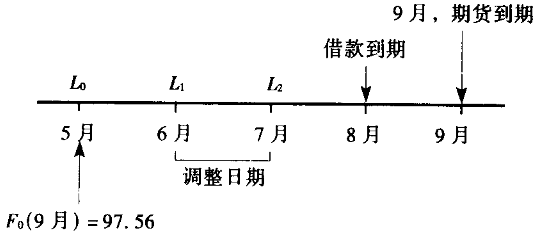


图 5—4　欧洲美元期货对冲

为简便起见，我们假设 $t=0$ 时，利率期限结构是平坦的，这样在 6 月份和 8 月份的 1 月期远期利率都是 10%的单利。美国 LIBOR 的计日习惯用实际天数除以 360 来表示。因此，公司在每月需要支付 $L_0(30/360)\%$。由于 6 月份和 7 月份的远期利率都是每年 10%，复利就锁定在

$$\begin{aligned}\text{年度复利} &= \left[1+0.10\left(\frac{30}{360}\right)\right]^{365/30}-1 \qquad (5.25)\\ &= \left[1+\left(\frac{0.10}{12}\right)\right]^{12.17}-1=0.1062\end{aligned}$$

如表 5—5 所示，LIBOR 的报价（单利）L_i 对应着复利 $y_i=[1+L_i(30/360)]^{365/30}-1$。在 $t=0$时，期货合约有如下特征：

$\text{IMM}_0=90.24$，　　$d_{f0}=9.76\%$

$F_0=97.56$　　$f_0=\left(\dfrac{100}{97.56}\right)^{365/90}-1=10.54\%$

表 5—5 **利用欧洲美元期货进行对冲**

数据： $t=0$，1，2 时的 LIBOR 利率和欧洲美元期货合约的 IMM 指数。

	$t=0$（5 月）	**$t=1$（6 月）**	**$t=2$（7 月）**
即期单利	$L_0=10.00\%$	$L_1=10.50\%$	$L_2=11.00\%$
即期复利	$y_0=10.62\%$	$y_1=11.08\%$	$y_2=11.63\%$
	LIBOR 的计日惯例＝实际天数/360		
期货	$d_{f0}=9.76\%$	$d_{f1}=10.00\%$	$d_{f2}=10.40\%$
	$\text{IMM}_0=90.24$	$\text{IMM}_1=90.00$	$\text{IMM}_2=89.60$
	$\text{IMM}_0-\text{IMM}_1=-24$ 个刻度值	$\text{IMM}_1-\text{IMM}_2=-40$ 个刻度值	
	IMM 指数的刻度价值＝25 美元		
	$F_0=97.56$	$F_1=97.50$	$F_2=97.4$
复利→	$f_0=10.54\%$	$f_1=10.81\%$	$f_2=11.28\%$
	$F_0-F_1=-0.06$	$F_1-F_2=-0.10$	
	F 是每 100 名义美元的价格，合约规模为 $z=1\ 000\ 000$ 美元。		

问题： 在 5 月，如果你要对本金为 1 000 万美元、基于 90 天 LIBOR 利率的 3 月期的借款进行对冲，该借款的利息在 6 月和 7 月各调整一次，如何操作？

答案： **$t=0$（5 月）时：**

8 月借款到期，因此使用 9 月到期的期货合约：

$L_0=10\%$ $\text{FVF}_0=z(F_0/100)=975\ 600$ 美元

$$N_f^*=-\frac{\text{TVS}_0}{\text{FVF}_0}\frac{D_s}{D_f}\left(\frac{(1+f_0)}{(1+y_0)}\right)=-\left(\frac{(1/12)}{(1/4)}\right)\frac{10\ 000\ 000\text{ 美元}}{975\ 600\text{ 美元}}\frac{(1.105\ 4)}{(1.106\ 2)}=-3.41$$

在 6 月份和 7 月份（即两次利率调整）利用堆积滚动策略对 1 000 万美元进行对冲。

$N_f=-6.8$ **（做空 7 份期货合约）**

$t=1$（6 月）时：

$$\text{即期欠款数额}=10\left[1+0.10\left(\frac{30}{360}\right)\right]=10\ 083\ 333\text{（美元）}$$

购回 4 份期货合约：

在期货上的获利$=4z(F_1-F_0)/100=4\times600=2\ 400$（美元）

或 $=4\times(\text{IMM}_1-\text{IMM}_0)\times25$ 美元$=4\times24$ 个刻度值$\times25$ 美元$=2\ 400$（美元）

对外借款减少到：10 083 333 美元－2400 美元＝10 080 933（美元）

按 $L_1=10.5\%$的利率进行调整。

$t=2$（7 月）时：

$$\text{即期欠款数额}=10\ 080\ 933\text{ 美元}\left[1+0.105\left(\frac{30}{360}\right)\right]=10\ 169\ 141\text{（美元）}$$

购回剩余的 3 份期货合约：

在期货上的盈利$=3z(F_1-F_2)/100=3\times1\ 000=3\ 000$（美元）

或 $=3\times(\text{IMM}_1-\text{IMM}_2)\times25$ 美元$=3\times40$ 个刻度$\times25$ 美元$=3\ 000$（美元）

对外借款减少到：10 169 141 美元－3000 美元＝10 166 141（美元）

按 $L_2=11\%$的利率进行调整。

$t=3$（8 月）时：

$$\text{即期欠款数额}=10\ 166\ 141\text{ 美元}\left[1+0.11\left(\frac{30}{360}\right)\right]=\mathbf{10\ 259\ 330}\textbf{（美元）}$$

分析：　该公司借款 1 000 万美元，3 个月后偿还 10 259 330 美元。

$$\text{有效的借款利率} = \left(\frac{10\ 259\ 330}{10\ 000\ 000}\right)^4 - 1 = \mathbf{10.78\%}$$

该公司在 $t=0$ 时希望锁定在 10.62%的水平上，10.78%仅比其高出 16 个基本点。如果该公司没有进行对冲，那么 3 个月的借款复利为

$$[(1+0.10/12)(1+0.105/12)(1+0.11/12)]^4 - 1 = \mathbf{11.02\%}$$

这将比目标利率 10.62%高出 40 个基本点。

欧洲美元的期货合约规模（z）100 万美元。在 5 月 1 日，9 月到期的期货的远期利率参考 90 天期的 LIBOR 利率，该利率能用于 9 月至 12 月之间的时间段（参考定价部分）。借款的即期利率每个月调整一次，因此 $D_s=1/12$，90 天期的期货合约 $D_f=1/4$，对一次利率调整进行对冲所需的期货合约数量：

$$N_f^* = \frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\,\frac{D_s}{D_f}\,\frac{(1+f_0)}{(1+y_0)} = -\left(\frac{10\ 000\ 000\ \text{美元}}{975\ 000\ \text{美元}}\right)\left(\frac{1/12}{1/4}\right)\left(\frac{1.105\ 4}{1.106\ 21}\right) = -3.41\ \text{（份合约）} \tag{5.26}$$

这里，$\mathrm{FVF}_0=(F_0/100)100$ 万美元。因此对两次利率调整进行对冲，一次是 6 月的 1 000 万美元，另一次是 7 月的 1 000 万美元，需要 $N_f=-6.8$（即做空 7 份期货合约）。在 5 月 1 日，最初借款 30 天支付是已知的，那么 6 月 1 日在外发行的借款为

$$10\ 000\ 000\ \text{美元}\left[1+0.10\,\frac{30}{360}\right] = 10\ 081\ 533\ \text{（美元）} \tag{5.27}$$

但是，5 月份到 6 月份之间，即期市场的 LIBOR 利率从 10%增长到 10.5%，也使得 IMM 指数降低了 24 个刻度值，从而使每份期货合约的价值变动了 600 美元（=24×25 美元）。同样道理，期货价格从 $F_0=97.56$ 美元变为 97.50 美元，暗示着从期货合约上获利 975 600−975 000=600 美元。我们需要在 7 月份的第二次调整利率时持有 3 份期货的空头。这是利用新确定的 $\mathrm{FVS}_0=10\ 081\ 533$美元、$y$ 和 f，通过 N_f^* 的常用计算公式计算出来的。因此，在 $t=1$（6 月份）时，我们买回 4 份期货合约，盈利为

$$\begin{aligned}\text{在期货上的盈利(6 月份)} &= 4(\mathrm{IMM}_0-\mathrm{IMM}_1)25\ \text{美元} \\ &= 4z[(F_0-F_1)/100] = 4(600\ \text{美元}) = 2\ 400(\text{美元})\end{aligned} \tag{5.28a}$$

这样可以将对外借款减少到 10 083 333 美元−2400 美元=10 080 333 美元。7 月份，LIBOR 再次增加 0.5%，到 11%，IMM 指数降低 40 个刻度，使得期货价格从 $F_1=97.50$ 美元下降到 $F_2=97.40$ 美元，所以当平仓时，剩余的 3 份期货合约能盈利：

$$\begin{aligned}\text{在期货上的盈利(7 月份)} &= 3(\mathrm{IMM}_1-\mathrm{IMM}_2)25\ \text{美元} \\ &= 3z[(F_1-F_2)/100] = 3(1\ 000\ \text{美元}) = 3\ 000(\text{美元})\end{aligned} \tag{5.28b}$$

这笔盈利可以抵消部分的在外借款。到 7 月份，11%的 LIBOR 利率决定了最后一次的借款利息支付，从而决定了 8 月份的对外借款数额为 10 259 330 美元。这一过程导致实际借款利率为 10.78%，仅比该公司在 $t=0$ 时锁定的目标利率 10.62%高出 16 个基本点。如果没有进行对冲，

该公司将在 3 个调整利息的月份，分别支付 10%，10.5%和 11%的 LIBOR 利率，其总的（复利）未对冲成本为 11.02%，比目标利率 10.62%高出 40 个基本点。

显然，调整时期越长，LIBOR 的即期利率变动幅度越大，相对于不进行对冲的情形，进行对冲越有价值。常见的例子就是在互换交易中持有净浮动利率头寸的互换交易者，常对她的头寸进行为期几年的对冲。

让我们对上述过程进行一些简单的变化。假设你现在持有基于 3 月期欧洲美元 LIBOR 利率的借款 100 万美元，从 1 月 1 日开始持续 5 年时间。1 月份到 3 月份的利息支付是已知的。每 3 个月进行一次利率调整。你担心未来的利率升高。最简单的“叠期”期货的对冲策略是对 5 年内的每个 3 月、6 月、9 月和 12 月到期的期货合约都做空一份欧洲美元（90 天期）期货合约（即 $D_s=D_f$）。这样，你就可以将利率锁定在这些期货合约报价所隐含的期货利率上（即 f_{12}，f_{23}，…）。（我们将在随后的章节看到这相当于“浮动—固定互换”。）但是，由于到期日较远的期货合约的流动性比到期日较近的期货合约的流动性差，这就有另一种方法，就是所谓的“**堆积滚动**”，有时候也叫做**堆积对冲**。一个极端的例子就是通过做空 19（$=4\times5-1$）份距当时最近的 3 月到期的期货合约，对 5 年期的 100 万美元的借款进行对冲（期货隐含的远期利率都为 f_{12}）。

那么进行“堆积滚动”有没有危险？我们再考虑一个极端的例子。假设一个到期日比较远的期货合约所隐含的远期利率升高了，例如 $f_{19,20}$，$f_{48,49}$，…增加了，但是到期日较近的期货合约的利率并没有改变，例如 f_{12}，f_{23}没有改变。这就是（远期）利率曲线的不平行性。如果到期日较近的远期利率没有变，那么期货价格也没有变，这样在进行对冲时，到期日较近的一些期货合约就不会获利。但是恰好在 3 月 1 日前，90 天期的即期利率仍然会增加，这就意味着在第一个利率调整日所付的利息会增加，但是在期货的空头头寸上我们却得不到任何补偿。这样的话，堆积滚动，即堆积对冲，就会对利率曲线的斜率非常敏感。堆积滚动仅对平行变动的利率曲线提供了合理的对冲策略。因此，前面提到的使用具有不同到期日的期货“叠期”是更好的对冲办法。

文章 5.1 给出了由德国 Metallgesellschaft 公司采取的堆积滚动实例，虽然采用的是能源类的期货而不是利率期货，但该案例仍揭示了为保持对冲头寸而向前滚动期货合约时会遇见的实际困难。

文章 5.1　Metallgesellschaft 公司的滚动对冲

或许最有名的滚动对冲是由 MGRM 公司操作的，该公司是德国 Metallgesellschaft 公司在美国的子公司。不幸的是，在 1993 年至 1994 年间，这一对冲的期货损失高达 13 亿美元，结果导致该公司陷入困境，不得不由很多银行共同为其提供救援。

MGRM 按照固定价格的长期合约为美国公司提供油类产品（如柴油、民用燃油和汽油），期限直到 10 年，价格比当时的现货价格低 4 美元左右。MGRM 按照固定的价格提供产品，这样它对未来市场的价格增长就非常敏感。因此，它通过做多适当的商品期货对其头寸进行（部分）对冲（比如无铅汽油、纽约港 2 号加热油以及低硫原油期货等，这些都在纽约商品交易中心 NYMEX 交易）。

但是，由于远期期货的流动性较差，MGRM 用近期的期货合约进行对冲，这样一来，就需要向前滚动交易（这就是所谓的堆积滚动对冲）。到 1993 年 9 月，MGRM 已经卖出了 8 000 万桶

的油品，这相当于科威特 90 天的产量。

刚开始时，同往常一样，因为存在便利收益率，商品期货市场都处于现货溢价。因此当时的现货价格 S_0 超过了在 $t=1$ 交割时的近期期货价格 $F^{(1)}$，这一价格又超过了 $F^{(2)}$，$F^{(3)}$，…，这说明，如果期货持有到期（或将近到期），并且短期的期货合约以相同的方式不断滚动时，MGRM 将把标的资产的价格锁定在一个更低的价位。

为说明这一点，我们假设 MGRM 在 $t=0$ 时以 $F^{(3)}$ 的价格购买了一份 3 月期的期货合约。2 个月后，即 $t=2$ 时以 $F^{(2)}$ 的价格卖掉这个合约。我们注意到原来的 3 月期期货合约现在已经成为 1 月期合约。MGRM 在 $t=2$ 时以 $F^{(3)}$ 的价格买入一份“新的” 3 月期期货以进行滚动对冲。但是，如果曲线处于现货溢价，也就是说 $F^{(1)}(t=2)>F^{(3)}(t=2)$，那么以 $F^{(1)}$ 的价格卖掉近期期货合约，同时以 $F^{(3)}$ 的价格买入一份远期期货合约，这样每 3 个月就可以获得滚动收益。显而易见，如果曲线处于期货溢价状态，MGRM 就会遭受滚动损失，但这正是 1993 年 11 月发生的情况。

第二个不利的事情发生在 1993 年底，当时的现货市场价格大幅度下降。因此，MGRM 以固定价格合同供货，获得了名义上的利润（这一获利需要到 5 年至 10 年以后它真正提供石油制品时才能实现）。但是，期货价格随着现货价格的下降而下降，实际上 MGRM 收到的却是期货保证金的催缴通知。不要忘记，期货市场上遭受损失而抵消掉现货市场的盈利也是很正常的事情，因为这本来就是对冲的目的：使你总头寸处于中性。

但是，母公司为了支付保证金催缴而支出的“即刻”现金流出（1993 年有 9 亿美元），并没有被现货市场上即期价格较低造成的实际盈利而弥补（因为协议中的固定价格适用于未来提供的产品）。因此，母公司将所有的期货合约平仓，受到巨大损失。1994 年 1 月，Metallgesellschaft 因得到许多银行的 12 亿美元资金，才免于被破产清算。6 个月后，油价上升，这使得 MGRM 未对冲的新头寸承受着更大的潜在损失。

这个案例告诉我们，如果现货资产的盈利是延迟的，必须准备足够的现金储备来应付保证金催缴通知。还有，如果现货价格和期货价格一致下降，那么 MGRM 将继续滚动期货合约以达获利目的，但是，如果从现货溢价变为期货溢价，这就意味着会产生滚动损失。

5.5　利率期货合约的定价

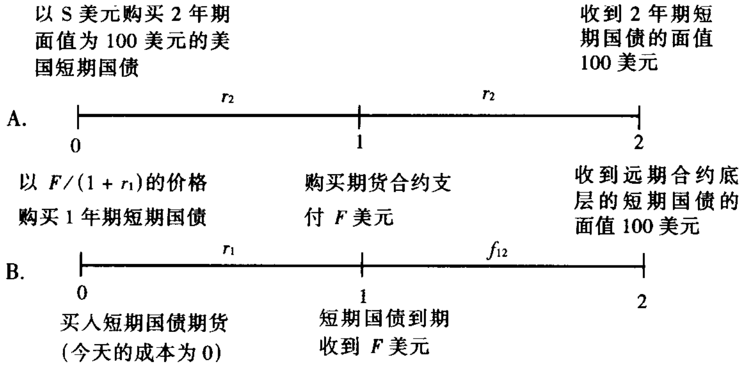
在 $t=1$ 时刻到期的利率期货“锁定了”从 $t=1$ 到 $t=2$ 时间段的利率，在这里这段时间指 1 年。假设期货合约的标的资产是短期国债，在 $t=2$ 时，面值为 100 美元。直观看来，在 $t=1$ 时交割的期货合约以 $t=2$ 时面值为 100 美元的美国短期国债为标的资产，其在 $t=0$ 时的期货报价 F 应该为 100 美元的贴现值：

$$F=\frac{100}{(1+f_{12})} \tag{5.29}$$

这里，f_{12} 为隐含的远期利率。

公式（5.29）说明，如果你想在 $t=2$ 时获得 100 美元，在 $t=0$ 时，你就得准备在 $t=1$ 时支

付 F 美元以持有期货合约。我们随后就会说明，这实际上就是通过复制一个“合成的期货合约”组成套利组合的例子，也就是说，该套利组合与期货合约的收益是相同的。简而言之，在 $t=0$ 时刻，一个 1 年期的短期国债加上一份 1 年后到期以 1 年期美国短期国债为标的资产的期货合约，就相当于在 $t=0$ 时持有一个 2 年期的美国短期国债。如图 5—5 所示的 2 年期的时间上，在 $t=2$时两个投资组合有相同的收益。


以 S 美元购买 2 年期面值为 100 美元的美国短期国债
收到 2 年期短期国债的面值 100 美元
A.
r_2
r_2
0
1
2
以 $F/(1+r_1)$的价格购买 1 年期短期国债
购买期货合约支付 F 美元
收到远期合约底层的短期国债的面值 100 美元
B.
r_1
f_{12}
0
1
2
买入短期国债期货（今天的成本为 0）
短期国债到期收到 F 美元

投资组合 A：2 年期国债。
投资组合 B：1 年期国债加上利率期货合约。

图 5—5 利率期货合约的定价

投资组合 A：$t=0$ 时，以 S 美元的价格购买面值为 100 美元的 2 年期国债。

投资组合 B：$t=0$ 时，

（1）购买面值为 F 的 1 年期国债。

（2）购买 1 年期的利率期货合约，该合约在 $t=2$ 时能得到（面值）100 美元，$t=1$ 时的交割价格为 F。

到期值为 F 的 1 年期国债，在 $t=0$ 时的成本应该是

$$1\text{ 年期美国短期国债的价格}=\frac{F}{(1+r_1)} \tag{5.30}$$

这就隐含着远期利率可以定义为

$$(1+r_2)^2=(1+r_1)(1+f_{12}) \tag{5.31}$$

表 5—6 中给出了投资组合 B 的现金流。当 $t=1$ 时，1 年期的国债到期，投资组合 B 能获得 F 美元，但马上用于购买期货合约。因此在 $t=1$ 时没有净现金流量。在 $t=2$ 时，作为期货合约标的物的短期国债到期，投资组合 B 获得了 100 美元。2 年期的国债组成的投资组合 A，在 $t=2$ 时也到期，并能获得 100 美元。因此，这两个投资组合 A 和 B 在 $t=2$ 时都有净的现金流入 100 美元，因此，二者应该在 $t=0$ 时有相同的价值。在 $t=0$ 时 1 年期国债的成本为 $F/(1+r_1)$，而 2 年期国债的成本为 S，因此就有

$$\frac{F}{(1+r_1)}=S \tag{5.32}$$

表 5—6　**91 天期期货的现金流**

投资组合 ($t=0$)	现金流 $t=0$	$t=1$	$t=2$
A：购买 2 年期面值为 100 美元的国债。	$-S$		100 美元
B：购买 1 年期到期价值为 F 的国债。	$\frac{-F}{(1+r_1)}$	F	
并且：			
购买 1 年期期货合约，$t=1$ 时，该合约交割在 $t=2$ 时面值为 100 美元的 1 年期国债。		$-F$	100 美元

但是，$t=0$ 时，2 年期的美国短期国债的价格是

$$S=\frac{100}{(1+r_2)^2}=\frac{100}{(1+r_1)(1+f_{12})} \tag{5.33}$$

将公式（5.33）代入（5.32），就可以得到

$$F=\frac{100}{(1+f_{12})} \tag{5.34}$$

上述的期货价格 F 是基于复利的。由于市场上存在着不同的交易习惯，这就意味着公式（5.34）与市场的真正报价 F 并不一致。或许，市场上的真正报价只大约接近公式（5.34）所示的值：

$$F=100(1-f_{12}) \tag{5.35}$$

这里，我们利用 $1/(1+f_{12})=1-f_{12}$ 这样一个约等式（比如 3 月期的英镑期货），f_{12} 是期货（远期）合约的报价收益率。（事实上，由于在计算利率时必须考虑实际市场的交易习惯，例如是用单利而不是复利、计日惯例、利用贴现率而不是收益率等，所以定价公式会复杂一点。）附录 5.2 给出了一个更一般的例子。

5.6　价差交易

同品种价差多头是指较近到期日 t_1 的期货合约的多头和较远到期日 t_2 的期货合约的空头组合。这两个期货合约的标的资产相同（比如都是短期国债期货或者都是 3 月期的欧洲美元期货）。显而易见，这比单个期货合约的（裸）头寸的风险低得多，因此其最初的保证金通常只有裸头寸的 1/3。

> 价差头寸可用来对利率曲线的形状改变进行投机。

下面我们会看到，如果收益率曲线是平行变化的，那么价差头寸的价值变动很小或几乎没有。因此对于收益率曲线的平行变动，价差头寸（几乎是）保值的，因此它仅仅是对收益率曲线

形状变化所下的“赌注”。下面我们通过分析 3 月期英镑期货合约的公式，来阐述它的原理：

$$F = 100 - f_{12} \approx 100 - \left(\frac{t_2}{t_{12}} r_2 - \frac{t_1}{t_{12}} r_1\right) \tag{5.36}$$

我们很容易就能得到表 5—7。不要忘记，各期货合约的标的资产虽然到期日不同，但它们都是 3 月期存款，所以 $t_{12}=3/12$ 年是固定的。以 6 个月后到期的英镑期货为例（如表 5—7 第 3 行所示），它具有收益 $\partial F/\partial r_1 = t_1/t_{12} = 6/3 = 2$ 和 $\partial F/\partial r_2 = 9/3 = -3$。6 月期期货的收益为 $\{+2, -3\}$，这就是说，如果“短期”利率增长 1%，期货价格将增长 2，如果“长期”利率增长 1%，期货价格将降低 3。如果利率曲线平行变动，短期和长期利率都升高 1%，净影响 ΔF 就变为 $+2-3=-1$。

表 5—7　**短期利率 r_1 或长期利率 r_2 的 100 个基本点的变动对 F 的影响**

期货合约的到期月	r_1（短期）	r_2（长期）	$\Delta r_1 = \Delta r_2$
1 个月后	+1/3	−4/3	−1
3 个月后	+1	−2	−1
6 个月后	+2	−3	−1
9 个月后	+3	−4	−1

现在我们来考虑 3 个月期货合约的多头和 6 个月期货合约的空头的组合（见表 5—7）。收益率曲线的平行上升对这个价差多头所产生的净结果 $=-1+1=0$。因此，对于收益率曲线的平行变动，价差多头是对冲组合。现在，我们希望说明：

> 如果收益率曲线变得更加陡峭，那么你持有的价差多头将获利。

如果不考虑收益率曲线作为一个整体是上升还是下降，只要曲线变得更加陡峭，上面的论述就能成立。我们来分析下面的价差多头（关于 3 个月期货）：

- 3 个月期货合约的多头。
- 6 个月期货合约的空头。

3 月、6 月和 9 月的即期利率变动，就会引起上述期货所隐含的远期利率变动，从而引起价差头寸的价值变动。3 个月期货合约的多头的收益为 $\{+1, -2\}$，6 个月期货合约的空头的收益为 $\{-2, +3\}$。表 5—8 列出了价差头寸的净风险暴露。

表 5—8　**即期利率的变动对期货价差多头的影响**

	3 个月	6 个月	9 个月
3 个月期货合约多头	+1	−2	0
+6 个月期货合约空头	0	−2	+3
＝价差头寸的净暴露	**+1**	**−4**	**+3**

让我们来看当收益率曲线变得更加陡峭后，会发生什么。这时有

$$\Delta r_9 > \Delta r_6 > \Delta r_3 \quad \text{并且} \quad \Delta r_9 - \Delta r_6 \geqslant \Delta r_6 - \Delta r_3$$

根据表 5—8 中的价差暴露头寸，净影响将为

$$
\begin{aligned}
\text{期货价差头寸的价值净变化} &= +1\Delta r_3 - 4\Delta r_6 + 3\Delta r_9 \\
&= 3(\Delta r_9 - \Delta r_6) - (\Delta r_6 - \Delta r_3) > 0
\end{aligned}
$$

上述结果表明，如果收益率曲线变得更加陡峭的话，价差多头的 $\Delta F>0$。（如果 Δr 都是负数，只要收益率曲线变得更加陡峭，上述结论仍能成立。）上述结论的相对一面仍能成立，即：

如果收益率曲线变得更加平坦，你持有的价差空头将获利。

表 5—9 总结了随收益率曲线的变化而产生的各种期货头寸的价值变化。从表 5—9 中可以清楚地看出，期货的裸头寸可以用来投机于所有利率的普遍变化，如平行性变动、收益率曲线的上升和下降等。相比之下，利率的普遍变化都不会对价差头寸产生影响，只有收益率曲线形状的改变对价差头寸才产生影响。

表 5—9　　**利率期货的头寸（现金流）**

情景	期货多头	期货空头	价差多头	价差空头
所有的收益率上升	−	+	0	0
所有的收益率下降	+	−	0	0
收益率曲线变得更陡	+或−	+或−	+	−
收益率曲线变得更平	+或−	+或−	−	+

5.7　本章摘要

本章所讨论的主要问题有以下几点：

- 基于 3 月期欧洲美元和 3 月期美国短期国债的期货合约的一些细节及报纸报价非常相似。**美国短期国债**和**欧洲美元期货的价格**是从 IMM 指数报价和贴现率引出的，并对应 100 美元的名义值。对于 **3 月期英镑期货**合约，报价非常简单，$F=100-f$，这里 f 指远期收益率报价。
- 投资者在未来的两个时间段收到利息时，**短期利率期货**对于**锁定利率**是非常有用的。借出资金的形式可以采用在金融机构的存款或者购买短期国债。同样，当在 $t=1$ 到 $t=2$ 这段时间借款时，利率期货合约也可以用来锁定所要支付利息的利率（例如从银行获得浮动利率的借款或者发行商业票据）。
- 在 $t=0$ 时，对冲者可以锁定任何一个从 $t=1$ 到 $t=2$ 的时间段所隐含的**远期利率** f_{12}。换一种说法，即对冲使得即期利率的变动所引起现货市场的损失（或盈利）可以被期货市场的盈利（或损失）抵消。
- 为防止短期资产（如**短期国债或商业票据**）的市场价格下跌，可以用短期国债期货进行**对冲**。对于想在将来购买短期国债或商业票据的情形，同样可以用短期国债期货进行对冲。

- **用来进行对冲的期货合约的最优数量**需要根据以下因素进行调整：
  (a) 现货市场头寸的规模相对于期货合约的规模。
  (b) 需要对冲的现货市场头寸的久期以及期货合约标的资产的久期。
  (c) 即期市场利率的相对运动以及期货利率。这些调整将会引出价格敏感性对冲比率。
- **通过已知的即期利率，我们可以计算出隐含的远期利率**，这可以用来决定“无套利”的期货价格 F。或者，**已知的期货价格可以用来计算隐含的远期利率**。后者可以用来计算即期利率和收益率曲线（直至具有最长到期时间的期货合约的到期日）。
- 通过构造一个无风险套利组合，可以决定**短期国债期货合约的公平价格**。它是期货合约的标的资产面值的贴现值。因此有 $F=M/(1+f_{12})^{t_{12}}$，这里的 f_{12} 是指期货的到期日（$t=1$）和标的资产的到期日（$t=2$）之间（用离散复利表示）的隐含远期利率（例如，对于美国短期国债期货 $t_{12}=90/365$）。
- **利率期货的价差头寸交易**可以对冲利率的普遍变化，同时能够对**收益率曲线形状的变化**进行投机。

章末练习

1. 简要叙述应使用哪类合约对下列现货市场头寸进行对冲：

(a) 现在是 1 月 1 日，你希望在 2 个月后获得 1 000 万美元，并以固定利率投资于银行存款上，期限为 5 个月。

(b) 现在是 1 月 1 日，你持有一个商业票据多头，该票据 170 天后到期。你在考虑 2 个月后在货币市场上卖掉此商业票据。

你所选择的对冲策略存在什么风险？

2. 现在是 1 月 1 日，2 个月后，你将向银行贷款 500 万美元，期限为 2 年，利息是基于 180 天的商业票据+100 个基本点。请详细描述一下，你利用最小方差对冲比率和适当的期货合约对此头寸进行对冲的步骤。进行对冲时存在什么风险？

3. 简要叙述在下列情况下，你的对冲策略是持期货合约多头还是空头：

(a) 你计划在 30 天后购买债券。

(b) 你计划在 2 个月后借款。

(c) 你现在持有一个浮动利率债券，并想一直持有至到期日。

4. 美国短期国债期货的 IMM 报价指数为 $Q=90.00$（期货贴现率 $d_f=10\%$）。30 天后期货合约到期。还有一个贴现率为 $d=10\%$ 的 120 天期的短期国债。用连续复利表示的隐含回购利率是什么？如果连续复利表示的实际回购利率为 $r=10.3\%$，存在什么样的套利机会？

5. 1 月 20 日，一位美国公司的财务官要发行 100 万美元的商业票据，其现值为 9 650 000 美元，180 天后的 6 月 25 日到期。9 月份欧洲美元期货的 IMM 指数为 92.00（注意，欧洲美元期货的报价习惯与美国短期国库券期货的报价习惯相同）。她如何对冲这个暴露？

6. 在 11 月 10 日，12 月 28 日（+48 天）到期的美国短期国库券期货合约的价格为 94.00（IMM 指数）。12 月 28 日到期的国库券的收益率为 9%，3 月 29 日到期的国库券的贴现率为

7%。从 11 月 1 日至 3 月 29 日有 139 天。确定用离散复利表示的隐含回购利率。你是否能获得套利收益？

7. 9 月期的即期利率为每年 10%，6 月期的即期利率为每年 9%，都是连续复利。标的于 6 个月后票面价值为 100 万美元 90 天短期国债期货的价格为多少？IMM 报价指数是多少？

附录 5.1　最优期货合约数量

利用短期利率期货对即期头寸进行对冲时，分析所用到的最优期货合约的数量要用到以下的符号：

S＝标的短期国债的即期价格
B_0＝国债即期头寸的名义面值
$\mathrm{TVS}_0=B_0(S_0/100)$＝在 $t=0$ 时持有的现货头寸总值(美元)
F＝短期利率期货的期货“价格”(注意，不是 IMM 指数)
z＝合约乘数或者每个期货合约的“规模”
FVF_0＝一份短期国债期货合约的面值
N_f＝持有的利率期货合约数量

如果“合约乘数”是 z，那么在 $t=0$ 时刻，期货合约的面值为

$$\mathrm{FVF}_0=F_0z \tag{A5.1}$$

从第 3 章可知，最小方差对冲比率为

$$N_f=\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\beta_p \tag{A5.2}$$

其中，$\beta_p=\frac{\sigma_{(\Delta S/S,\Delta F/F)}}{\sigma^2_{\Delta F/F}}$。

通过对现货价格的变动百分比和适当期货指数的变动百分比进行回归分析，我们可以得到 β_p，有时候也称为**价格敏感性对冲比率**。

基于久期的对冲比率：短期利率期货

但是，当我们分析利率期货时，考虑收益率的变动以及用久期公式来计算 β_p 似乎更加方便。采用连续复利，我们有：

$$\Delta S/S_0=-D_s\Delta y_s \tag{A5.3a}$$

$$\Delta F/F_0=-D_f\Delta y_f \tag{A5.3b}$$

在这里，D_s 是我们需要进行对冲的标的现货市场头寸的久期（比如基于浮动利率的 1 年期贷款）。D_f 是期货合约标的资产的久期。y_s 和 y_f 分别是这两种资产的收益率（不是贴现率）。因此：

$$\sigma^2_{\Delta F/F} = D_f^2 \sigma^2_{\Delta y_f} \qquad \text{(A5. 4a)}$$

$$\sigma_{\Delta S/S,\Delta F/F} = D_s D_f \Delta y_s \Delta y_f \qquad \text{(A5. 4b)}$$

把公式(A5. 4a)和(A5. 4b)代入(A5. 2)，就有

$$N_f = \left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\left(\frac{D_s}{D_f}\right)\left(\frac{\sigma(\Delta y_s,\Delta y_f)}{\sigma^2(\Delta y_f)}\right) \qquad \text{(A5. 5)}$$

利用回归分析，我们能得到公式（A5. 5）的最后一项的估计值：

$$\Delta y_s = \alpha_0 + \beta_y \Delta y_f + \varepsilon \qquad \text{(A5. 6)}$$

这里，$\beta_y = \sigma(\Delta y_s, \Delta y_f)/\sigma^2(\Delta y_f)$。因此 $\beta_p = (D_s/D_f)\beta_y$：

$$N_f = \left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\left[\frac{D_s}{D_f}(\beta_y)\right] = \frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}[\text{相对波动率}] \qquad \text{(A5. 7)}$$

这就是**基于久期的对冲比率**。方括号中的最后一项通常指**相对波动率**。假设即期收益率和期货收益率一对一变动（即收益率曲线平行移动），那么该公式可以简化为

$$N_f = \left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\left(\frac{D_s}{D_f}\right) \qquad \text{(A5. 8)}$$

对于各种债务工具的组合和持有期，Toevs 和 Jacob（1986）分析了许多对冲比率的表现。基础的对冲比率是通过 $N_f = \mathrm{TVS}_0/z$ 或 $N_f = (\mathrm{TVS}_0/\mathrm{FVF}_0)$算出的。Toevs 和 Jacob 发现基于久期的价格敏感性对冲比率比这些“基础”比率更好。

基于久期的对冲比率：采用复利

假设利率为连续复利，上述公式计算了基于久期的对冲比率。如果我们使用离散复利，那么公式(A5. 3a)和公式(A5. 3b)都包含一个附加项，变为

$$\Delta S/S_0 = -D_s \Delta y_s/(1+y_s) \qquad \text{(A5. 9a)}$$

和

$$\Delta F/F_0 = -D_f \Delta y_f/(1+y_f) \qquad \text{(A5. 9b)}$$

并且，公式(A5. 8)变为

$$N_f = \left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\left[\frac{D_s(1+y_f)}{D_f(1+y_s)}(\beta_y)\right] = \left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)[\text{相对波动率}] \qquad \text{(A5. 10)}$$

利用长期国债进行对冲

尽管我们在下一章才讨论长期国债期货，但在这里涉及一点也未尝不可。受到“最廉价可交割债券”的影响，公式中添加了一项，变得复杂了一些。也就是说，“转换因子”CF 影响 N_f 的选择：

$$N_f=\frac{TVS_0}{FVF_0}\left(\frac{D_s}{D_f}\right)\beta_y CF_{CTD} \tag{A5.11}$$

如果 CF 为 1，那么期货合约的面值就为 FVF_0。但是，如果 CF>1，相对于合约中的名义债券，要交割的债券有更高的息票率，从而久期更高。因此，期货中债券的实际久期是 D_f/CF，期货合约的最优数量 N_f 将随着因子 CF 的增长而增长。

附录 5.2　利率期货的定价

在这节附录中，我们讨论两个问题。首先，利用前述正文中的套利例子，利用单利和具有任意到期日的资产，从远期利率 f_{12} 推出远期（期货）价格 F，然后再用即期离散复利和连续复利分析一遍。随后我们再进行反向分析，说明怎样从即期短期国债的贴现率报价计算出期货 IMM 指数。

期货价格：采用单利

图 5—5 和表 5—6 给出了计算的基本思路。注意，我们使用的是收益率，而不是贴现率。

数据： m_1＝距期货合约交割日的天数

m_2＝距期货合约标的国债到期日的天数

$m_{12}=m_2-m_1$

r_1＝0～1 时间段的即期单利（简单“附加”率）

r_2＝0～2 时间段的即期单利（简单“附加”率）

f_{12}＝时间段 1～2 的隐含远期利率（简单“附加”率）。

M＝100＝到期价值

$t_i/365$＝计日惯例

推导：

参考文中公式（5.8），隐含远期利率定义为

$$(1+r_2t_2)=(1+r_1t_1)(1+f_{12}t_{12}) \tag{A5.12}$$

其中，$t1=(m_1/365)$，$t_2=(m_2/365)$且 $t_{12}=(m_{12}/365)$。**投资组合 A** 包括在 $t=0$ 购买一个 2 年期的短期国债，其到期值 $M=100$ 美元(在 $t+2$)，那么现货市场的价格为

$$S=\frac{100}{(1+r_2t_2)}=\frac{100}{(1+r_1t_1)(1+f_{12}t_{12})} \tag{A5.13}$$

假设一期货合约的价格为 F，标的短期国债在 t_{12}天后到期、到期值为 $M=100$ 美元。投资组合 B 包括一个 m_1 天后到期、到期值为 F 美元的短期国债加上这个短期国债的期货合约。由于 $t_2=t_1+t_{12}$天后，其收益 $M=100$ 美元与实际的 2 年期短期国债的收益相同，投资组合 B 是一个合成的 2 年期短期国债。在 $t=2$ 时，投资组合 A 和投资组合 B 都获得 100 美元，因此，它们在

$t=0$时的成本应该相同。到期值为 F 的 1 年期短期国债在 $t=0$ 时的成本为 $F/(1+r_1)$，2 年期的短期国债成本为 S。使这两个数值相等，得出

$$S=\frac{F}{(1+r_1)} \tag{A5.14}$$

注意在 $t=0$ 时，购买期货合约没有成本。利用公式(A5.13)和(A5.3)就可以得到

$$F=\frac{100}{(1+f_{12})} \tag{A5.15}$$

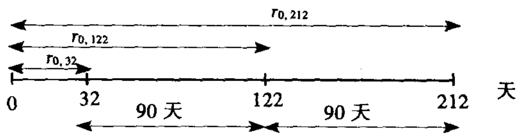
报价可以看做公式(A5.15)的近似，即

$$F=100(1-f_{12}) \tag{A5.16}$$

但是，正如我们所看到的，在国际上的期货市场惯例会有所不同。

期货价格和 IMM 指数报价：采用离散和连续复利

假设我们仅知道 $t=0$ 时的即期利率，想找到短期国债期货的 IMM 指数报价 Q_f。首先，我们计算隐含的远期利率，然后是无套利期货价格，最后计算出 IMM 指数报价。如图 A5—1 所示，假设现在是 5 月，我们有 32 天、122 天和 212 天后到期的短期国债的即期利率。注意到 122－32＝212－122＝90 天。我们假设 32 天期的短期国债的到期日与 6 月期货合约的到期日相同（该合约交割 90 天的短期国债）：


$t=0$ 时，从市场上观察的即期利率：

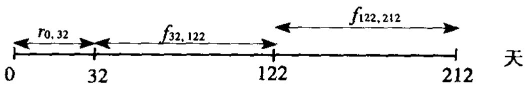

$t=0$ 时，推导出的远期利率：

图 A5—1　从即期利率推导远期利率

$r_{0,32}=0.09$　　$r_{0,122}=0.10$　　$r_{0,212}=0.12$

$t_{0,32}=32/365$　　$t_{0,122}=122/365$　　$t_{0,212}=212/365$

收益率曲线是向上弯曲的。这些短期国债即期利率是从贴现率报价推导出的离散复利。其对应的连续复利可以由 $r^c=\ln(1+r)$算出，即：

$r^c_{0,32}=0.0862$　　$r^c_{0,122}=0.0953$　　$r^c_{0,212}=0.1133$

从下式可以利用离散复利计算离散的隐含远期利率：

$$(1+r_{0,32})^{32/365}(1+f_{32,122})^{90/365}=(1+r_{0,212})^{122/365} \tag{A5.17a}$$

$$(1+r_{0,122})^{122/365}(1+f_{122,212})^{90/365}=(1+r_{0,212})^{212/365} \quad \text{(A5.17b)}$$

得到

$$f_{32,122}=0.1036 \quad 和 \quad f_{122,212}=0.1477$$

我们注意到，由于即期利率曲线是向上弯曲的，远期利率曲线位于即期利率曲线上面。其对应的连续远期复利可以通过 $f^c=\ln(1+f)$ 计算出，即

$$f^c_{32,122}=0.0986 \quad 和 \quad f^c_{122,212}=0.1378$$

期货合约交割 90 天期短期国债，因此，期货价格为：

$$F_{32,122}=\frac{100 \text{ 美元}}{(1+f_{32,122})^{90/365}}=97.60 \text{ 美元（每 100 名义美元）} \quad \text{(A5.18a)}$$

$$F_{122,212}=\frac{100 \text{ 美元}}{(1+f_{122,212})^{90/365}}=96.66 \text{ 美元（每 100 名义美元）} \quad \text{(A5.18b)}$$

当然，使用连续复利得出的 F 值为

$$F_{32,122}=100\mathrm{e}^{-f^c_{32,122}(90/365)} \quad \text{(A5.19a)}$$

和

$$F_{122,212}=100\mathrm{e}^{-f^c_{122,212}(90/365)} \quad \text{(A5.19b)}$$

最后，我们从期货价格 F 推导出期货的贴现率报价 d_f 和 IMM 报价指数：

$$F=100-d_f\left(\frac{90}{360}\right) \quad 和 \quad Q_f=100-d_f \quad \text{(A5.20)}$$

因此

$$d_f(32,122)=9.603 \qquad d_f(122,212)=13.358$$
$$Q_f(32,122)=90.396 \qquad Q_f(122,212)=86.641$$

我们使用了美国短期国债期货、1 年 360 天的计日惯例以及期货合约将交割的 90 天短期国债。通过无套利等式计算隐含的远期利率，我们保证了计算上述的期货价格时不存在无风险套利机会。例如，给出由上面过程计算出的 $F_{32,122}$，通过买入（或卖出）一个 32 天和 212 天短期国债以及价格为 $F_{32,122}$ 的期货，不可能获得套利收益。

如上所述，我们从短期国债的即期利率报价开始，计算期货价格和 IMM 指数报价。我们注意到，可以进行上述推理的反向分析。给定 $r_{0,32}$，我们可以采用两个从市场上观察到的 IMM 指数报价计算 $f_{32,122}$ 和 $f_{122,212}$，然后利用公式（A5.17）计算即期收益率的期限结构，即 $r_{0,122}$ 和 $r_{0,212}$。这样，我们就从市场上观察到的期货价格构造出即期收益率曲线。

如果我们用 t_i 表示以年计的时间，上述公式会更简单一些：

$$t_1=32/365 \qquad t_2=122/365 \qquad t_3=212/365$$
$$t_{12}-t_1=90 \qquad t_{23}-t_2=90$$

将即期利率 $r_{0,i}$ 简单记为 r_i（$i=1$，2，3），那么

$$(1+r_1)^{t_1}(1+f_{12})^{t_{12}}=(1+r_2)^{t_2} \tag{A5.21a}$$

$$(1+r_2)^{t_2}(1+f_{23})^{t_{23}}=(1+r_3)^{t_3} \tag{A5.21b}$$

和

$$F_{12}=\frac{100}{(1+f_{12})^{t_{12}}} \quad 和 \quad F_{23}=\frac{100}{(1+f_{23})^{t_{23}}} \tag{A5.21c}$$

考虑到连续复利，也就是说，对公式(A5.21a)到(A5.21c)取对数，并利用

$$t_1 r_1^c + t_{12} f_{12}^c = t_2 r_2^c \tag{A5.22a}$$

$$t_2 r_2^c + t_{23} f_{23}^c = t_3 r_3^c \tag{A5.22b}$$

和

$$F_{12}=100\mathrm{e}^{-f_{12}^c(t_{12})} \quad 和 \quad F_{23}=100\mathrm{e}^{-f_{23}^c(t_{23})} \tag{A5.22c}$$

总而言之，如果 f_{12}^s 是单利，f_{12} 是复利并且 f_{12}^c 是连续复利，那么期货的理论或者公平价格由下式给出：

$$F_{12}=\frac{100}{(1+f_{12}^s t_{12})}=\frac{100}{(1+f_{12})^{t_{12}}}=100\mathrm{e}^{-f_{12}^d t_{12}} \tag{A5.23}$$

如果我们已经计算出期货的“公平”价格 F_{12}，那么我们可以很容易导出期货的收益率报价（或贴现率）以及 IMM 指数 Q。例如，短期英镑期货的收益率为 $f_{12}=100-F_{12}$。对于短期国债期货，已知 F_{12}，我们能计算出期货贴现率 $d_f=(360/90)(100-F_{12})$和 IMM 指数报价 $Q_f=100-d_f$。

即期利率和短期国债现货价格

出于完整性，现在我们来考虑，如何根据现货市场的即期离散收益率 r_{01}，r_{02}和 r_{03}来获得即期短期国债（不是期货）贴现率“d”的报价。首先，我们注意到，短期国债的市场价格 $P_{0,t}$由下式决定（参考 Cuthbertson and Nitzsche，2001）：

$$P_{0,t}=\frac{100}{(1+r_{0,t})^{t/365}} \quad (t=t_1, t_2 \text{ 和 } t_3) \tag{A5.24}$$

已知短期国债的市场价格 $P_{0,t}$，那么贴现率的报价就可以通过反向计算得出

$$P_{0,t}=100[1-d_{0,t}t^*] \tag{A5.25}$$

这里，对于短期国债现货来说，t^* = 距离到期日的天数/360。因此，采用公式(A5.24)和(A5.25)，我们就可以得到：

$P_{0,32}=99.247$ $P_{0,122}=96.864$ $P_{0,212}=93.629$

$d_{0,32}=0.0847$ $d_{0,122}=0.0925$ $d_{0,212}=0.1082$

第6章

长期国债期货

学习目标

- 考察**英国金边债券期货**（UK gilt futures）和**美国长期国债期货**（US T-bond futures）合约的细节，包括“转换因子”（conversion factor）、最廉价可交割债券（the cheapest to deliver）和“百搭牌游戏”（wild card play）等概念。
- 选择最佳数量的长期国债期货合约来对冲：

  （1）已有的长期国债或是公司债券组合（即交叉对冲）；

  （2）未来买入的长期国债。
- 怎样基于现购自运套利对长期国债期货合约进行公平定价。
- 分析怎样通过**期货价差**（futures spread）或是改变一个债券组合的久期来利用**相时操作**（market timing）的策略进行投机。

在使用长期国债期货时，一些实际操作中的细节还是比较复杂的。但是正如所有的期货合约一样，它也可以用于投机、套利和对冲。长期国债

期货合约的多头头寸允许持有者在到期日收到交割的长期国债。对冲可以降低投资者债券组合价格的不确定性。例如，如果你持有 $S=2\ 000$ 万美元的长期国债，并且担心在接下来的 6 个月长期利率会上升，如果你是长期国债的多头，则应该卖空长期国债期货。如果长期利率随后上升了，则你的债券投资组合 S 的价值就会下跌，但是随着 S 的下跌，期货的价格 F 也会下跌，这样由于你是期货合约的空头，你可以对期货头寸进行平仓，这样就可以获利，而这部分利润可以弥补在现货市场上的部分损失。

如果投机者认为未来的长期利率会下跌(即债券价格上升)，由于现货市场的价格上升就暗示着期货市场价格也会上升，那么他可以买入一份长期国债期货。由于对于期货投资者只需要支付初始保证金，因此与仅仅在现货市场上买入债券相比，投资者通过买入期货合约获得了杠杆作用。另外期货市场的交易成本(例如买入—卖出价差、清算所和经纪商的费用)也可能比现货市场要低。期货市场的裸投机头寸具有很大风险，因此交易者通常利用期货价差，常常在买入一份期货合约的同时卖出一份不同的期货合约。这样降低了可能的投机利润，但是同时也降低了头寸的风险。

长期国债期货合约的公平价格是通过常规的**现购自运套利**（cash and carry）决定的。假设长期国债期货的标的债券的到期时间是 15 年，并且将要在 3 个月后进行交割（我们假设 3 个月中没有利息的支付）。这可以通过借款 3 个月并在现货市场上买入一份到期时间为 15.25 年的长期债券来复制。后者组成了一个复合的长期债券期货。期货市场和现货市场之间的套利导致了现货市场上债券的价格 S 与期货的价格 F 相连。

6.1 合约规范

一些政府债券的期货合约在很多交易所进行交易。图 6—1（a）给出了 2000 年 7 月 27 日《金融时报》的报价。流动性最好的合约（参见“open int”）有标的于美元报价的美国长期国债(CBT)，以及法国的欧元债券（MATIF）和德国的欧元债券（叫做“Bunds”，在 EUREX 进行交易)，这两种都是用欧元报价的，另外还有英国的金边债券（在 LIFFE 用英镑进行交易)。流动性稍差的合约标的于西班牙国债（在巴黎期货交易所 MATIF 用欧元交易）和日本国债（在 LIFFE 交易)。图 6—1（b）来自 2000 年 7 月 27 日的《华尔街日报》，它给出了主要在芝加哥交易所（CBT）进行交易的各种关于美国长期债券（或是中期债券）的期货合约。下面我们详细讨论英国和美国的合约。

英国长期金边债券期货合约

表 6—1 中给出了英国长期金边债券期货合约（LIFFE）的细节。这个合约中所说的金边债券是具有 7%息票率的名义金边债券（到期时间是 8.75 年至 13 年)。但奇怪的是，这个名义上的 7%金边债券事实上并不存在。然而，正如我们所看到的，它为我们计算可能交割债券（这些债券是真正存在的）的价格提供了一个基准。期货合约的卖方可以决定确切的交割日期（必须是在交割月份内）以及具体用哪种债券进行交割（在交易所规定的有限范围内)。实际上，卖方可以

选择所谓的“**最廉价可交割债券**”（CTD）。我们将会看到对于每种可能进行交割的债券，CTD 取决于“转换因子”（CF），下面我们将会解释这些概念。

表 6—1　　**英国长期金边债券期货（LIFFE）**

合约规模	100 000 英镑名义价值，7%息票率的名义金边债券
交割月份	3 月、6 月、9 月、12 月
报价	对每 100 英镑名义价值进行报价
一个刻度（价值）	0.01（10 英镑）
最后一个交易日	当月最后一个工作日前的两个工作日，上午 11 点
交割日	交割月份的任何一个工作日（由卖者选择）
结算	交易所公布可用于交割的金边债券清单，它们的到期时间都在 8.75 年至 13 年之间
保证金要求	2 000 英镑的初始保证金，250 英镑的价差保证金

合约规模是 $z=100\ 000$ 英镑（名义价值），期货报价以 100 英镑（名义价值）为单位，另外，最小刻度是每 100 英镑（名义价值）的 0.01（比如，从 92 变化至 92.01 为一个刻度），因此一个刻度的价值是每份合约 10 英镑（$=0.01\times100\ 000$ 英镑/100）。

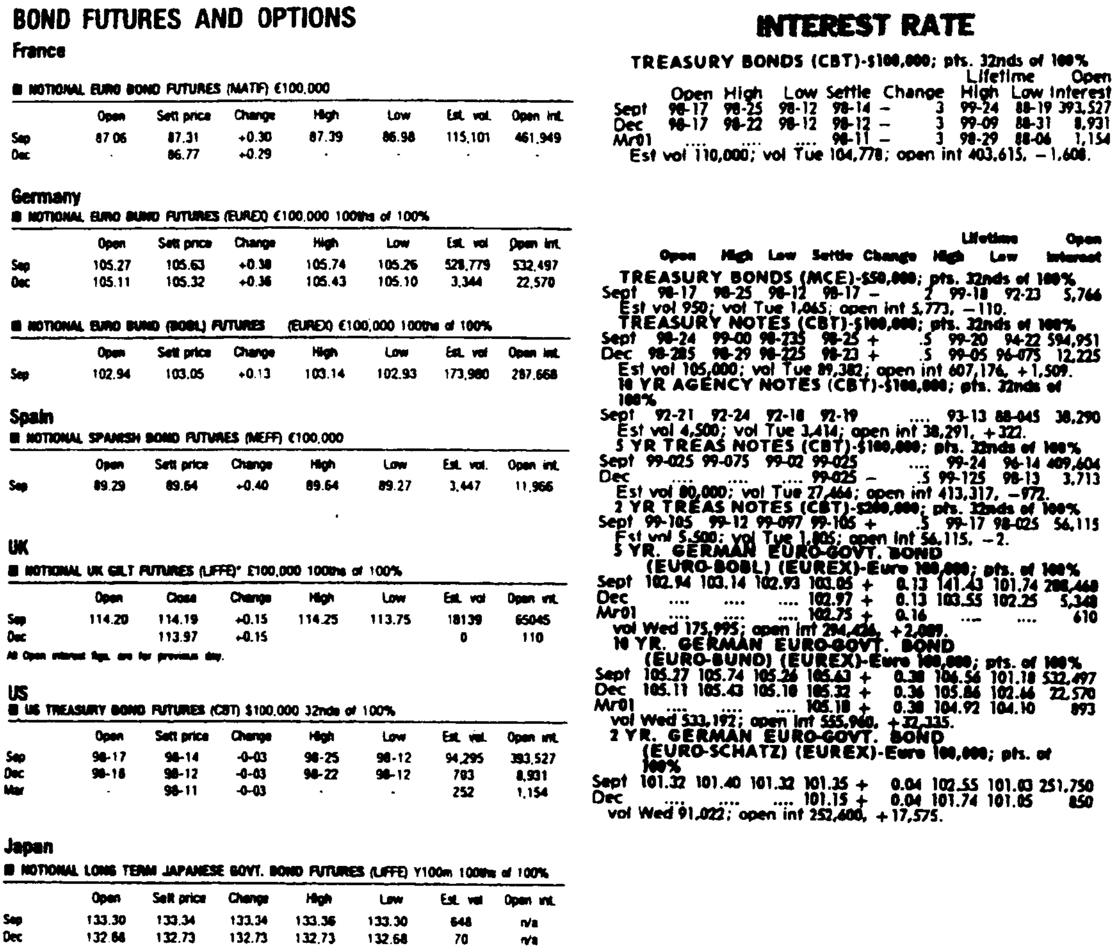
> **对于合约规模为 100 000 英镑的英国长期金边债券期货，一个刻度是每 100 英镑（名义价值）的 0.01，这表明对于一份合约来说最小的价值变化是 10 英镑。**

在 2000 年 7 月 27 日，9 月份期货合约（图 6—1（a））的收盘（结算）价格的报价是每 100 英镑（名义价值）$F_0=114.19$，因此一份名义价值 100 000 英镑的期货合约的面值是 $\mathrm{FVF}_0=z(F_0/100)=114\ 190$ 英镑。如果 9 月份的金边期货合约的价格是 114.19，而 12 月份期货合约的价格是 113.97，那么这说明在 7 月 27 日，市场预期在 2000 年 9 月至 12 月间长期利率会小幅上升。

美国长期国债期货合约

这种合约（在 CBT 交易）背后的规则与英国金边债券期货合约非常类似。但是是以 1%的 1/32 进行报价（见表 6—2）。到期月是 3 月、6 月、9 月和 12 月。最后交易日是到期月份中最后 7 天前的那个工作日。第 1 个交割日是交割月份中第 1 个工作日，交割可以在交割月份中任何一个工作日进行。合约要求交割的名义资产是 8%息票率的债券。然而在实际操作中，空头可以在 30 多种可供选择的不同债券中选择交割哪个债券（它们的息票率并不是 8%，CF 通过调整交割价格反映了实际进行交割的债券种类）。用于交割的长期国债必须有大于 15 年的到期时间（或是至少在 15 年内不被赎回）。另外还有 2 年、5 年或是 10 年的中期债券期货，它们与长期债券期货的不同之处仅仅在于交割合约时所用的标的资产的到期时间。如同大多数的期货合约一样，这类期货也很少进行交割，但是还是存在交割的可能性，因此套利利润保证了期货价格和现货价格之间的一致。这也使我们可以通过现购自运套利对期货合约定价。

在 2000 年 7 月 27 日的《金融时报》(图 6—1(a))中，9 月份交割的美国长期国债期货(CBT)的结算报价为“98－14”($=98^{14/32}$)，这表示名义上每 100 名义美元的价格是 98.437 5 美元。由于合约的规模是 100 000 美元，因此每份合约的面值是 $\mathrm{FVF}_0=z(F_0/100)=z(98.437\ 5$ 美元/100 美元$)=98\ 437.50$ 美元。



BOND FUTURES AND OPTIONS

France

■ NOTIONAL EURO BOND FUTURES (MATIF) €100,000

	Open	Sett price	Change	High	Low	Est. vol.	Open int.
Sep	87.06	87.31	+0.30	87.39	86.98	115,101	461,949
Dec	-	86.77	+0.29	-	-	-	-

Germany

■ NOTIONAL EURO BUND FUTURES (EUREX) €100,000 100ths of 100%

	Open	Sett price	Change	High	Low	Est. vol	Open int.
Sep	105.27	105.63	+0.38	105.74	105.26	528,779	532,497
Dec	105.11	105.32	+0.36	105.43	105.10	3,344	22,570

■ NOTIONAL EURO BUND (BOBL) FUTURES (EUREX) €100,000 100ths of 100%

	Open	Sett price	Change	High	Low	Est. vol	Open int.
Sep	102.94	103.05	+0.13	103.14	102.93	173,980	287,668

Spain

■ NOTIONAL SPANISH BOND FUTURES (MEFF) €100,000

	Open	Sett price	Change	High	Low	Est. vol.	Open int.
Sep	89.29	89.64	+0.40	89.64	89.27	3,447	11,966

UK

■ NOTIONAL UK GILT FUTURES (LIFFE)* £100,000 100ths of 100%

	Open	Close	Change	High	Low	Est. vol	Open int.
Sep	114.20	114.19	+0.15	114.25	113.75	18139	65045
Dec		113.97	+0.15			0	110

All Open interest figs. are for previous day.

US

■ US TREASURY BOND FUTURES (CBT) $100,000 32nds of 100%

	Open	Sett price	Change	High	Low	Est. vol.	Open int.
Sep	98-17	98-14	-0-03	98-25	98-12	94,295	393,527
Dec	98-18	98-12	-0-03	98-22	98-12	783	8,931
Mar	-	98-11	-0-03	-	-	252	1,154

Japan

■ NOTIONAL LONG TERM JAPANESE GOVT. BOND FUTURES (LIFFE) Y100m 100ths of 100%

	Open	Sett price	Change	High	Low	Est. vol	Open int.
Sep	133.30	133.34	133.34	133.36	133.30	648	n/a
Dec	132.68	132.73	132.73	132.73	132.68	70	n/a

(a)《金融时报》

INTEREST RATE

TREASURY BONDS (CBT)-$100,000; pts. 32nds of 100%

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
Sept	98-17	98-25	98-12	98-14	– 3	99-24	88-19	393,527
Dec	98-17	98-22	98-12	98-12	– 3	99-09	88-31	8,931
Mr01	....	....	....	98-11	– 3	98-29	88-06	1,154

Est vol 110,000; vol Tue 104,778; open int 403,615, –1,608.

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest

TREASURY BONDS (MCE)-$50,000; pts. 32nds of 100%

Sept	98-17	98-25	98-12	98-17	– 2	99-18	92-23	5,766

Est vol 950; vol Tue 1,065; open int 5,773, –110.

TREASURY NOTES (CBT)-$100,000; pts. 32nds of 100%

Sept	98-24	99-00	98-235	98-25	+ .5	99-20	94-22	594,951
Dec	98-285	98-29	98-225	98-23	+ .5	99-05	96-075	12,225

Est vol 105,000; vol Tue 89,382; open int 607,176, +1,509.

10 YR AGENCY NOTES (CBT)-$100,000; pts. 32nds of 100%

Sept	92-21	92-24	92-18	92-19	....	93-13	88-045	38,290

Est vol 4,500; vol Tue 3,414; open int 38,291, +322.

5 YR TREAS NOTES (CBT)-$100,000; pts. 32nds of 100%

Sept	99-025	99-075	99-02	99-025	....	99-24	96-14	409,604
Dec	....	....	....	99-025	– .5	99-125	98-13	3,713

Est vol 80,000; vol Tue 27,464; open int 413,317, –972.

2 YR TREAS NOTES (CBT)-$200,000; pts. 32nds of 100%

Sept	99-105	99-12	99-097	99-105	+ .5	99-17	98-025	56,115

Est vol 5,500; vol Tue 1,805; open int 56,115, –2.

5 YR. GERMAN EURO-GOVT. BOND (EURO-BOBL) (EUREX)-Euro 100,000; pts. of 100%

Sept	102.94	103.14	102.93	103.05	+ 0.13	141.43	101.74	288,468
Dec	....	....	....	102.97	+ 0.13	103.55	102.25	5,348
Mr01	....	....	....	102.75	+ 0.16	....	....	610

vol Wed 175,995; open int 294,426, +2,089.

10 YR. GERMAN EURO-GOVT. BOND (EURO-BUND) (EUREX)-Euro 100,000; pts. of 100%

Sept	105.27	105.74	105.26	105.63	+ 0.38	106.56	101.18	532,497
Dec	105.11	105.43	105.10	105.32	+ 0.36	105.86	102.66	22,570
Mr01	....	....	....	105.18	+ 0.38	104.92	104.10	893

vol Wed 533,192; open int 555,960, +32,335.

2 YR. GERMAN EURO-GOVT. BOND (EURO-SCHATZ) (EUREX)-Euro 100,000; pts. of 100%

Sept	101.32	101.40	101.32	101.35	+ 0.04	102.55	101.03	251,750
Dec	....	....	....	101.15	+ 0.04	101.74	101.05	850

vol Wed 91,022; open int 252,600, +17,575.

(b)《华尔街日报》

经《金融时报》允许后复制。

经《华尔街日报》允许后复制。

图 6—1　债券期货合约

表 6—2　美国长期国债期货（CBOT）

合约规模	100 000 美元的名义价值，8%息票率的名义美国国债
交割月份	3 月、6 月、9 月和 12 月
报价	对每 100 美元名义价值进行报价
一个刻度（价值）	1/32（31.25 美元）
最后一个交易日	到期月最后一个工作日的前 7 个工作日
交割日	交割月份的任何一个工作日（由卖者选择）
结算	任何到期日距合约到期月份超过 15 年的美国国债（或是在 15 年内不可赎回）
保证金	5 000 美元的初始保证金，4 000 美元的维持保证金
交易时间	美国中部标准时间，上午 8 点至下午 2 点
每日价格限幅	96/30 点，3 000 美元

对于合约规模为 100 000 美元名义价值的合约来说，一个刻度是 1%的 1/32，这表明对于一份合约来说，一个刻度的价值是 31.25 美元。

对于到期月为 9 月、12 月和 3 月的合约，期货价格是递减的，这暗示着市场预期长期收益率未来会上升。

6.2　转换因子和最廉价可交割债券

在讨论对冲的策略之前，我们必须首先弄清楚转换因子 CF 的使用以及最廉价可交割债券 CTD 的概念。我们以美国长期国债期货为例来讨论上述问题，英国金边债券期货的原理是类似的。对于期货市场上的空头投资者，他们有很多种到期时间超过 15 年的债券可以用来交割。它们具有不同的到期日和息票支付，因此 CF 的值和 CTD 就不同了。

转换因子

在这一节，我们假设读者基本熟悉现货市场上的债券定价和计算应计利息的惯例。CF 调整了实际用于交割的债券价格，这是通过假设它具有 8%的到期受益率，这与期货市场上的名义债券的利息相同。在计算 CF 时，标的债券的到期时间规定为从交割月的第 1 天开始。例如，如果我们假设实际交割日是 1999 年的 9 月 11 日，另外标的债券的到期日是 2020 年 2 月 15 日，那么在计算 CF 时所用的期限是 1999 年的 9 月 1 日（不是 9 月 11 日）到 2020 年的 2 月 15 日。

下面我们最好通过一个例子来理解一下 CF。为了使问题简化，我们假设空头实际上并没有持有债券用于交割，下面我们将在合约的到期日（$=T$）来计算 CF 和 CTD。

考虑一个 10%的息票率，20 年期的美国长期国债，它每半年付息 5 美元，这样至到期日共付息 $n=40$ 次（每隔 6 个月）（见表 6—3）。如果这种债券到期收益率为 8%，则它的“公平价格”或是“理论价格”应该是 119.794 美元（每 100 美元名义价值），这样它的转换因子 $\mathrm{CF}_T=1.19794$。实质上，这个债券交割时的价值是名义息票率为 8%的债券价值的 1.197 94 倍。（按面值进行交易，因此 YTM=8%。）

表 6—3　**转换因子的计算**

数据：可用于交割的债券的息票率是 10%，并且距到期日还有 20 年（每半年付息一次）

问题：这种债券的转换因子是多少？

解答：如果假设这种债券的 YTM 是 8%（与合约中规定的名义债券相同），那么这个债券的理论价格应该是

$$P=\frac{5\text{ 美元}}{(1.04)}+\frac{5\text{ 美元}}{(1.04)^2}+\cdots+\frac{5\text{ 美元}}{(1.04)^{40}}+\frac{100\text{ 美元}}{(1.04)^{40}}$$

对于利息的 DPV 利用年金的计算公式得到

$P=(19.7928)5+(0.2083)100=119.794$(美元)

因此，对于实际可供交割的债券，理论价格为 $P=119.794$，转换因子为 CF=119.794（对于每 100 美元的名义价值）。

转换因子调整了实际用于交割的债券相对于期货合约中规定的名义利率为 8%的债券的相对价格，很容易得到如下结果：

> 如果实际用于交割的债券息票率>8%，那么 CF>1。
> 如果实际用于交割的债券息票率<8%，那么 CF<1。

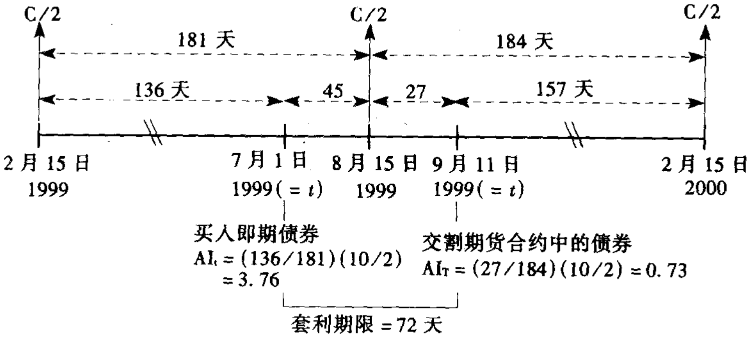
不同到期日和不同息票率的债券，具有不同的转换因子。随着到期日临近，对于同一种债券，转换因子也会随着时间变化（但是到期时间要超过 15 年，否则它将是不符合标准的债券）。在计算 CF 时，CBOT 假设收益率曲线是水平的，且总为 8%。但在实际中，这只可能是极少数的情况（如果出现的话）。这意味着那些合格债券的“真实价格”（通过即期利率进行定价）并不等于在计算 CF 时所应用的价格。因此，通常总是存在这样一类可供交割的债券，它们要比期货合约的票面价格所暗示的价格便宜一些，空头方就常常试图找出这些实际上“最廉价的可供交割债券”。

我们现在来研究一下空头交割标的债券时实际收到的金额。假设 F_T 是期货（在“头寸日”，参见下文）的结算价格。空头交割 20 年期 10%息票率的债券后将要收到：

$$\text{结算时期货空头得到的金额}=(\text{期货结算价格}\times \text{CF})+\text{可交割债券的应计利息}$$
$$=F_T\text{CF}_T+\text{AI}_T$$

注意到 F_T 是“结算价格”，而不是最初在期货合约中商定的价格。这是因为期货合约是逐日盯市的，因此任何以前获得的收益或是损失都已经计入保证金账户。

AI_T 是 T 时刻的应计利息，它基于实际交割的债券的下一次利息支付。例如（见图 6—2），如果 T 是 1999 年 9 月 11 日，并且实际用于交割的债券 2020 年 2 月 15 日到期，那么在每年的 2 月 15 日和 8 月 15 日进行半年期的利息支付（在 2000 年 8 月 15 日和下一年的 2 月 15 日之间共有 184 天）。空头应该在 1999 年 9 月 11 日交割债券，这时已经有 27 天的应计利息。因此，多头应该把这部分的应计利息的损失支付给空头，即 $\text{AI}_T=0.73$ 美元（$=(27/184)\times 10/2$）。这是因为空头持有标的债券 27 天，但是当他将债券交割给多头后，在下一次的利息支付时他却不能得到任何支付（参见 Cuthbertson 和 Nitzsche，2001）。



注：可供交割的债券在 2020 年 2 月 15 日到期，并具有 10% 的息票率。
可供交割的债券在 2 月 15 日和 8 月 15 日支付 10/2 美元的半年期利息。

图 6—2　对长期国债期货定价

最廉价可交割债券

假设现在是 T 时刻（即 1999 年 9 月 11 日），CBOT 指定了三种可以在 9 月用于实际交割的债券，他们的 CF 分别为 1.044，1.033 和 1.065。实际操作中，计算 CTD 债券的过程十分复杂，但是下面我们给出一个计算 CTD 债券的粗略思想，这可以通过选择具有最小**自然基差**（raw basis）的债券获得：

$$自然基差 = B_T - F_T\mathrm{CF}_T \tag{6.1}$$

其中，B_T 为可供交割债券的即期价格，F_T 为期货的结算价格，CF_T 为用于交割的债券的转换因子。

表 6—4 给出了上面三种用于交割债券的自然基差的计算过程。最后一栏表明债券 C 是 CTD（计算 CTD 债券的具体细节请见 Hull，2000）。虽然空头通常交割的债券是 CTD，但是也并不总是如此（见 Gay 和 Manaster，1986），产生这种现象的原因是，有些卖方想保护他持有的投资组合的久期，或是提供一种非 CTD 的债券来最小化他的缴税额。

表 6—4　　**CTD 债券**

可供交割的债券（到期时间）	净价（B）	转换因子（CF）	自然基差（$=B-F\times\mathrm{CF}$）
1. A 债券（2019）	112—4（112.125）	1.044	0.156
2. B 债券（2025）	112—8（112.25）	1.033	1.461
3. C 债券（2027）	114—8（114.25）	1.065	0.029

注：F（9 月的期货）=107—8（107.25）。

下面我们来分析一下当自然基差上升时，公式 6.1 如何变化，空头在交割时得到

$$空头收到的现金(每\ 100\ 美元名义值) = F_T\mathrm{CF}_T + \mathrm{AI}_T \tag{6.2}$$

其中，AI_T 为应计利息，转换因子调整了名义利率 8% 的债券的期货价格，这反映了对于 CF>1 的实际交割债券，当它的息票以名义利率 8% 折现时，将会有比较高的价格。空头在现货市场上要为这个债券支付的价格为：

$$空头支付的价格 = “净价” + 应计利息 = B_T + \mathrm{AI}_T \tag{6.3}$$

因此空头的净成本恰恰就是上面所定义的自然基差：

$$净成本 = (B_T + \mathrm{AI}_T) - (F_T\mathrm{CF}_T + \mathrm{AI}_T) = B_T - F_T\mathrm{CF}_T \tag{6.4}$$

6.3　利用长期国债进行对冲

对冲长期国债的原理与对冲短期国债的原理非常相似，后者我们已经在第 5 章中讨论过。如

果 A 是债券的多头，他担心债券价格下跌，那么他可以通过债券期货的空头对这个头寸进行对冲。相反，如果他想在未来买入债券，却担心债券价格上升（即收益率降低），那么他就应该买入债券期货。期货合约的最佳数量是由**基于久期决定的对冲比率**（duration based hedge ratio）所给出的（以前一章所给出关于利率期货的公式为基础，并考虑到 CTD 债券的转换因子）：

$$N_f=-\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\left(\frac{D_s}{D_f}\right)\beta_y\mathrm{CF}_{\mathrm{CTD}} \tag{6.5}$$

其中，TVS_0 为需要对冲的债券组合的总市场价值，$\mathrm{FVF}_0=(zF/100)$ 为一份期货合约的面值，S 为需要对冲的债券的即期/现货票面价格，F 为期货合约中 CTD 债券的票面价格，$\mathrm{CF}_{\mathrm{CTD}}$ 为期货合约中 CTD 的转换因子，D_s 为在对冲终止日需要被对冲的即期债券的久期，D_f 为合约中实际用来交割的债券的久期（在合约的终止日），y_s 为需要被对冲的标的债券的 YTM，y_f 为期货合约中债券的 YTM。

如果 y_s 和 y_f 是连续复利，那么 D 就是“久期”，但是如果 y_s 和 y_f 是到期收益率的报价（比如，当使用半年期的离散复利时），那么我们使用修正后的久期，即 $D_i/(1+y_i)$，$i=(S,F)$，β_y 由下面的回归得出

$$\Delta y_s=\alpha_0+\beta_y\Delta y_f+\varepsilon \quad 则 \quad \beta_y=\frac{\sigma(\Delta y_s,\ \Delta y_f)}{\sigma^2(\Delta y_f)} \tag{6.6}$$

那么期货合约的最佳数量是

$$N_f=-\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\left[\frac{D_s}{D_f}(\beta_y)\right]\mathrm{CF}_{\mathrm{CTD}}=-\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}[\text{Rel. vol.}]\mathrm{CF}_{\mathrm{CTD}} \tag{6.7}$$

这就是**久期决定的对冲比率**。方括号中最后一项通常被称为**相对波动率**（relative volatility）。如果假设即期利率和期货中的利率是一对一的变动（即收益率曲线平行移动），那么 $\beta_y=1$ 并且公式（6.7）可以简化为

$$N_f=-\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\left(\frac{D_s}{D_f}\right)\mathrm{CF}_{\mathrm{CTD}} \tag{6.8}$$

如果转换因子 CF=1，那么期货合约的面值就是 FVF。然而，如果 CF>1，那么用来交割的债券就有一个更高的息票率，因此久期就会比期货合约中的名义债券要低。因此，在期货合约中债券实际的久期是 D_f/CF，最佳的期货合约数量 N_f 应该增加一个转换因子 CF。

对冲单个债券

假设一个美国养老基金的经理在 5 月 1 日想对冲他持有的国债，这些国债的名义值为 $NB_0=$ 100 万美元，息票率为 10%，现价为 $S_0=101$—00（即每 100 名义美元，价值 101 美元）。即期头寸的市场价值为 $\mathrm{TVS}_0=1\,010\,000$ 美元，即 $NB_0(S_0/100)=1\,000\,000(101/100)$ 美元。但是这个基金经理担心在接下来的 3 个月（5 月 1 日至 8 月 1 日）中利率会上升，这样他的投资组合的价值会下跌，他将不能按计划支付养老金。表 6—5 给出了美元长期国债期货合约的细节，CTD 债券的 CF 是 1.12。基金经理在 5 月 1 日买入最近的 9 月份期货合约。期货合约的最佳数量 N_f 是

表 6—5　　**对冲单一债券**

现货头寸：5 月 1 日	**期货：5 月 1 日（9 月份交割）**
10%，长期国债	CTD 债券的 CF＝1.12
持有的名义债券 $NB_0=100$ 万美元	一份期货合约的规模 $z=100\ 000$ 美元
当前价格 $S_0=101$ 美元（每 100 美元 101 美元）	期货价格 $F_0=110—16$（110.50 美元）
市场价值 $\mathrm{TVS}_0=NB_0(S_0/100)=1\ 010\ 000$ 美元	面值 $\mathrm{FVF}_0=zF_0=110\ 500$ 美元
久期 $D_s=6.9$	久期 $D_f=7.2$
	1/32 的刻度价值等于 31.25 美元

期货合约的数量

$$N_f=-\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\frac{D_s}{D_f}\times \mathrm{CF}_{\mathrm{CTD}}=-10\text{（四舍五入后）}$$

对冲的结果：8 月 1 日

现货市场（8 月 1 日）	**9 月期货（8 月 1 日）**
$S_1=98—16$（98.5 美元）	$F_1=108—16$（每 100 美元 108.5 美元）
现货头寸的价值	期货空头的收益
$\mathrm{TVS}_1=(S_1/100)B=(98.5/100)1\ 000\ 000$ 美元	$=N_f z(F_0-F_1)/100$
$=985\ 000$（美元）	$=10(100\ 000$ 美元$)(2/100)=20\ 000$（美元）
现货头寸的损失$=((S_0-S_1)/100)B$	或者
$=((101-98.5)/100)1\ 000\ 000$ 美元	$=(2\times32)$个刻度$\times31.25$ 美元$\times10$ 份期货合约
$=25\ 000$（美元）	$=20\ 000$（美元）

净损失

经过对冲的净损失＝25 000 美元－20 000 美元＝5000 美元	未经过对冲的净损失＝25 000 美元

$$N_f=-\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\beta_p\mathrm{CF}_{\mathrm{CTD}} \tag{6.9}$$

其中，β_p 为现货和期货之间价格变化的 beta 值（参见第 5 章）。假设收益率平行移动（$\Delta y_s=\Delta y_f$），利用基于久期的对冲比率，可以得到 β_p，代入公式得到

$$N_f=-\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\left(\frac{D_s}{D_f}\right)\mathrm{CF}_{\mathrm{CTD}} \tag{6.10}$$

$$=-\left(\frac{1\ 010\ 000\text{ 美元}}{110\ 500\text{ 美元}}\right)\left(\frac{6.9}{7.2}\right)1.12=-9.14(0.958)1.12=-9.8\text{（卖空 10 份合约）}$$

有时现货头寸的面值被错误地认为是 $B_0=100$ 万美元，事实上应该是 $\mathrm{TVS}_0=B_0(S_0/100)=1\ 010\ 000$ 美元。但是如果债券接近面值出售，上述区别不会很大。假如基金经理最担心的事情发生了，在 5 月 1 日到 8 月 1 日利率上升。由于债券的即期价格由 $S_0=101—00$ 跌至 $S_1=98—16$，他在现货市场上的资本损失是 25 000 美元，但是由于期货价格从 $F_0=110—16$ 变动到 $F_1=108—16$，作为期货的空头可以获得 20 000 美元的收益，即(2×32)个刻度$\times31.25$ 美元$\times10$ 份期货合约。对冲的结果是 100 万美元名义值的投资组合产生了 5 000 美元的损失（大约 0.5%）。而没有被对冲的投资组合的损失将会是 25 000 美元（大约 2.5%）。如果这个基金经理并不希望

假设 $\Delta y_s = \Delta y_f$，那么根据历史数据将 Δy_s 对 Δy_f 回归就可以得到 β_y 的估计值。

对冲债券组合

为了便于讲解，我们假设基金经理的投资组合中仅有两种债券：1 000 万美元的 A 债券和 2 000万美元的 B 债券，因此（如果两种债券都以面值出售）$\mathrm{TVS}_0 = 3\ 000$ 万美元。利用公式（6.10）来计算需要卖空的期货合约的数目时，仅有的变化是用现货市场上债券头寸的加权久期来代替 D_S。这时

$$D_s = [w_a D_a + w_b D_b] \tag{6.11}$$

其中，$w_a = 0.33$（$= 10\ 000\ 000$ 美元/$30\ 000\ 000$ 美元）、$w_b = 0.66$（$= 20\ 000\ 000$ 美元/$30\ 000\ 000$ 美元）为市值权重，D_i 为债券 i 的久期，i＝A 或 B。

对冲：进一步的讨论

交叉对冲

一个持有公司债券组合的养老基金经理担心未来利率会上升，他可以利用卖空长期国债期货进行对冲。或者，如果一个公司想通过发行公司债券来筹集资金，但是具体的法律准备还需要大约 6 个月时间。财务官担心长期利率有上升的可能，这将导致融资成本上升。因此他可以通过卖空长期国债期货进行对冲。上述两个例子中，预测 Δy_s（公司债券收益率的变化）和 Δy_f（长期国债期货的收益率变化）之间的关系非常重要，因为在对冲期间，它们变化的数量很可能不同。我们可以利用回归的方法，但是结果可能会出现很大误差，这是因为公司债券中存在独特风险（如信用违约风险），它们影响着潜在的关系。

凸度、扰动和回归

由久期决定的对冲比率衡量了现货市场中的债券价格变化相对于期货市场上的 CTD 债券价格的变化（即 $\beta_p = \sigma_{(\Delta S/S, \Delta F/F)} / \sigma^2_{\Delta F/F}$），利用久期给出了这些价格变化的一个近似。我们可以通过凸度来提高这个近似值的准确程度。或者，我们也可以放弃久期，而利用常规的“完全”债券定价公式来计算当投资组合的债券的收益率或是期货合约中实际用于交割的债券的收益率下降 1%（100bp）时这些价格的变化。对于价格平行移动和不平行移动的情况这都是可以做到的（即期和远期的收益率曲线的变化提供了计算中所需的最基本输入变量）。这也是情景分析的一种形式，有时被称做**扰动分析**（perturbation analysis）。它直接给出了 $\Delta S/S$ 和 $\Delta F/F$ 的值，因此

$$N_f = \frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0} \frac{(\Delta S/S_0)}{(\Delta F/F_0)} \mathrm{CF}_{\mathrm{CTD}} \tag{6.12}$$

其中，ΔS 为投资组合中债券实际的价格变动（假设即期收益率下降 $x\%$）。ΔF 为期货合约实际的价格变动（假设 CTD 债券收益率的变动是 $z\%$）。

对冲中的风险

被对冲的头寸并不是一个完美的对冲头寸，这是因为：

- 对冲的期限（比如，从 5 月份到 8 月份的 3 个月）和期货合约的到期时间（9 月份到期的期货合约）并不一致。
- 实际用来交割期货合约的债券不确定，另外确切的交割日期也不确定。
- 所有用来计算现货市场和期货市场相对价格的方法都存在一定误差，部分原因是由于 CTD 债券很难确定（因此久期也很难确定）。
- 收益率曲线的移动并不一定平行，因此我们不能总是假设 $\Delta y_s = \Delta y_f$。

然而大量的研究（例如 Toevs 和 Jacob，1986；Gay 等，1983 和 Chance 等，1986）发现当价格敏感度的对冲比率（利用久期得出）表现非常好的时候，利用长期国债期货进行对冲可以将风险降低 50%～70%。利用长期国债期货对公司债券的现货头寸进行对冲和由久期决定的对冲比率也是非常有效的，尽管这仅仅是交叉对冲。

百搭牌游戏

关于美国长期国债期货还有另外一个实践性的问题，这就是被称为**百搭牌游戏**（wild card play）的策略。在 CBOT，期货合约的交易在下午 3 点就停止了，而实际的长期国债交易却要到下午 5 点才结束。这样，期货合约的空头要等到傍晚才能向清算所发出交割意向的通知。当指令发出后，期货合约的价格是在清算价格（在下午 3 点交易结束铃声响起之前的交易价格）的基础上进行计算的。然而空头可以等待一段时间来看看他是否能够在现货市场上以比较低的价格买到用于交割的债券。为了理解这种可能性，我们必须进一步研究长期国债期货的交割过程。交割是一个持续 3 天的过程，包括：

(1) **头寸日**（position day）：空头将他的交割意向通知清算所，准备两个工作日之后交割。

(2) **意向通知日**（notice of intention day）：清算所指定一个愿意进行交割的多头。此时空头有义务在下一个工作日进行交割。

(3) **交割日**（delivery day）：债券在这一天被交割（最后一个可能的交割日是在交割月份最后 7 天前的一个工作日）。

这个交割过程可能导致空头在任何一个“头寸日”进行“百搭牌游戏”。如果债券的即期价格在下午 3 点到下午 5 点之间下跌，则空头可以在现货市场买入“价格较低”的 CTD 债券，同时发出交割意向的通知，因为他知道通过交割可以获得一个较高的结算价格，这是到当天的下午 3 点为止所决定的。然而，如果即期（债券）价格没有下降，那么他可以等到接下来的一天，再重复相同的策略（直到交割月份最后一个交割日前的最后一个工作日）。本质上，空头享有一个可以在交割月份内执行的隐含期权，然而由于多头并不知道将要交割债券的准确价格（价值），因此多头的风险上升了。

由于空头可以交割多种符合条件的债券，因此这也被称为空头的**品质期权**或是**可转换期权**（quality or switching option）。因此，即使空头持有的债券与他的期货头寸中所规定交割的债券不同，当收益率曲线移动时，他仍然可以选择交割另外一种较为便宜的债券。另外，**相时期权**（timing option）适用的情况是空头所持有的用于交割的债券的息票率大于在现货市场上筹资的成本（回购利率）。这时，空头推迟交割比较有利，由于长期国债期货的最后交易日是从最后一

个工作日向前的第 8 天，因此这也可以看做是空头持有的**月末期权**（end of the month option）。在这段时期内期货的结算价格是锁定的，但是空头仍然有权在倒数第 2 个工作日之前的任何一天宣布他的交割意向。因此他可以在这段时间内观望债券的即期价格是否下跌以及是否能用较低价格的债券进行交割。

上面这些期货空头所拥有的隐含期权会导致较低的期货价格，这是为了补偿多头所增加的风险。然而，大多数时候人们认为这些期权的存在并没有破坏现购自运套利关系。但是这些可供空头使用的期权在准确计算最佳对冲比率和基于现购自运套利的期货定价中制造了一定的困难（参见下文）。

本章的以下部分讨论了关于长期国债期货的定价和套利机会中更为复杂的内容。部分读者可以略过这些内容。

6.4　长期国债期货的定价

零息债券

我们先来考虑一个期货定价的简单例子，这里我们假设用来交割的标的资产是单一的零息债券，并且交割日 T 是已知的。那么在 $t=0$ 时我们可以以利率 r 借款，并且在现货市场上以价格 S 买入标的债券，然后准备用它来对期货空头进行交割。普通的无风险套利保证了：

$$F=S(1+r_sT)\quad（单利）\tag{6.13a}$$

$$F=S(1+rT)^T\quad（离散复利）\tag{6.13b}$$

$$F=Se^{rT}\quad（连续复利）\tag{6.13c}$$

隐含的回购利率 $\hat{r}$ 是通过在 $t=0$ 时以价格 F 卖出期货合约同时以价格 S 买入标的债券所得到的收益率，因此 $\hat{r}=(F/S)^{1/T}-1$。在这个例子中当隐含的回购利率高于在实际的再回购市场上的融资成本（买入即期资产）r 时，即当 $\hat{r}>r$ 时，无风险套利是可行的。

附息债券

实践中并没有关于零息债券的期货合约。不幸的是，正如我们所看到的，当标的资产是附息债券时，我们很难精确地为期货合约公平定价。这是因为在交割日期 T 之前空头的决策所具有的弹性和 CTD 债券的票面价格（$=S$）。

假设现在是 1999 年 7 月 1 日，$r=3$（连续复利），你正在考虑利用 9 月期的期货合约进行现购自运套利是否可行，其中我们假设这个期货合约的交割日已知，是 9 月 11 日（见图 6—2）。

由于长期国债可以用来交割期货合约，因此通过在 7 月 1 日买入一份长期国债的现货并持有至 9 月 11 日就创造了一份合成债券期货。我们假设 CTD 债券是息票率为 10%的在 2020 年 2 月 15 日到期的长期国债（见图 6—2），而且它的 CF 是 1.22。这种具有 10%息票率的标的债券在每年的 8 月 15 日和 2 月 15 日支付 5 美元的半年期利息。从 7 月 1 日至期货合约的到期日，这个标

的债券在 8 月 15 日支付一次利息 $C=5$ 美元，这部分资金投资了 27 天，在 T 时刻的累计价值应为 $\mathrm{FVC}_T=5\mathrm{e}^{0.03(27/184)}=5.022$ 美元。在 7 月 1 日（即时刻 t）以无风险利率 r（回购利率）借入资金并在现货市场上以票面价格 S_t 买入债券，这样在 9 月 11 日（即时刻 T）所欠的金额就为 $S_t\mathrm{e}^{r(T-t)}$（即购买成本加上利息）。因此在时刻 T 现货市场上债券的净持仓成本就是

$$\text{现货市场上债券的净持仓成本（在 } T \text{ 时刻）}=S_t\mathrm{e}^{r(T-t)}-\mathrm{FVC}_T \qquad (6.14)$$

但是上述的策略之所以创造了一个合成债券期货，是因为确保了 t 时刻在现货市场上买入的债券可以在 T 时刻用来交割期货合约。假设我们知道 t 时刻 CTD 债券的 CF_t，并且期货合约的报价为 F_t，那么在 t 时刻期货多头支付给空头的票面价格是

$$\text{期货在 } T \text{ 时刻的票面价格 IPF}=F_t\mathrm{CF}_t+\mathrm{AI}_T \qquad (6.15)$$

其中，AI_T 为在 T 时刻 CTD 债券的应计利息（见上文），注意到 FVC_T 应用于发生在 $t=7$ 月 1 日到 $T=9$ 月 11 日之间的息票支付，它被标的债券的持有者获得。相反，AI_T 指的是下一次息票支付（发生在 2000 年的 2 月 15 日）的比例。

由于实际的期货合约和合成的期货合约都在 T 时刻交割债券，因此他们的成本必须是相等的，否则就会出现无风险套利利润。因此公式（6.14）和公式（6.15）相等，得到

$$F_t(\mathrm{CF}_t)+\mathrm{AI}_T=S_t\mathrm{e}^{r(T-t)}-\mathrm{FVC}_T \qquad (6.16\text{a})$$

或

$$F_t=(1/\mathrm{CF}_t)(S_t\mathrm{e}^{r(T-t)}-\mathrm{FVC}_T-\mathrm{AI}_T) \qquad (6.16\text{b})$$

利用离散复利时，上式等于

$$F_t=(1/\mathrm{CF}_t)[S_t(1+r)^{(T-t)}-\mathrm{FVC}_T-\mathrm{AI}_T] \qquad (6.16\text{c})$$

如果在套利期间内没有利息支付（即 $\mathrm{FVC}_T=0$），并且没有应计利息（即 $\mathrm{AI}_T=0$），另外可交割的债券是期货合约中指定的那种（$\mathrm{CF}=1$），那么不难想到，上面关于 F 的公式简化成关于零息债券的期货价格，也就是 $F_t=S_t\mathrm{e}^{r(T-t)}$。

套利

举个例子，如果 $\mathrm{IPF}_t>(S_t\mathrm{e}^{r(T-t)}-\mathrm{FVC}_T)$，那么会产生无风险套利利润。套利者可以在 t 时刻以 r（回购利率）借入 S_t，用这笔钱购入债券，然后以 IPF_t 卖出期货合约。在期货合约终止的 T 时刻欠下的金额将会是

贷款加上利息（$=S_t\mathrm{e}^{r(T-t)}$）

减去在 T 时刻得到的任何（再投资的）息票支付 FVC_T 的价值

因此在 T 时刻，现货市场的净成本是（$S_t\mathrm{e}^{r(T-t)}-\mathrm{FVC}_T$），但是套利者得到更大的一笔金额 IPF（在 T 时刻）。这个套利产生了对即期债券额外的需求，因此 S_t 将会上升。期货合约销售量的增加将会使 F_t 降低，直到公式（6.16）再次成立。然而要注意，这个策略并不是完全没有风险的，原因是现货市场上的息票支付在派发之后必须用于再投资，而在期货合约的期限之内无风险利率是可能变化的。（在 t 时刻，期望的最佳再投资利率应该是隐含的远期利率，为了锁定在

这个利率上，我们需要一份（合成的）FRA，更多的细节参见 Cuthbertson 和 Nitzsche，2001。）因此现购自运套利仅仅为债券期货合约的价格提供了一个近似值。

我们还需要讨论更进一步的细节。通常情况下，如果在对冲交易的期间内（即从 t 至 T 时刻），CTD 债券支付了 N 次 C_i 的息票，我们假设在时间区间 $t_i>0$ 内（从 t 开始衡量，以年为单位）的预期无风险再投资利率是 r_i，那么所有息票支付的未来价值

$$\mathrm{FVC}_T=\sum_{i=1}^{N}C_i e^{r_i(T-t_i)} \tag{6.17}$$

一个例子

假设 CTD 债券的 CF（在 7 月 1 日）是 CF＝1.22（见图 6—2）。注意到，在 t 时刻（7 月 1 日）现货市场上债券的票面价格 S_t 是“净价”或是市场报价 B，加上该债券的在 t 时刻的应计利息（即从 1999 年 2 月 15 日至 1999 年 7 月 1 日）：

$$S_t=B_t+\mathrm{AI}_t \tag{6.18}$$

在 7 月 1 日交割债券的即期价格（净价）是 $B_t=130$，另外从图 6—2 中可以看出从 1999 年 2 月 15 日至 1999 年 7 月 1 日的应计利息是

$$\mathrm{AI}_t=\frac{136\text{ 天}}{181\text{ 天}}\left(\frac{10}{2}\right)=3.76\text{（美元）} \tag{6.19a}$$

因此

$$S_t=130\text{ 美元}+3.76\text{ 美元}=133.76\text{（美元）} \tag{6.19b}$$

算出 S_t 至交割日 9 月 11 日（即 72 天的期限）的未来值，再减去 8 月 15 日所付息票利息 FVC_T 的未来值 f，得到 T 时刻现货市场的持仓成本是

$$(S_t e^{r(T-t)}-\mathrm{FVC}_T)=133.76\text{ 美元 }e^{0.03(72/365)}-5.022\text{ 美元}=129.53\text{(美元)} \tag{6.20}$$

期货空头应该得到的累计利息是

$$\mathrm{AI}_T=\frac{27\text{ 天}}{184\text{ 天}}\left(\frac{10}{2}\right)=0.73\text{(美元)} \tag{6.21a}$$

因此

$$\begin{aligned}F_t&=(1/\mathrm{CF}_t)(S_t e^{r(T-t)}-\mathrm{FVC}_T-\mathrm{AI}_T)\\&=(1/1.22)(129.53\text{ 美元}-0.73\text{ 美元})=105.57\text{(美元)}\end{aligned} \tag{6.21b}$$

注意，对于公平的价格 F，这个结果实际上是一个估计值，产生这个结果的原因是我们无法确切得知交割日期、用来交割的债券以及标的债券利息的再投资收益率（因为如果收益率曲线移动的话，会与现行的回购利率不同）。

再回到 CTD 债券

上面我们通过利用“自然基差”计算出了在到期日 T 期货合约的 CTD 债券。假设在 $t<T$

时，你有一个长期国债期货空头的裸头寸。当然这样的风险会特别大，因此应该买入可交割的债券来对冲这个期货合约的空头。但是问题是如何在一系列合格的债券中找出 CTD 债券呢？这同样可以使用上面的分析，但是要“反过来分析”。在 t 时刻你能知道期货空头的价格 F_t，假设选择某种合格的债券 A 作为可能的 CTD。因此就知道了对于交割债券 A 将要收到的价格 $\mathrm{IPF}=F_t(\mathrm{CF_A})+\mathrm{AI}_{\mathrm{A},T}$。在 T 时刻的资金净流入额是 IPF 减去债券 A 的持仓成本：

$$\begin{aligned}\text{净收入}&=\text{由期货得到的金额}-\text{为标的物支付的金额}\\&=F_t(\mathrm{CF_A})+\mathrm{AI}_{\mathrm{A},T}-(S_{\mathrm{A},t}\mathrm{e}^{r(T-t)}-\mathrm{FVC}_{\mathrm{A},T})\end{aligned}\tag{6.22}$$

可以对于另外的一种合格的债券 B 重复上述的计算过程。在任何时刻（$t<T$），真正的 CTD 将会是产生最小的负净现金流入的债券（净现金流总为负值，否则现购自运套利将会产生套利利润）。另外，在 t 时刻确定 CTD 债券是非常重要的，因为 CTD 债券是用来确定最佳对冲比率的（上面已经介绍过）。最后还要注意当 $t=T$ 时，$T-t=0$，$S_t=B_T+\mathrm{AI}_T$，$\mathrm{FCV}_T=0$，这时上面的公式就简化成了“自然基差”的公式，即公式（6.4）。

隐含回购利率

除了可以考虑套利机会的现金收益，我们可以使用隐含回购利率的方法。在第 5 章讨论短期国债期货时我们就已经用到了隐含回购利率。现在我们再通过它来创造一个使用长期国债期货合约的套利机会。隐含回购利率是另一种用来确定无风险套利是否可行的途径。由于我们必须同时考虑到 CF 和应计利息，因此与短期债券期货相比，在计算长期国债的回购利率时数学上相对复杂一些。然而，二者的原理是完全一致的。在 $t=0$ 时刻以价格（$B_0+\mathrm{AI}_0$）在现货市场上买入标的债券，然后卖掉一份在 T 时刻交割的期货合约，这样产生的收益率就是隐含回购利率。这个收益率或**隐含回购利率**在应用离散复利时可由下式给出：

$$(1+\text{隐含回购利率})=\left(\frac{\text{在 }T\text{ 时从期货得到的现金}}{t=0\text{ 时为标的债券支付的现金}}\right)^{1/T}\tag{6.23a}$$

或

$$1+\hat{r}=\left(\frac{F_{0,T}\mathrm{CF}_0+\mathrm{AI}_T+\mathrm{FVC}_T}{B_0+\mathrm{AI}_0}\right)^{1/T}\tag{6.23b}$$

我们用 $F_{0,T}$ 来表示在 $t=0$ 时刻所达成的关于在 T 时刻支付（即交割标的债券）的期货合约价格。应计利息是 AI_T。由于我们必须在 $t=0$ 时刻买入即期债券，那么 CF 在一开始就是确定的（$=\mathrm{CF}_0$）。套利者持有标的债券，因此他可以收到在 $t=0$ 至 $t=T$ 期间所有的息票支付，这可用于再投资，在 T 时刻产生的累计总额是 FVC_T。标的即期债券在 $t=0$ 时的票面价格是（$B_0+\mathrm{AI}_0$），这要通过以真正的（定期）回购利率 r（离散复利）来借入：

因此如果隐含回购利率 $\hat{r}>$ 真正的回购利率 r 时，现购自运套利可以获利。

利用公式（6.23b）很容易得到当 $\hat{r}>r$ 时：

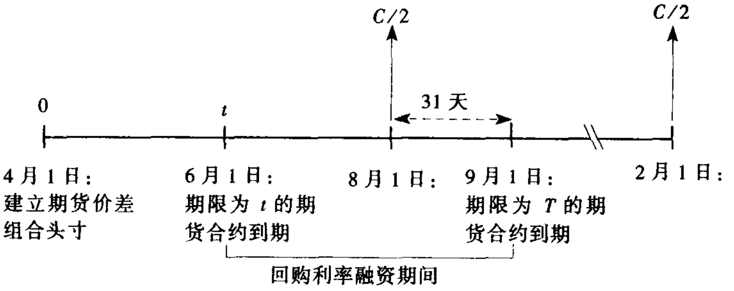
$$\frac{F_{0,T}\mathrm{CF}_0+\mathrm{AI}_T+\mathrm{FVC}_T}{B_0+\mathrm{AI}_0}>(1+r)^T\tag{6.24}$$

这将毫不奇怪地归结至我们前面的公式。利用隐含回购利率来决定套利是否有利可图的原因是，作为一个百分比的收益率，它很容易与交易者的交易屏幕上所出现的（实际）回购利率的报价进行比较。

6.5 长期国债期货价差和相时操作

价差是一种资产的多头与另一种（类似）资产的空头。在收益率曲线弯曲或是平行地变化时价差都可以用来进行投机。例如一个看多长期国债期货头寸的交易者可以通过同时在现货市场上卖出一份长期（10 年期）国债（与期货合约中 CTD 债券的久期不同）来构造一个价差组合。当期货和现货价格都发生变化且变化数量不同时，价差交易者可以从中获利（由于它们的标的资产的久期是不同的）。如果利率下降，作为期货多头的收益要大于现货市场上空头的损失。持有价差组合比仅仅持有一个期货的裸头寸的风险要小得多（同时潜在的收益或是损失也要小一些）。然而，持有这样的投资策略的成本是非常昂贵的，原因是在现货市场上卖空时通常要求大额的保证金。如果利用两份到期日不同的期货合约来构造价差组合，成本可能会相对小一些。

首先，我们来看一下如何使用价差组合头寸来利用沿着收益率曲线的错误定价获利（见图 6—3）。假设在 $t=0$ 时（1999 年 4 月 1 日），我们买入了一份到期日为 t（1999 年 6 月 1 日）的长期国债期货，同时卖出了一张 T 时刻（1999 年 9 月 1 日）到期的期货合约，这称为**买入价差组合**（buying the spread），即买入较近的期货合约。当空头期货到期时，我们用标的债券进行交割（假设在 2020 年 8 月 1 日到期），以回购利率（适用于 6 月 1 日至 9 月 1 日）借入资金来支付期货价格 $F^{(t)}$（加上累计利息）。



4 月 1 日：期货价差组合 = 6 月份价格为 $F^{(t)}$ 的期货合约多头 + 9 月份价格为 $F^{(T)}$ 的期货合约空头

图 6—3　长期国债期货价差组合

这份债券一直被持有至 9 月 1 日，并以期货价格 $F^{(T)}$ 加上所有的累计利息 AI_T（由于持有标的债券到 2000 年 2 月 1 日的一次利息支付）来交割 9 月份的期货合约的空头头寸。这个价差交易策略的收益率是隐含回购利率 $\hat{r}$：

$$(1+\hat{r})=\left(\frac{\text{在 } T \text{ 时得到的金额}}{\text{在 } t \text{ 时支付的金额}}\right)^{1/(T-t)} \tag{6.25a}$$

或

$$(1+\hat{r})=\left(\frac{F^{(T)}\mathrm{CF}^{(T)}+\mathrm{AI}_T+\mathrm{FVC}_T}{F^{(t)}\mathrm{CF}^{(t)}+\mathrm{AI}_t}\right)^{1/(T-t)} \tag{6.25b}$$

其中，FVC_T 是标的债券在 1999 年 8 月 1 日的息票支付累计到 $T=9$ 月 1 日的价值。如果在 6 月 1 日至 9 月 1 日期间，隐含的回购利率 $\hat{r}$ 超过了以实际的回购利率 r 借款的成本，这个价差交易就是有利可图的。

注意，实际的回购利率是在 $t=0$（4 月 1 日）时的远期利率。那么我们如何才能在 $t=0$（4 月 1 日）时刻锁定这个未来的借款利率呢？为了做到这点，我们可以利用 6 月到期的短期国债期货。在 4 月 1 日，给定短期国债期货的价格是 $F_{\text{T-bill}}=99$ 美元（对于面值是 100 美元而言），则这个期货的隐含收益率是 4.16%，即$(100/99)^{365/90}-1$。因此如果 $\hat{r}(=4.5\%)>r(=4.16\%)$，我们将会在 4 月 1 日采取下面这个龟式交易策略：

龟式交易

买入长期国债期货价差并卖出 6 月份的短期国债期货。

在 4 月 1 日卖出短期国债期货并在 6 月 1 日进行交割将保证你可以在 6 月 1 日收到现金，这些现金同时可用于支付交割的长期国债。由于使用短期国债期货的融资成本低于在长期国债期货价差中的隐含回购利率 $\hat{r}$（$=4.5\%$），因此这个交易策略就可以产生一定的额外利润。

价格在 $t=0$ 的时候头寸状况恰好相反，也就是说 $r(=4.8\%)>\hat{r}(=4.5\%)$，那么就可以卖出长期国债价差组合。即在 $t=0$（4 月 1 日）时卖出 t 期的长期国债期货，因此可以在 t 时刻收到现金。同时（t 时刻）买入 T 期的长期国债期货，这需要在 T 时刻进行支付。这类似于利用一个远期交易借入资金。在 4 月 1 日也可以买入在 6 月 1 日交割的 6 月期短期国债期货。在 6 月 1 日通过卖出 t 期的长期国债期货来支付短期国债期货的交割。3 个月后，在 9 月 1 日，期货合约交割的短期债券到期。它的面值是 100 美元，这说明在 6 月 1 日至 9 月 1 日期间借出资金的利率是 $r=4.8\%$。它超过了卖出长期国债期货价差组合的成本即隐含的回购利率 $\hat{r}$（$=4.5\%$）。上述的策略称为**市场内价差组合**（intramarket spread），原因是它们涉及的两种债券期货合约的标的资产相同，但是到期日不同。由于确定 CTD 债券以及息票收入的再投资利率是很困难的，因此他们并不是无风险的。

市场间价差组合的一个例子是 **NOB 策略**（notes over bonds strategy）。这个策略是基于交易者对于收益率曲线未来移动的预测进行获利的。如果考察长期国债的定价公式，并且不考虑任何累计利息，我们便可以对 NOB 策略进一步了解。假设目前是 4 月 1 日，我们有中期国债和长期国债期货合约可供使用，它们都在 9 月有相同的交割日期：

$$\text{中期国债期货：}F^{(1)}=S^{(1)}\mathrm{e}^{r(T-t)}/\mathrm{CF}^{(1)} \tag{6.26a}$$

$$\text{长期国债期货：}F^{(2)}=S^{(2)}\mathrm{e}^{r(T-t)}/\mathrm{CF}^{(2)} \tag{6.26b}$$

假设我们认为收益率曲线将会变得更陡峭，因此 0 至 5 年的利率将会下降，15 年的利率可能上升，也可能下降，但是幅度会比较小一些。那么我们预期 $S^{(1)}$ 将要比 $S^{(2)}$ 的上升更多一些，因此 $F^{(1)}$ 与 $F^{(2)}$ 相比上升也会更多一点。但是，两种期货合约都持有多头可能会有很大的风险，因为整体的利率水平可能实际上是上升的，然而，如果持有中期国债期货的多头和长期国债期货的

空头，当收益率曲线变化非常剧烈时仍然是可以获利的。即使所有的利率都一起变化，当 $F^{(2)}$ 比 $F^{(1)}$ 下跌得更加剧烈时（由于标的债券的久期是不一样的）也是可以获利的。值得注意的是在多头价差组合中必须考虑的一个事实：当即期收益率发生相同的变化时 $S^{(1)}$ 比 $S^{(2)}$ 的变化要小，原因在于 $S^{(1)}$ 的久期要比 $S^{(2)}$ 小。另外转换因子的差别也必须考虑到，因为它们影响到了每一份 F 的变化。在实际操作中这些需要考虑的事项说明了在 NOB 价差组合中并不是每一份合约的空头都对应着一份合约的多头，而是两种期货合约一定比例的头寸组合。

相时操作

如果你持有一份债券的组合，并且预期在下个月利率将会下降，那么可能应该卖掉具有较低久期的债券而持有较高久期的债券。因为后者价格的上升可能要大于前者。然而，如果 1 个月后的事实证明预期是正确的，由于卖掉和买入这些债券然后逆转这些交易可能会有较高的交易成本，因此这样做的成本是非常高的。一个成本更低的做法是持有最初的债券组合并买入（或卖出）长期债券期货。假设：

D_s＝现有债券组合的久期

D_r＝期货合约中债券的久期

D_h＝目标（要求）的久期

那么达到所要求的久期 D_h 所需的期货合约的数目是（参见附录 6.1）

$$N_f = -\left(\frac{D_s - D_h}{D_f}\right)\left(\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVF}_0}\right)\left(\frac{1+y_f}{1+y_s}\right)\left(\frac{\Delta y_s}{\Delta y_f}\right) \qquad (6.27)$$

其中，我们通常假设 $\Delta y_s = \Delta y_f$（离散复合利息）。公式（6.27）经过简化后的一个特例就是计算最小方差对冲比率的公式，即当 $D_h = 0$ 时。计算 N_f 的公式可用于市场时机的相时操作策略中。

相时操作策略

- 如果你预期收益率上升，因此需要债券组合具有更低的久期，那么卖出期货合约。
- 如果你预期收益率下降，因此需要债券组合具有更高的久期，那么买入期货合约 。

6.6 本章摘要

- 长期国债期货合约是比较复杂的，这是由于**转换因子、最廉价可交割债券和百搭牌游戏**的原因造成的。
- 长期国债期货可以用于对冲国债组合，此时要通过**价格敏感对冲比率**来确定需要卖空的期货合约的数量。相反，如果对冲将来买入的债券，需要在今天买入长期国债期货。
- 长期国债期货也可以对冲公司债券组合，虽然这是一个**交叉对冲**，但也会比较成功。

- 由于**基差风险**（即标的资产的即期和期货价格并不严格按照相同的数量变化），完美的对冲是不可能的，收益率曲线不平行变化使这个问题更加严重。
- 裸期货头寸的风险非常大，因此利用长期债券合约进行**投机通常**涉及**价差交易**。期货也可以用于**相时操作**策略，也就是说当投资者预测利率下降（或上升）时将会增加（或降低）现有债券投资组合的久期。
- 长期国债期货合约的**公平价格**可以通过现购自运套利来确定，但是由于实际可能用于交割的债券的不确定性，这将导致实际的期货价格与公平价格不同。
- 可盈利的**套利机会**通常可以通过**隐含回购利率**表示。如果通过现购自运套利得到的隐含回购利率大于或是小于实际的借款成本，那么可盈利的套利机会就是可能的。

章末练习

1. 你持有的债券组合多头的久期是 12 年，准备利用标的债券久期为 3 年的期货合约对头寸进行对冲。可以利用因子 4（=12/3）来计算对冲所用期货合约的数目 N_f。如果 12 年的利率的波动率要低于 3 年的利率的波动率，那么这个对冲是否有效？

2. 如果你持有的债券组合多头的久期是 10 年，通过直觉判断，如何用长期国债期货来降低债券组合的久期？为什么希望债券组合具有比较低的久期？

3. “百搭牌游戏”是如何让美国长期国债期货空头受益的？

4. 在 2 月 15 日价值为 100 万美元的债券组合的平均久期是 8.0 年，现在 9 月份长期国债期货合约的报价是 110—16，这份期货合约最廉价可交割债券的久期是 7.0 年。应该如何对接下来的 7 个月中利率的变化进行对冲？

5. 现在美国长期国债期货的价格是 101—12，下面三种债券哪个是最廉价可交割债券？

债券	价格	转换因子（CF）
2	142.20	1.369 0
3	120.00	1.120 0
4	144.16	1.410 0

6. 在 7 月 1 日持有一个债券组合，它的价值是 1 000 万美元，久期是 7.0 年，12 月份的美国长期国债期货合约的价格是 95—12，最廉价可交割债券的久期是 9 年，平均来说，债券收益率的任何变化都伴随着期货收益率 90%的变化。

(a) 如何在接下来的 2 个月中对债券组合进行对冲？

(b) 如何使债券组合的久期下降到 3.0 年？

7. 假设目前是 6 月 30 日，一个具有 10%息票率的债券的现行报价（不考虑任何累计利息和回扣利息）是 112。在每年的 2 月 4 日和 8 月 4 日进行息票支付。这个债券是在 9 月 20 日到期的 9 月份美国长期国债期货合约的最廉价可交割债券。这个可用于交割的债券的转换因子是 1.2。在 6 月 30 日，期限结构是水平的，“利率”是 9%（连续复利）。（注意，在 2 月 4 日和 8 月 4 日

之间共有 182 天，在 2 月 4 日和 6 月 30 日之间共有 147 天，在 8 月 4 日和 9 月 30 日之间有 47 天，在 8 月 4 日和下一年的 2 月 4 日之间有 184 天)。

(a) 在 6 月 30 日，息票率为 10%的标的债券的即期票面价格是多少?

(b) 长期国债期货的无套利价格是多少?(标的债券的息票率为 10%)

(c) 如果标的资产是息票率为 10%的债券，长期国债期货的报价应该是多少?(注意，期货报价中包含了应计利息)

(d) 如果期货合约的标的资产实际上是“标准的”息票率为 8%的债券(距到期日多于 15 年)，那么 CBOT 对期货合约的报价是多少?

附录 6.1　相时操作和久期

假设持有长期国债组合的久期是 D_s，我们试图利用长期国债期货合约来改变它的久期以达到事先要求的水平 D_h。对冲后的组合包括长期国债和长期国债期货(不考虑应计利息)，它的价值是：

$$V=(NB)S+N_f(zF) \tag{A6.1}$$

$$dV=(NB)dS+N_f(zdF) \tag{A6.2}$$

其中，NB 为债券组合的名义价值(1 000 万美元)，S 为债券的票面价格(每 1 美元名义价值)，z 为合约的规模(对于美国长期国债期货是 100 000 美元)，F 为长期国债期货的期货(票面)价格，FVF $(=zF)$ 为一份期货合约的面值，N_f 为期货合约的数量(是需要我们确定的)，TVS $(=NB\times S)$ 为债券头寸的即期价值。

利用(连续复利)：

$$dS/S=-D_s dy_s \qquad dF/F=-D_f dy_f \qquad y_s=\alpha+\beta_y y_f$$

代入公式(A6.2)得到

$$dV=-[(\text{TVS})D_s\beta_y+N_f D_f(\text{FVF})]dy_f \tag{A6.3}$$

我们对冲后的债券组合所要求的变化是

$$dV_h=-D_h(\text{TVS})dy_f \tag{A6.4}$$

使(A6.3)和(A6.4)相等，可以得到

$$N_f=\left(\frac{\text{TVS}}{\text{FVF}}\right)\left(\frac{D_h-D_s\beta_y}{D_f}\right) \tag{A6.5}$$

(如果使用离散复利，还会有另外一项$(1+y_f)/(1+y_s)$)。通过公式(A6.5)我们可以得到：

$$D_h=0\Rightarrow N_f=-\left(\frac{\text{TVS}}{\text{FVF}}\right)\left(\frac{D_s}{D_f}\right)\beta_y \quad \text{(即期货合约的空头)}$$

$D_h > \beta_y D_s \Rightarrow$ 期货多头

$D_h < \beta_y D_s \Rightarrow$ 期货头寸

公式(A6.5)的一个特例是最小方差对冲比率(即 $D_h = 0$)。为了增加（或降低）标的（现货）债券组合的久期，我们可以看多（或看空）长期国债期货。这是很合理的，比如说，如果债券组合的持有者（即多头）想要增加风险，她就会买人长期国债期货合约，如果利率的确是下降的，那么它在债券组合和期货多头上都可以获利，这个结果和增加标的债券的久期是等价的。

生品与风险管理　金融工程——衍生品与风险管理

第3部分

期权和互换

金融工程——衍生品与风险管理

金融工程——衍生品与风险管理

第7章

期权市场

学习目标

- 理解看涨期权和看跌期权的多头和空头在**到期日的收益曲线**。能够说明期权如何用于：(i) 投机，(ii) 对不利结果提供“**保险**”，同时允许投资者获得“上行利润”。
- 说明为什么在到期日之前，**欧式期权的价格**随着期权合约中标的资产（如股票）价格的变化而变化（这就是著名的Black-Scholes期权价格公式）。这使得利用期权进行短期投机成为可能。尽管一个投机者不能在到期日之前执行欧式期权，但她可以通过平仓交易来获得利润或损失。
- 解释用于看涨期权和看跌期权的一些术语，如：“实值期权”、“平值期权”和“虚值期权”，**内涵价值**（intrinsic value）和**时间价值**（time value）。
- 讨论期权市场的组织结构，包括清算所的作用。理解报纸上的期权行情报价。
- 比较交易性的期权市场和**场外交易**市场。

7.1 期权

期权合约在许多交易所被大量地交易，它们的标的资产可以是股票、股票指数、利率、货币、商品、期货合约等。同时，期权还有一个很大的 OTC 市场。在绝大部分期权合约中，期权交易的机制和所使用的术语是通用的。

看涨期权

欧式看涨期权给持有者一种权利（而不是义务）：

- 在未来特定的时间（**到期日**）；
- 以确定的价格（**敲定价**（strike price）或**执行价**（exercise price））；
- 和事先确定的数量（**合约规模**（contract size））；
- 来**购买**标的资产（the underlying）的权利；
- 为了这种权利，你需要支付**看涨期权金/价格**。

欧式期权（European option）只能在到期日执行，而**美式期权**（American option）却可以在到期日之前（包括到期日）的任何一天执行。不过，欧式期权（以及美式期权）可以在任何时候卖给另一位市场参与者。交易所中交易的期权大部分是美式期权，但由于欧式期权更便于分析，所以我们主要分析后者（美式期权的特性将在以后的章节论述）。本章我们集中论述期权在到期日的收益曲线图。后面的章节我们将涉及期权在到期日之前的价格变化。

表 7—1 总结了在购买看涨期权时应注意的问题。投资者以 300 美元（=3 美元×100）购买了一个看涨期权，其标的资产是 100 股 XYZ 股票，执行价为 $K=80$ 美元。

表 7—1　　买入（看多）看涨期权

当前股票价格，$S=78$ 美元

今天（t）的行情

合约规模=100 股

执行价 $K=80$ 美元

看涨期权价格 $C=3$ 美元

支付的看涨期权金=100(3 美元)=300 美元

3 个月后（T）

到期日的股票价格$=S_T=88$ 美元

执行期权所得利润：$(S_T-K)100=(88$ 美元-80 美元$)100=800$(美元)

减去期权金的净利润：$(S_T-K-C)100=(8$ 美元-3 美元$)100=500$(美元)

在时间 T，投资者可以执行期权，并以 $K=80$ 美元的价格购买 100 股 XYZ 股票，然后在市场上以 $S_T=88$ 美元（见图 7—1）出售。在到期日她每股盈利 8 美元，去掉购买看涨期权的费用 3 美元，她每股净盈利 5 美元（共 500 美元）。实际上，净利润比 500 美元少，因为我们忽略了期初 300 美元期权金的利息。如果在到期日，股票价格变为 82 美元，那么净回报将变为 -100 美元，即(82 美元$-$80 美元)$\times 100-300$ 美元，也就是损失 100 美元。然而，只要 $S_T>K$，期权就应该执行，因为如果不执行期权，她的损失将变为 300 美元（整个期权金）。实际上，只要到期日的股票价格大于执行价（$S_T>K$），执行期权总是值得的，而当 $S_T<K$ 时，期权将不会被执行，因为此时执行会使损失更大，这就是看涨期权提供的“保险”，如果情况不利，你可以放弃期权。由此看来，是否执行期权，取决于 S_T 与 K 之间的大小，因此期权是一种或有要求权。

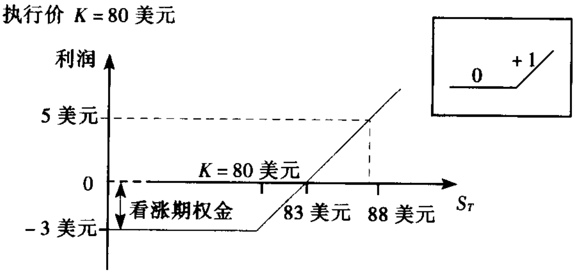


图 7—1　买入一个欧式看涨期权

股票的终期价格与执行多头看涨期权带来的盈利之间的关系如图 7—1 所示。很明显，持有看涨期权的投资者的每股最大损失被限定在 3 美元，而如果到期日的股票价格足够高，她可能取得的盈利却是无限大的。将期权的收益曲线用向量的形式表示是很有好处的。一个看涨期权多头的盈利为 $\{0, +1\}$，因为一旦 S_T 大于 K，标的资产的价格每升高 1 单位，期权带来的盈利也增加 1 单位（如图 7—1 中的小图所示）。

对于**看涨期权的发行者（出售者）**来说，其收益曲线与购买看涨期权的投资者的收益曲线成镜像的关系。出售一个看涨期权的盈利为 $\{0, -1\}$，因为一旦 S_T 大于 K，标的资产的价格每升高 1 单位，她将多亏损 1 单位（如图 7—2 中的小图所示），因此“-1”代表这种相反的关系。

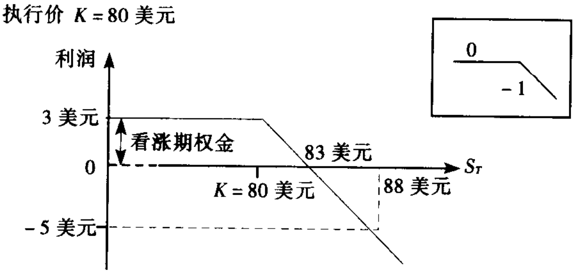


图 7—2　卖出（发行）一个欧式看涨期权

看跌期权

欧式看跌期权给持有者一种权利（而不是义务）：

- 在未来特定的时间（**到期日**）
- 以确定的价格（**敲定/执行价格**）
- 和事先确定的数量（**合约规模**）
- 来**出售**标的资产的权利。
- 为了这种权利，你需要支付**期权金/价格**。

由于期权合约的持有者可以选择是否执行期权，因此期权合约能够提供某种形式的保险。投资者通过购买看跌期权来盈利的例子如表 7—2 所示。对比看涨期权的持有者，如果到期日股票价格 S_T 小于执行价 K，看跌期权的持有者将执行期权。看跌期权多头的收益曲线如图 7—3 所示。它的收益向量为 {−1，0}。

表 7—2　　买入（看多）看跌期权

当前股票价格，$S=78$ 美元

今天（t）的行情

合约规模＝100 股

执行价 $K=70$ 美元

看跌期权价格 $P=2$ 美元

支付的看跌期权金＝100(2 美元)＝200 美元

3 个月后（T）

到期日的股票价格 $S_T=65$ 美元

执行期权所得利润：$(K-S_T)100=(70$ 美元-65 美元$)100=500$(美元)

减去期权金的净利润：$(K-S_T-P)100=(5$ 美元-2 美元$)100=300$(美元)

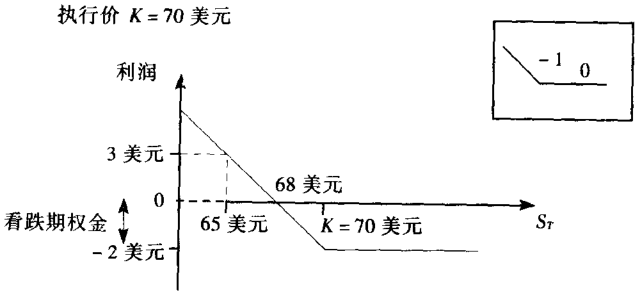


图 7—3　买入（看多）一个欧式看跌期权

如果 $S_T=65$ 美元，低于执行价 $K=70$ 美元，投资者就可以在股票市场上以 $S_T=65$ 美元的价格购买股票，然后以执行价 $K=70$ 美元出售。这样就盈利 5 美元，减去 2 美元的期权金，则净盈利为每股 3 美元。看跌期权多头的最大盈利发生在到期日股票价格为零的时候。最大损失限定在购买期权的费用上。如果 S_T 比执行价格 K 高，投资者将选择在市场上出售股票，而不是执行

期权。

同样，对于**看跌期权的发行者（出售者）**来说，其收益曲线与购买看跌期权的投资者的收益曲线成镜像关系（见图 7—4）。如果你是看跌期权空头，那么你的损失有可能很大，但限定在 $K=70$ 美元以内（如果到期日股票价格为零）。盈利向量为 {+1，0}，因为当股票价格增加时，看跌期权空头持有者的利润将随之增加。这是一个正的关系。

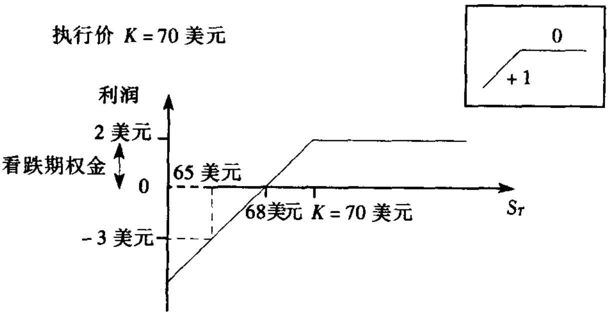


图 7—4　卖出（发行）一个欧式看跌期权

期权头寸

显然，期权的交易涉及两个交易方。签订期权合约的双方分类如下：

看涨期权多头＝购买看涨期权
看跌期权多头＝购买看跌期权
看涨期权空头＝出售（或发行）看涨期权
看跌期权空头＝出售（或发行）看跌期权

到期日之前的期权策略

通常投机者并不持有期权至到期日，而是在很短的时间内购买和抛售掉期权。看涨期权的价格在到期日之前视标的资产价格的变化而正向变化（从数学上解释，这是著名的 Black－Scholes 期权价格公式计算出的结果）。比如，假设投机者以市场价 $C_0=3$ 美元购买一个看涨期权（标的资产为股票），很快股票价格上涨，因此看涨期权的价值也随之增加，并可以以 $C_1=3.1$ 美元的价格出售。那么，投机者可以在 $t=0$ 时支付 3 美元给清算所，而在 $t=1$ 时，当投机者抛售期权之后，清算所将支付投机者 3.1 美元。这样，投机者并不需要等到期权到期就可以获得投机利润。如果预计股票市场是牛市（即股票价格上升），投机者将购买看涨期权。她将获得杠杆收入（因为看涨期权金只是合约中标的资产价值的很小一部分），而且她的最大损失将限定在期初的看涨期权价格以内（如果股票价格降为零，则期权价格也降为零）。

同样，如果预计股票价格在不久的将来将下跌，投机者可以购买看跌期权。例如，她在 $t=0$ 时，以 $P_0=2$ 美元的价格购买一个看跌期权。如果股票价格在 $t=1$ 时下跌，则看跌期权的价格将随之上涨，假设上涨后的价格为 $P_0=2.1$ 美元，则她在此时出售看跌期权，就会从清算所那里

得到 2.1 美元。

最后，请注意，无风险套利将保证期权合约的“公平价格”（参见后面的章节）。

7.2 内涵价值和时间价值

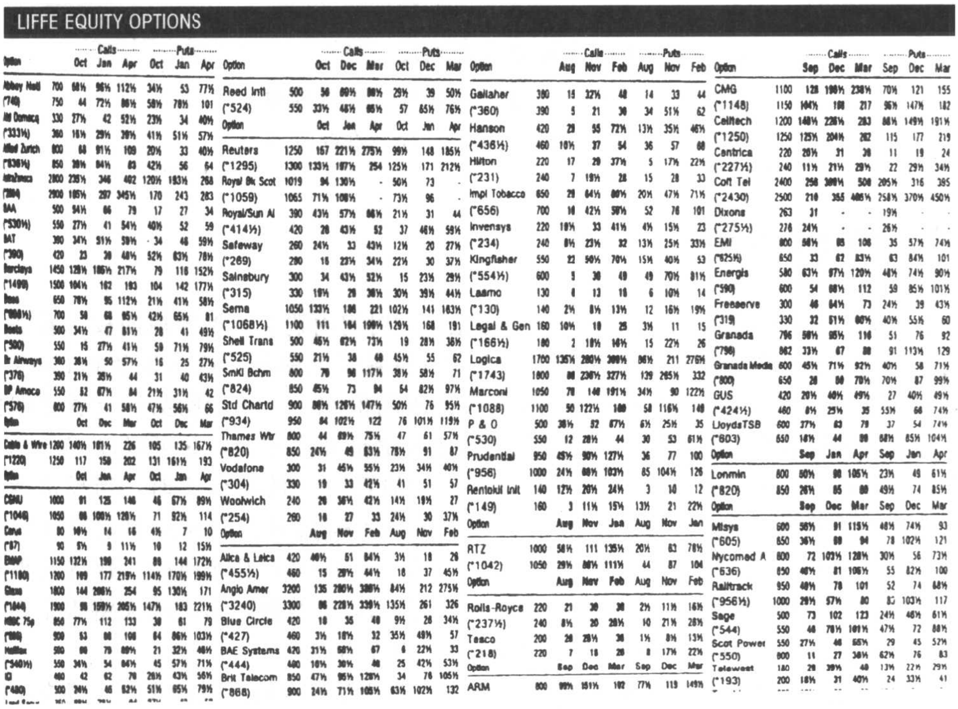
美式期权可以在任何时候执行，因此（看涨期权或看跌期权的）多头可以通过购买期权立即获得执行价。英国航空公司（BA）的两种看涨期权的价格（2000 年 7 月 27 日）如表 7—3 所示，这两种期权的执行价分别为 $K=360$ 便士和 390 便士，这些信息可以从《金融时报》上得到（见图 7—5）。股票的即期价格为 $S=376$ 便士。这是一种美式期权。

表 7—3 **BA 公司的看涨期权价格：2000 年 7 月 27 日**

	到期月份		
执行价格 K	10 月	1 月	4 月
360 便士	$36\frac{1}{2}\left(16/20\frac{1}{2}\right)$	50（16/34）	$57\frac{1}{2}\left(16/41\frac{1}{2}\right)$
390 便士	$21\frac{1}{2}\left(0/21\frac{1}{2}\right)$	$35\frac{1}{2}\left(0/35\frac{1}{2}\right)$	44（0/44）
当前股票价格 $S=376$ 便士			

注：价格单位为便士。“./.”表示“内涵价值/时间价值”。

资料来源：*Financial Times*，27th July 2000.



LIFFE EQUITY OPTIONS

图 7—5 期权《金融时报》

经《金融时报》允许后复制。

实值、虚值和平值期权

对于看涨期权多头来说，这些术语适用于下面三种情况：

实值期权： 当前即期价格＞执行价（$S>K$）
平值期权： 当前即期价格＝执行价（$S=K$）
虚值期权： 当前即期价格＜执行价（$S<K$）

严格地讲，只有即期价格 S_T 大于执行价的现值（也就是 $S_T>K\exp(-rT)$）时，才能说期权是实值期权，但上面这种简化的定义已是“路人皆知”（由于欧式期权只能在到期日执行，所以即期价格必须是到期日的即期价格 S_T）。

报纸行情：英国航空公司的看涨期权

例如，BA—360 看涨期权（见表 7—3）的价格至少在 16 便士以上，因为多头方可以立即以执行价 $K=360$ 便士的价格购买 BA 股票，然后以 376 便士的价格卖掉股票。立即执行的可能确定了期权的最小内涵价值：

$$\text{内涵价值}=S-K=376\text{ 便士}-360\text{ 便士}=16\text{（便士）}\tag{7.1}$$

10 月份到期的 360—看涨期权的价格为 36.5 便士，大于内涵价值 16 便士。这是因为在 7 月 27 日与 10 月份到期日之间的这段时间，股票的价格可能会继续走高（因此增加了持有期权的价值）。超出的部分被称为期权的时间价值：

$$\begin{aligned}\text{时间价值（10 月份期权）}&=\text{期权价格}-\text{内涵价值}\\&=36\frac{1}{2}\text{便士}-16\text{ 便士}=20\frac{1}{2}\text{（便士）}\end{aligned}\tag{7.2}$$

现在我们来看 BA“390—看涨期权”。很明显它的内涵价值为零，因为你决不会以执行价 $K=390$ 便士购买股票，然后以 $S=376$ 便士的价格在市场上出售股票。然而，在 7 月 27 日与 10 月份到期日之间的这段时间，股票的价格仍有机会升到 390 便士以上。多头方愿意以 21.5 便士来购买这种机会。注意，不管是哪种看涨期权，到期时间越长，多头方支付的期权金也越高，因此这些期权具有一种时间价值，到期时间越长，这种时间价值就越高。因为时间越长，即期价格超过执行价的可能也越大。我们可以对此概括如下：

对于看涨期权多头： 内涵价值$=\max(S-K,0)$
时间价值$=C-\max(S-K,0)$

注意，你可以在任何时候执行美式期权。但是，如果你执行了期权，你就只能得到内涵价值。如果出售手中持有的期权，你会得到期权的市场价格，这是内涵价值与时间价值之和。因此，对于普通香草型美式期权，你宁可出售也不会执行它。（注意，这个结论并不适用于所有的

美式期权。）另一值得注意之处是，随着到期日的临近，期权的时间价值也会降低。开始时，时间价值降得很慢，但在距到期日几周之内，它会迅速下降。

报纸行情：英国航空公司的看跌期权

我们再来对表 7—4（数据从图 7—5 中得到）中的 BA 看跌期权做一个简单的分析。390—看跌期权必须至少值 14 便士，因为多头方能够以 376 便士的即期价格购买股票，然后立即执行看跌期权，以执行价 $K=390$ 便士来出售股票。360—看跌期权没有内涵价值。390—看跌期权的内涵价值为 14 便士，但是 10 月份 390—看跌期权的价格为 31 便士。时间价值为 17 便士（=31 便士−14 便士）。这是因为，在 7 月 27 日与 10 月份到期日之间的这段时间，BA 的即期价格可能会低于期权的执行价 $K=390$ 便士，从而增加了看跌期权的价值。

表 7—4　　BA 公司的看跌期权价格：2000 年 7 月 27 日

执行价格 K	到期月份		
	10 月	1 月	4 月
360 便士	16 (0/16)	25 (0/25)	$27\frac{1}{2}$ $\left(0/27\frac{1}{2}\right)$
390 便士	31 (14/17)	40 (14/26)	$43\frac{1}{2}$ $\left(14/29\frac{1}{2}\right)$
当前股票价格 $S=376$ 便士			

注：价格单位为便士。“./.” 表示“内涵价值/时间价值”。

资料来源：*Financial Times*, 27th July 2000.

对于看跌期权多头： 内涵价值 $=\max(K-S,0)$

时间价值 $=C-\max(K-S,0)$

同样地，距离到期日越久，看跌期权的价格也越高（沿着表 7—4 中的行），因为此时即期价格低于执行价的机会也越多。

实值/虚值

注意，360—看涨期权（见表 7—3）是实值期权（$S-K>0$），而 390—看涨期权是虚值期权。因此 360—看涨期权有相对较高的内涵价值和相对较低的时间价值。相反地，390—看涨期权的内涵价值为零而时间价值相对较高。对看跌期权也可以做类似的分析。

7.3　期权市场的组织结构

期权的标的资产可以是个股、股指、外汇、期货合约，也有少数是中期和长期国债。最大的几个交易所是芝加哥期权交易所（CBOE）、纽约股票交易所（NYSE）、费城股票交易所

（PHLX）、旧金山的太平洋证券交易所（PSE）、伦敦国际金融期货期权交易所（LIFFE）、巴黎的国际期货期权交易所（MATIF）以及欧洲期货期权交易所（EUREX）。欧洲期货期权交易所是德国期权期货交易所（DTB）和瑞士期权及金融期货交易所（SOFFEX）合并的产物。芝加哥期权交易所建立于1973年，最初交易股票期权，它是世界上最大的场内期权交易市场，交易标准化合约，并有很深的二级市场。

场外（OTC）期权交易市场根据买者的要求来定制期权合约，目前这个交易市场非常大，大约有场内交易市场规模的10倍，尽管场外交易的二级市场很小。然而，活跃的场外交易二级市场确实存在，特别是针对商业用户的外汇欧式期权银行间市场。考虑一个资产组合经理，她希望通过购买一个看跌期权（经常被称为一篮子期权）对她管理的股票组合（我们假设这个股票组合不与任何可用的股票指数匹配）进行对冲，这时就能充分显示场外交易市场的优越性了。

利用OTC看跌期权进行“保险”

- 专门定制的OTC看跌期权可以与她的组合构成完全匹配。
- 看跌期权的到期日可以与她的投资期限匹配。
- 可以保持匿名，因此她对于市场下跌的预期将不会被其他人知道。
- 新的期权合约不需要监管机构的批准。
- 使用场外市场的缺点在于更高的交易费用和交易对手的信用风险。

大约有70只股票的期权在LIFFE（英国）交易，而有近400只股票的期权在CBOE（美国）交易。CBOE和LIFFE交易的股票期权合约的细节如表7—5和表7—6所示，图7—6中显示的是美国股票期权的报价。我们以美国股票期权（和股指期权）为例，来说明该市场的操作管理流程，也会简要提到一些其他的期权合约。

表7—5　　**股票期权合约规范（CBOE）**

交易单位	一份合约100股股票（美式期权）
到期月份	1月份循环（J）＝1月、4月、7月、10月中最近的3个月份 2月份循环（F）＝2月、5月、8月、11月 3月份循环（M）＝3月、6月、9月、12月 例如，在1月初，J周期交易1月、4月、7月、10月到期的期权。在1月末交易2月、5月、8月、11月到期的期权。
报价	报价采用点数和分数的形式。一个点数＝100美元。价格在3点以下的最小刻度是1/16（6.25美元），其他的则是1/8（12.50美元）。
执行日/结算日	到期月份的第3个星期五之后的星期六。
最后交易日	一般是到期日前的最后一个工作日（一般是星期五）。
交易时间	上午8：30到下午3：12（中部标准时间/芝加哥时间）

资料来源：CBOE——互联网，2000年9月2日。

表 7—6　　股票期权合约规范（LIFFE）

交易单位	一份合约通常是 100 股
到期月份	1 月周期（J）＝在 1 月、4 月、7 月、10 月中最近的 3 个到期月份（同样有 2 月周期和 3 月周期）
报价	便士/股（在定约后的下一个交易日，买方要支付期权金。）
执行日/结算日	普通工作日截至 17：20，最后交易日截至 18 点。结算日是相关的股票交易所在执行日后的下一个结算日。
最后交易日	在相应到期月里股票交易所最后结算日前两天的 16：10。
交易时间	8：35 到 16：40（伦敦时间）

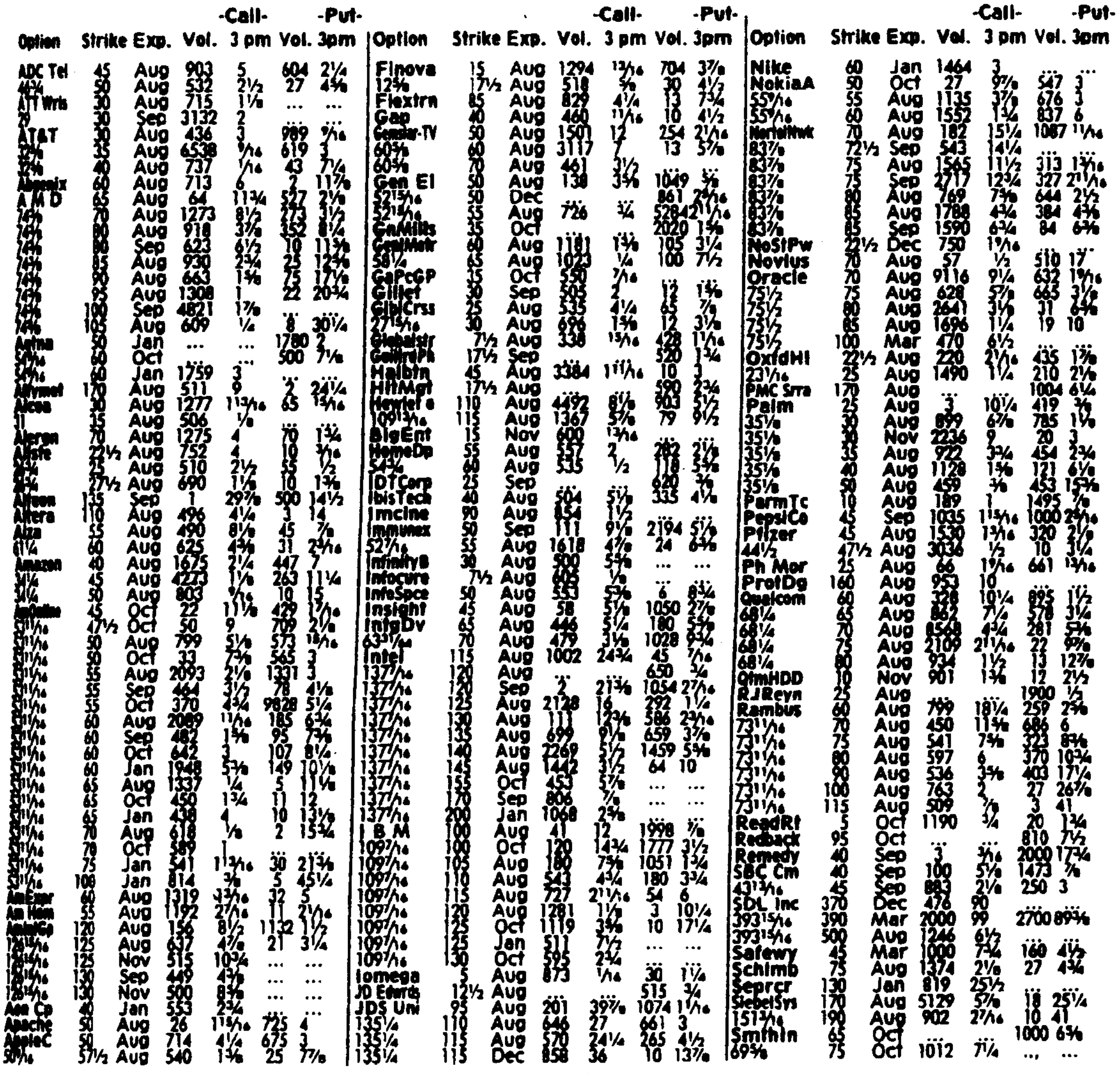


图 7—6　期权《华尔街日报》

经《华尔街日报》允许后复制。

美国股票期权

合约规模

CBOE 中的个股期权是每手 100 股。股指期权的合约规模则由一个合约乘数决定。例如，S&P500 股指期权（CBOE）的乘数是 250。

到期日

到期日由交易所确定，期权在到期月份的第 3 个星期五的下午 4 点 30 分（中部时间）到期。经纪人必须在第 2 天（星期六）的晚上 10 点 59 分（中部时间）完成相关工作。有些股指期权在每个季度的最后一天到期。美国股票期权（见表 7—5）是在 1 月份、2 月份、3 月份的基础上循环的（见图 7—6）。

期权周期：美国股票期权

1 月份循环＝1 月，4 月，7 月，10 月的基准月

2 月份循环＝2 月，5 月，8 月，11 月的基准月

3 月份循环＝3 月，6 月，9 月，12 月的基准月

例如，对于在 1 月周期内交易的股票来说，到期月份有当前月、下一个月，以及 1 月周期里的下两个月份。因此，在 1 月初，交易所交易的是到期月份为 1 月、2 月、4 月和 7 月的期权。当 1 月份的期权到期，则加入 3 月份的期权，当 2 月份的期权到期，则加入 10 月份的期权，当 4 月份的期权到期，则加入 5 月份的期权。这就能保证一直有当月、下一个月和 1 月周期里的下两个月份到期的期权在进行交易。

单只股票期权的有效期一般在 9 个月以内，但也有例外。例如 LEAPS（long-term equity anticipation shares，长期股权预期股），它们主要是有效期直至 3 年的单只股票期权（也有一些是股票指数期权）。类似地，FLEX 指数期权的有效期可以达到 5 年，并且购买者可以设定任何执行价。

敲定/执行价格

对于在芝加哥期权交易所交易的股票期权来说，当标的股票价格高于 5 美元但低于 25 美元时，执行价格的变动间隔为 2.5 美元；当股票价格高于 25 美元但低于 200 美元时，执行价格的变动间隔为 5 美元；当股票价格高于 200 美元时，执行价格的变动间隔为 10 美元。执行价格可以高于股票现行价格，也可以低于股票现行价格（见图 7—6）。当股票价格超出现行股票期权执行价格范围时，交易所就会提供新的执行价格。

交易

任何在芝加哥期权交易所购买（或租用）了席位的个人都可以成为做市商或场内经纪人，或同时成为两者（但不能在同一天!）。后者即是**双重交易**（dual trading）。做市商必须随时报出期

权的买入价和卖出价。“买入”价是做市商准备买入的价格，“卖出”价是做市商准备出售的价格。交易所设置了买卖价差的上限。（举例来说，期权价格低于2美元，期权买卖价差不得超过0.25美元；期权的价格在2美元和5美元之间，买卖价差不得超过3/8美元；期权价格超过20美元，买卖价差的上限就上升至1美元。）期权价格通过在交易所的场内喊价报出。做市商必须随时与投资者交易。原来购买期权的投资者可以通过出售相同的期权来结清她的原期权头寸。如果交易双方的投资者都没有冲销现有的期权头寸，则合约数（也就是未平仓合约数）增加1份。

和在期货市场一样（参见第2章），期权交易者也可以是**“抢帽投机者”**，他们以买入价买入期权，在价格下跌前以卖出价出售期权，因此他们持有头寸的时间往往只有短短的几分钟。**头寸交易者**持有头寸的时间会长一些，而**价差交易者**则是在购买某一个期权的同时卖出另一个期权，希望通过该种方式将不利风险限定在一定范围内，同时又可盈利。

在交易所内拥有席位的**场内经纪人**仅仅代表他们的客户买卖期权，而且通常每进行一笔交易即可获取一笔佣金。他们没有自己的簿册，也没有为期权市场“做市”的义务。如果你的经纪人不能立即执行你的指令，（比如）以不超过最高价格（比如说是4美元）来购买一个看涨期权，那么在芝加哥期权交易所，他就可以将该限价指令传递给指令登记员，后者是交易所的会员，她会将该指令输入到她的计算机。做市商了解最好的公众限价指令，如果有一个做市商将她的买入价降低到4美元，那么指令登记员就会执行你的指令。（公众限价指令通常在做市商指令执行前即被执行。）芝加哥期权交易所还有一个“零售自动执行系统”（Retail Automatic Execution System）。该系统可以通过将交易指令输入计算机的方式来使买方和卖方的公众指令得以匹配。另外，它的“电子登记”制度使超大规模交易的指令得以匹配。看来，不但计算机被越来越广泛地应用于买方和卖方的指令匹配以及交易处理上，在衍生市场上还存在着一种从“公开喊价”到屏幕交易转变的趋势，这种趋势正日益加快。

期权清算公司

在美国的期权市场（除去那些交易期货期权的市场）上，期权清算公司将合约标准化，并扮演着中间人的角色，有效地保证了交易的履行。比如说，如果交易者购买了一个看涨期权，期权清算公司会保证出售方履行合约。期权的出售方会使期权清算公司面临信用风险，因为她可能没有资金在现货市场上购买标的股票以有效地完成交易。因此，期权清算公司要求期权的卖方交纳一定数目的保证金，通常是以现金的形式，其金额最低为标的股票价值的10%。

例如，对于出售一个（无保护的）股票看涨期权来说，初始保证金可能为股票价值的20%加上出售期权的收入。如果该期权是虚值期权，那么保证金需减去$K-S_0$。因此，如果$S_0=110$，$K=120$（也就是为虚值期权），$C_0=2$美元，且每出售一个看涨期权需交割100股股票，那么初始保证金为1 400美元，即$100\times[0.2\ S_0+C_0-(K-S_0)]$。远远高于股票价值10%的最低限额。如果期权处于平值或实值状态，就不需减去$K-S_0$。该规则同样适用于看跌期权。由于指数的波动性通常要比单个股票的波动性小，因此出售一个无保护的指数期权，其保证金可能会以股票指数价值的15%为基础来计算，而不是单只股票价值的20%。期权清算公司不要求期权的买方交纳保证金，因为她损失的最大金额不过是购买期权的费用，而该费用在合约开始时就已支付了。

初始保证金的大小取决于交易者持有的是无保护期权头寸（也就是没有包含冲销该期权头寸的标的股票头寸）还是有保护的/对冲头寸。后者的风险更小一些，初始保证金的数额也就更少。

例如，一个有保护的看涨期权是指在出售股票看涨期权时出售方持有标的股票（以备交割），该期权的保证金按如下方式计算：

当$S_0 \leqslant K$时：无需交纳额外保证金

当$S_0 > K$时：投资者可以借入的购买股票头寸的最大金额为$0.5 \times K$而不是$0.5 \times S$

此处50%是经纪人对于购买股票头寸的保证金要求。比如，如果$S_0=110$且$K=100$，那么投资者只能从她的经纪人那里借到5 000美元（$=0.5 \times K \times 100$），而不是5 500美元（$=0.5 \times S_0 \times 100$）。通常来说，经纪人对一个有保护的看涨股指期权与对一个无保护的指数期权头寸的保证金要求是相同的（因为指数中所包含的股票组合与指数期权所代表的股票是完全相同的）。保证金头寸的大小在不同的交易所是不同的，即使在相同的交易所，当期权头寸的类型不同时，保证金也会有所不同（比如跨期式期权、差价期权等，参见第10章）。

指令

交易所的场内经纪人通过和其他场内经纪人或做市商交易来代表客户买卖期权。虽然很多指令（或者称委托单）是限价指令，只能在特定的价格执行，但还是有些指令是能够立即就被执行（市场指令）的。

如果你打算购买一个AT&T公司股票的看涨期权，那么你的经纪人会把你的指令（以电子方式）通知给交易所的一名会员，该会员或者是场内经纪人，或者是做市商。经纪人通常会从交易中赚取一笔佣金。交易在一个大厅中进行。买方会喊出买入价（比如4美元），并接受向他喊出的最低的卖出价（比如4.1美元），最终将合约价定为410美元（一个合约需交割100股股票）。众多的纸条在交易者之间交换着，最终被传回到交易所的一名工作人员手中，他将纸条中的内容迅速输入到期权清算公司的电脑里。这些信息在两分钟内就会闪现在交易所的场内交易屏幕（和无线设施）上。接着场内经纪人和你的经纪人之间就会做一些相互传递文书（包括前者的佣金）的工作。

接下来，你就必须通过你的经纪人在第2个（交易日的）清晨之前将410美元存到期权清算公司的**会员清算公司**（member clearing firm）（比如说ABC公司）的账户。这笔钱被划入期权卖方的清算公司（比如说是XYZ公司）的账户，该清算公司同时也收取期权出售方的保证金。然后ABC公司和XYZ公司将它们的客户交易汇总起来，按照事先确定的公式，在期权清算公司的账户下存入一定数目的资金，以确保合约安全履行。因此，期权清算公司保证了看涨期权多头方最终能够买到股票。因为会员清算公司承担着一定的风险，所以期权清算公司对它们有最低资本金的要求。

冲销指令

如果你原来购买了一个执行价为4.1美元、总交易额为410美元的股票看涨期权，那么你就可以通过发出**冲销指令**来卖出这份合约。如果现在的价格为4.5美元，而且你的经纪人找到了愿意以此价格购买的交易者，那么这笔总额为450美元的交易就会被传递到你的清算公司ABC公司那里（接着会传到你这里），期权清算公司就会为你将该期权的头寸取消掉。这个购买者一般不会是你最初向她购买合约的那个人，但是如果她原来持有空头头寸，那么此时未平仓合约的数

量就会减少1份。大约55%的股票期权合约是以这种方式终止的。然而，如果你的期权合约的购买者是在开立一个新的多头头寸，那么未平仓合约数就会保持不变，期权清算公司会将该期权合约登记在新的持有者名下。由此我们注意到，在场外期权交易市场上，如果你出售的是一个已经存在的看涨期权，那么在你出售后它仍旧会存在，期权的承约方在期权到期日仍旧要履行义务。当然，尽管如此，你仍能在场外期权交易市场上通过卖出现有的看涨期权合约得到现金，但是新的购买者将要承受承约方违约的风险。

期权的执行

如果你作为看涨期权的买方要求执行期权，那么你的经纪人就会通知清算公司（XYZ），通过它对原来的交易进行清算。然后XYZ公司向期权清算公司发出执行指令。期权清算公司会指定某个持有相同期权空头的会员（这个指定过程可能是随机的，也可能遵循先来先得的原则）。这个被指定者不一定是你看涨期权合约原来的空头方。如果到期的S&P500期权要求以现金结算，那么该被指定者只需向你的清算公司支付$500(S_T-K)$美元即可，在这里S_T通常是以该交易日结束时的指数为基础（而不是发出执行指令的时刻，因此等到该交易日结束再去决定是不是要执行期权是有好处的）。当然，如果看跌或看涨期权到期时处于虚值状态，你就可以什么都不用做了，期权清算公司会从清算公司的记录中将该期权合约除去。严格来讲，大约10%的在芝加哥期权交易所交易的看涨和看跌期权在到期日被执行，大约30%～40%的期权在到期日处于虚值状态。

佣金

所有交易者都必须支付一定数目的清算费用，但是数额相对来说比较低。大概每份期权合约的清算费用在2美元至3美元的范围内。做市商可以进行自营交易，但是有义务确保所有的公共指令都能够被执行。他们通过自营交易获取利润（或损失），也可以在买卖的“往返交易”过程中赚取买卖价差。做市商以买入价买入期权，而以更高的价格（卖出价）卖出同样的一个期权。在芝加哥期权交易市场上，平均价差大约在1/8点左右（比如说，买入价为4美元，卖出价为4.125美元），换成百分比，大约是期权价格的3%～4%。如果做市商能够找到相反头寸的公共交易指令，他们就可以改变其自营交易来避免买卖价差。否则，他们就必须与其他做市商进行交易，而这样做就会引起买卖价差。

如果你在交易所内拥有一个席位，就不需要交纳佣金（它已经包含在为获得席位而支付的费用里面，该费用可能为每年400 000美元）。面向公共交易指令的佣金由场内经纪人收取，通常是按一固定费用再加上交易价值的一定比例来计算的。对于一笔（比如5 000美元）交易来说，固定的费用可能为50美元，其变动部分大约为（5 000美元的）1%。更大金额的交易一般需支付更高数目的固定费用，但变动成本会低一些。当冲销或是执行一份股票期权合约时，投资者必须得支付期权佣金。（执行以现金结算的期权合约时，不需支付佣金。）如果执行期权时涉及交付标的股票，那么投资者还需支付大概相当于股票价值1%～2%的“股票佣金”。

头寸限额

交易所（通常）规定了期权交易的**头寸限额**，即每一个投资者在单边市场中可以持有的期权合约的最大数量。例如，在费城交易所，上市的货币期权的头寸限额为50 000份合约。

对于单个股票期权来说（芝加哥期权交易所），标的股票是那些市场股本比例很高，而且交易量很大的股票时，期权的头寸（和执行）限额为 75 000 份合约（在同一方市场上）。多头看涨期权和空头看跌期权处于市场看涨的同一方，因为当标的股票的价值上升（下降）时，期权合约的价值也随着上升（下降）。也就是说，多头看涨期权的价格与空头看跌期权的价格存在正相关的关系。空头看涨期权和多头看跌期权处于市场看跌的同一方。在芝加哥期权交易所交易的 SPX S&P500 指数期权没有头寸限额，但是一个交易日内交易的头寸超过 100 000 份合约时，会员机构就必须向市场监管部门报告。

交易所还规定了投资者在任意连续 5 个交易日中可以执行期权合约的最大数量（即执行限额）。执行限额规定的合约数与头寸限额相同。头寸限额和执行限额的设置是为了防止个人投资者或机构投资者的活动会对市场产生不良影响。但是，这种做法确实限制了在市场上进行大规模的交易，其后果是降低了期权市场上合约的流动性，并使投资者将大规模交易转到场外期权交易市场上进行。（伦敦国际金融期货及期权交易所对在该所内交易的证券期权合约的规定与芝加哥期权交易所大致相同。）

报纸上的期权行情

我们在对《金融时报》报出的英国航空公司的股票期权行情进行讨论的时候，已经对报纸行情的信息进行了大量的描述。《华尔街日报》报价的结构（见表 7—6）与之相同。表 7—7 摘取了 7 月 27 日（在芝加哥期权交易所交易的）Intel 公司股票期权的行情。它们都是前一个交易日（即 7 月 26 日）期权的交易价格。行情报价是购买或出售一股股票期权的价格（但是每份期权合约要求购买的股票数量为 100 股，因此合约的价格=100×报价）。最左边一列只给出了一个数字 $137\frac{1}{2}$，这是股票的现行价格。第 2 列是（交易所）提供的超过和低于股票价格的期权执行价格。第 3 列是到期月份，第 4 列是前一交易日的交易量。最后两列给出了看涨和看跌期权在下午 3 点

表 7—7　　**Intel 期权（2000 年 7 月 27 日）**

股票价格	执行价格	到期月份	交易量	看涨期权—3p. m	交易量	看跌期权—3p. m
$137^{1/2}$	115	8 月	1 002	$24^{3/4}$	45	7/16
$137^{1/2}$	120	8 月	—	—	650	3/4
$137^{1/2}$	120	9 月	2	$21^{3/8}$	1 054	$2^{7/16}$
$137^{1/2}$	125	8 月	2 128	16	292	$1^{1/4}$
$137^{1/2}$	130	8 月	111	$12^{3/8}$	586	$2^{3/16}$
$137^{1/2}$	135	8 月	699	$9^{1/8}$	659	$3^{7/8}$
$137^{1/2}$	140	8 月	2 269	$5^{1/2}$	1 459	$5^{5/8}$
$137^{1/2}$	145	8 月	1 442	$3^{1/2}$	64	10
$137^{1/2}$	155	10 月	453	$5^{7/8}$	—	—
$137^{1/2}$	170	9 月	806	7/8	—	—
$137^{1/2}$	200	1 月	1 068	$2^{5/8}$	—	—

资料来源：*Wall Street Journal*, 27th July 2000.

钟的交易价格。我们注意到下午“3点钟交易”的期权报价可能与所记录的该时刻标的股票的交易价格不同，尤其是当期权的流动性很差，并且交易不频繁时。“—”代表的是7月26日该期权没有交易（见图7—6）。

通过观察8月—125和8月—145 Intel看涨期权的价格你会发现：当执行价格上升时，看涨期权的价格就会下降（举例来说，当执行价格从125升到145时，8月份到期的看涨期权的价格从16降到$3\frac{1}{2}$）。相反的道理适用于看跌期权，其价格与执行价格正相关。我们还可以发现看跌期权的价格随着到期时间变长而增加（在其他条件不变的情况下）。所以，8月—120看跌期权的价格为3/4，而9月—120看跌期权的价格则为$2\frac{7}{8}$。我们在以后章节中将对这些关系进行讨论，但细心的读者在这里可能就能推出这些结论。

分析性考虑

期权的标的物可以是单个股票、股票指数、货币、期货合约、利率以及依附于利率的资产（如短期国债）。我们会在随后的一些章节中对所有的这些不同类型的期权进行讨论。一般来说，我们当中很多人隐性地持有着期权，尽管我们可能还没有意识到这一点。这种想法是很有用的。文章7.1中就对一些“隐性”期权进行了描述。在后面的章节中，我们将要说明“实物期权”在不动产投资决策中是如何被用于量化弹性价值的。

文章7.1

隐性期权

人们可能并没有意识到他们或许正持有着一个期权。亚里士多德（Aristotle）在《政治学》第一册中提到：希腊的哲学家萨尔斯（Thales）发明了一个“金融工具”，而这个金融工具现在来看其实就是一个期权。一个冬天他通过“观星象”判断出明年的秋天油橄榄将会有异常的好收成。于是，他就悄悄地去找榨油商，预先付给他们一小笔费用（也就是看涨期权的价格），让他们保证：到了秋天如果他愿意的话，他可以以一固定的价格（执行价格）优先使用他们的榨油机。秋天到了，收成确实很好，从而人们对榨油机的需求变得很大，萨尔斯就可以向油橄榄种植商们收取很高的一笔使用费。即使萨尔斯的判断失误，他所损失的最多也不过是小小的一笔期权金罢了。

现在我们再来看乡村公共汽车服务的例子。乡村公共汽车服务经常会得到当地政府以税收形式（例如税率、营业税、社区费用）给予的补贴。如果你住在乡下，你就会面临着是否要支付一笔已知的固定费用（=执行价格）乘公共汽车去市里的选择。如果你乘车去市里的价值对你来说大于执行价格，你就会选择乘车。因此，你实际上持有了一个隐含的看涨期权，而该期权的价格就是你所在的当地政府对公共汽车公司提供的那部分税收补贴。

接下来考虑另外一个例子，如果在1月份一些大学向你提供了学习的机会，前提是你在6月份的考试中要拿到B。在随后的9月份，你就要选择一个具体的学校去上学。这个（隐含的）期权的价格就是你投入到学习中的时间和精力，而且你有9个月的时间（也就是距离期权到期的时间）来决定究竟去哪所大学学习。

如果你决定去上学，你就不得不“支付”执行价格（也就是学费、生活费和其他一些为了上学而放弃的收入）。你会选择净收入 S_T-K 最大的大学，在这里 S_T 是指毕业后你因为上大学而获得的收入增额部分的现值。这是一种**奇异期权**（exotic option），因为你可以从为你提供学习机会的不同学校中选择一所可能获得的收入 S_T-K 最大的学校。因为你选择的学校提供的净收入最大（也就是 S_T-K 的价值最大），所以，这种期权又被称为“**彩虹期权**”（rainbow option）或称为最小—最大期权（min-max option）。

但是，假设 9 个月后（到期日），你找到了一个提供优秀的培训计划的工作，那么你可能就不会选择去任何一所学校上学，因为毕业后，你作为一名毕业生而获得的收入增额的现值 S_T 可能低于你为了获得学位而支付的成本 K（其中包括不去工作的机会成本），也就是说 $S_T<K$。因此你的奇异期权在到期日就成了虚值期权。

假设现在是 1 月份，你还不知道你的考试结果会是什么。此时你持有的就是一个被称为“**障碍期权**”（barrier option）的奇异期权。如果你的智力水平在这 6 个月内得到了提高，并且在考试中得了 B，那么这份期权就会被敲进，而且如果你愿意的话，到了到期日（也就是 9 月份）你就可以执行该期权。因此更精确地讲，你持有的是一个“敲进屏障期权”（knock-in，barrier option）。如果通过 6 个月的学习你没能够得 B，那么学校为你提供的学习机会就会作废，你的隐含期权在到期日也就变得毫无价值。因为 9 月份的收入依赖于你早期的学习水平（即你在 1 月份的考试），所以我们说你持有的这份期权有“路径依赖”性（path dependent）。

汽车保险与（看跌）期权很相似，该期权的执行价格相当于你的汽车的现值，且到期时间通常为 1 年。你先支付一笔费用，如果没有发生事故（即你的汽车的价值在很大程度上来说没有发生变化），那么期权在到期日就是虚值期权。但是，如果发生了事故，你的汽车的市场价值跌到了 S_T，低于合同所保证的 K，你的保险公司将会对差额 $K-S_T$ 向你做出赔偿。

如果你获得了一笔住房抵押贷款，且为防止你不偿还本金，贷款方要求你预先支付一笔费用。那么，你就从贷款方那里购买了一个隐含期权。该期权的价值可以从需支付的更高水平的利率中看出来。20 世纪 80 年代在英国大量销售的“保险抵押贷款”并不享受这种“预付款待遇”，因为赎回该项抵押的成本非常高昂。

作为一名投资者你可以购买一个**有担保的股票债券**（guaranteed equity bond）。该债券可以保证你将来的收入为初始投资额加上股票市场上收益的一定比例。投资公司是按以下的方式来“设计”出你的收入的：将你大部分的钱用于购买附息债券，将其余部分用于购买一个股票指数（例如 S&P500，FTSE100）看涨期权。如果股市上涨，该看涨期权就会带来（杠杆）收益。如果股市下跌，该看涨期权在到期日就会变得没有价值，但是由于投资的债券可以支付利息（和本金），所以你的初始投资额收回还是有保证的。

投资公司还提供“**指数追踪基金**”（index tracker fund），该基金可以对你的投资进行保值。此外，投资公司还可以通过将你大部分的钱投资于一个分散化的投资组合（例如一个密切追踪“全股指数”的投资组合），使你的投资获得增值的机会。但是，投资公司还会将一小部分的资金**购买股票指数看跌期权**。该看跌期权保证了在股票价格下跌的时候股票可以以一个最低限度的价格（执行价格）卖出。

因此，在世界上存在着很多的“隐性”期权，但是投资者通常并没有意识到她正持有这样的期权。

还有一些金融资产，它们的“期权性”更明显一些。在一个**员工持股计划**（share option scheme）中，员工拥有在将来以给定的价格（执行价格）购买公司股票的权利（而非义务）。这一措施被用于激励员工更努力地去工作，因为如果将来公司股票价格上升，那么这些（隐含）期权在到期日就会处于实值状态。

公司还会在公开市场上发行**认股权证**（warrant）。认股权证的持有者有权利在将来的一段时期内以今天知道的固定价格购买一定数量的股票，这是一种**美式看涨期权**。

可转换债券（convertible bond）允许债券持有者在将来的一段时间内以固定的价格（执行价格）将债券转换成一定数量的股票。如果股票的价格超过执行价格（即 $S_T>K$），债券的持有者就会执行这份隐含期权。否则，如果 $S_T<K$，她将继续持有债券，并收取利息。

* * *

许多以证券（如股票）为标的资产的期权会受现金流出（如支付红利）的影响。当我们分析期权价格的决定因素时，将期权划分为零漏出期权、离散型漏出期权、连续型漏出期权往往很有用处。例如，一个**零漏出期权**（zero leakage option）是指标的资产不需支付红利或利息（且零储藏成本或便利收益）。如果公司的下一个除权日在期权的到期日之后，那么股票期权就是零漏出期权。

如果股票的除权日在期权的到期日之前，那么就将它划分为**离散型漏出期权**（discrete leakage option）。我们注意各类股票指数（如 S&P500）的标的股票支付红利的方式就是离散型的。一个**连续型漏出期权**（continuous leakage option）的例子是货币期权。这是因为它的标的资产是外汇，可以获取外汇利息。很显然，最容易定价的期权是零漏出期权。其他两种类型的期权的价格正如我们在以后章节中将要讨论的那样，需要一些额外的调整才可以计算。

7.4 本章摘要

- **看涨期权多头**在标的资产的价格上升（超过执行价格）时会带来较高的收益，而且将损失限定在支付的看涨期权金上。对于投机者来说，它在到期日提供了一个 $\{0, +1\}$ 的收益曲线（显然是不对称的）。
- **看跌期权多头**在标的资产价格下降（低于执行价格）时，会带来正的收益。这里存在着一个负相关的关系。如果在期权到期日股票的价格超过了执行价格，那么期权就会变得没有价值，但是其损失被限制在支付的看跌期权金上。对于投机者来说，收益曲线为 $\{-1, 0\}$
- 与看涨或者看跌期权多头相比，空头头寸会使出售方面临很大的风险。**出售（看空）看涨期权**会使投资者在股票价格上涨时承担无限的下行风险，而**出售（看空）看跌期权**则会使投资者在标的资产的价格趋于零时遭受巨大损失。
- **看涨期权多头和看跌期权多头**也可以用做对冲，更精确的说法是可以提供**一种保险**。假设你将来打算购买股票，那么一个多头的看涨期权可以保证你在将来有权以现在确定好的执行价格来购买。如果将来股票的价格下跌了，那么你就可以“走开”（也就是说不执行期权），而选择在现货市场上以当时较低的价格来购买股票。

- 如果你已经持有了股票，那么一个**多头的看跌期权可以提供保险**，使你拥有将来在股票市场上卖出该股票的底限。但是，如果在到期日股票可以在现货市场上以更高的价格卖出的话，该期权就可以不被执行。
- **看涨（看跌）期权的价格**包含期权的**内涵价值**，该价值是立即执行期权所能够获得的利润。但是期权的价格中还包含时间价值。该价值反映了期权在到期日或到期日之前可能会以实值状态而结束。
- **到期之前**，看涨期权的价格与标的资产（比如股票）价格的变化正相关，而看跌期权的价格与股票的价格负相关。这些关系是从著名的 **Black - Scholes 公式**中得来的。该公式可以使我们**为（欧式）期权定价**。一个认为股票价格近期会上涨（下跌）的投机者会购买看涨期权（购买看跌期权）。
- 因为持有空头头寸的投资者不得不交纳保证金，所以**清算所**可以通过最小化信用（不履行责任）风险使可交易期权的市场变得更加活跃。
- 从**报纸（和屏幕）上的期权行情**中，我们可以看到多种不同执行价格和到期日的看涨和看跌期权。在伦敦国际金融期货及期权交易所，大约有 70 种单个股票的股票期权在交易，而芝加哥期权交易所的股票期权则超过 500 种。大多数可交易股票期权的到期时间不超过 1 年，但是也有一些股票期权的到期时间超过了 3 年。这些期权就是我们所说的**长期期权**（LEAPS）。如果这些长期期权合约的标的资产是股票指数，那么该期权就是 **FLEX 期权**。

章末练习

1. 直观地讲，为什么期权的价格随着股票价格的变动而变动?

2. 什么时候一个多头的看涨期权处于“实值状态”? 什么时候一个多头的看跌期权处于“虚值状态”?

3. 欧式期权只能在到期日被执行。这是否意味着一个看涨或看跌期权多头的持有者在期权到期前被“禁锢”在了这份投资上? 如果不是，没有持有至到期日的问题出在哪里?

4. 为什么一个看涨期权的买方不必向清算所交纳保证金，而期权的卖方则必需要交纳保证金?

5. 为什么说看涨期权和看跌期权提供了一种保险?

6. 如果你出售了一个股票看涨期权，为什么必须要向清算所交纳保证金? 这是不是意味着卖出期权不会带来现金收益?

7. 如果你出售了一个股票看涨期权和一个 S&P500 指数看涨期权，并且在到期日两种期权都处于实值状态，结果会怎样?

第8章

期权定价

学习目标

- 定性认识影响**看涨期权和看跌期权价格**（call and put premia）的各个因素。
- 对（欧式）看涨期权和看跌期权价格之间建立通称为“**看跌—看涨平价**”（put－call parity）的套利关系。由此，我们可以根据看涨期权价格求出看跌期权价格，或者利用看涨期权价格和看跌期权价格之间的不匹配来进行无风险套利。这便是**金融工程**的一个实例。
- 介绍**二叉树期权定价模型**（BOPM）如何通过建立包含标的资产及其期权头寸的无风险资产组合来确定期权价格。它阐述了 **delta 对冲和风险中性定价**的原理。
- 演示 Black－Scholes 公式如何给出看涨期权和看跌期权价格的显式方程。
- 阐述 BOPM 与 Black－Scholes 模型之间的关系。

在本章，我们首先对决定看涨期权价格和看跌期权价格的因素进行直观的描述，并介绍欧式期权的看跌—看涨平价关系。随后我们对 1 期和 2 期的二叉树模型进行详细的分析，从而引入以两种风险资产（如看涨期权和股票）建立无风险资产组合的重要思想。这就是 delta 对冲的原理，即通过改变股票和期权的持有比例，可以构造出在短时间里没有风险的资产组合，这使我们能够对期权进行定价。我们把 BOPM 模型更一般化为多期的情况。对期权定价的另一种方法是构造包含股票和特定数量现金的组合来复制期权的收益，于是期权的价格（$t=0$）必然等于这个“股票＋现金”组合的已知价格。下一步我们研究著名（也很复杂）的 Black - Scholes 期权定价公式，并从中挖掘出尽可能多的直观含义。为了获得对 Black - Scholes 方法的直观感受，我们讲述了它与允许股票价格在微小时间段上发生变化的 BOPM 之间的相似之处。

8.1　影响期权价格的因素

我们已经讨论了影响看涨期权和看跌期权收益的一些因素，这里我们从直观上解释这些因素对期权价格的影响，也就是说当前某个期权的价格如何随到期日、执行价等因素而变动。这个直观的方法有助于我们理解将在后面给出的数学公式。我们把这些直观推理的结果归纳在表 8—1 中。当考虑每一个因素的影响时，我们都假设其他因素不变，并假设投资者为多头的情况，即他购入了看涨期权或看跌期权。

表 8—1　　**影响期权价值的因素**

	欧式看涨期权多头	欧式看跌期权多头	美式看涨期权多头	美式看跌期权多头
到期时间 T	?	?	+	+
股票现价 S	+	—	+	—
执行价 K	—	+	—	+
股票收益波动率 σ	+	+	+	+
无风险利率 r	+	—	+	—
红利	—	+	—	+

注：(1)“+”表明期权价格与相应变量之间的同向关系，即变量值上升（下降）造成期权价格的上升（下降）；

(2)“—”表明期权价格与相应变量之间的反向关系，即变量值上升（下降）造成期权价格的下降（上升）；

(3)“?”表明两者关系可能为“+”也可能为“—”，要根据具体情况分析。

到期时间（T）

看涨期权：到期日（T_2）较长的**美式看涨期权**与到期日（T_1）较短的美式看涨期权相比，具有完全相同的执行可能，但前者具有可以在 T_1 和 T_2 之间执行的附加价值，因此美式看涨期权随着到期时间的延长，价值会增加。同时，更长的到期时间意味着期权执行时有更大可能处于实值状态。因为看涨期权的购买者只有有限的下行风险，所以更长的到期时间 T 增大了看涨期权持有者获得上行利润的可能性，因而美式看涨期权的价格相应升高。

一般来说，**欧式看涨期权**的价值也随到期时间的增加而升高，因为它有更长的时间在到期日进入实值状态，而处于虚值状态时，损失会止于看涨期权的价格。然而，一个特殊的情况是，公司计划近日将支付一大笔红利，这将使股票价格下跌，因此“短生命期”的看涨期权可能比“长生命期”的看涨期权价格要低。

看跌期权：与美式看涨期权类似，到期时间较长的美式看跌期权价格更高。欧式看跌期权的价格一般也随到期时间变长而升高，但如果有红利发放，则可能出现例外的情形。

执行价格（K）与股票现价（S）

看涨期权：如果到期日股票价格 S_T 相对于执行价格 K 更高，那么欧式看涨期权的持有者将获得更大的收益。如果股票价格是随机波动的，那么股票的现价 S 越高，到期时股票价格也更有可能高于执行价格。因此 S/K 越大，投资者就越愿意出更高的价格购买欧式看涨期权。

相应的结论也适用于美式看涨期权，即 S/K 越大，美式看涨期权的价格越高，因为美式看涨期权还有允许提前执行的优势（虽然对于不支付红利股票的美式看涨期权来说，提前执行永远不是最优选择）。

看跌期权：很显然，股票现价和执行价对于看跌期权的影响与对看涨期权的影响截然相反，因此美式看跌期权和欧式看跌期权的价格都与 S/K 成反向变化。

波动率（σ）

看涨期权：股票收益的波动率 σ 越大，在到期日股票的价格就可能位于一个更大的范围。但欧式（或美式）看涨期权的多头只有有限的下行风险，因此波动率的增大，也增加了股票处于高价格的机会，从而在下跌风险有限的同时，增加了到期日看涨期权的回报。因此看涨期权多头的价值随着股票收益波动率的增加而增大。

看跌期权：欧式（或美式）看跌期权的多头从股票价格下跌中受益，但如果股票价格上升，只有有限的亏损，因此看跌期权价格也随波动率的增加而增大。

现在我们介绍一个关于方差的统计结果：独立随机变量和的方差等于这些变量方差的和。因此，如果股票每天收益的方差为 σ_d^2，到期时间为 T 天，那么这 T 天里的方差为 $\sigma_T^2=T\sigma_d^2$。如果 σ 是股票收益的年波动率（标准差），那么更短时间（比如 $T=1/4$ 年）的波动率为 $\sigma_{1/4}=\sqrt{T}\sigma$。后者通常被称为“根号 T 规则”。因此对一个 3 个月后到期的期权，我们认为它的价格为 $\sigma_{1/4}=\sqrt{T}\sigma$。

无风险利率

看涨期权：第一，无风险利率增加使得任何从期权获得的未来收益的现值减少。这倾向于直接减少看涨期权多头的价值。第二，利率上升，使股票价格的预期增长率也上升，这倾向于增加看涨期权多头的价值。可以证明后者的作用要强于前者，因此看涨期权多头的价值随着无风险利率 r 的上升而增加。

看跌期权：高利率使股票价格的增长率上升，这使看跌期权在到期日更有可能处于虚值状

态。高利率同时减少来自于看跌期权未来收益的现值，因此利率上升，减小了看跌期权的价值。

如果以上因素能够被包含于一个公式之中从而决定看涨期权（C）和看跌期权价格（P），这将是非常有用的，这个“封闭形式”的解便是期权定价的 Black - Scholes 公式，它的一般形式是 C（或 P）$=f(S,K,T,r,\sigma)$。推导出 Black - Scholes 公式的具体形式具有相当的难度，因此我们在解释看跌—看涨平价关系和更具直观含义的二叉树定价模型之后再对 Black - Scholes 公式进行介绍。

8.2　看跌—看涨平价：欧式期权

本节中，我们将推导出看跌—看涨平价关系，这使我们能够通过已知的看涨期权价格，来求出具有相同执行价格和到期日的看跌期权价格，或是通过看跌期权来求得看涨期权价格。因此，如果我们知道看涨期权价格的公式（包含波动率、标的股票价格等变量），我们就能用看跌—看涨期权平价关系来决定看跌期权价格。

一个简单例子

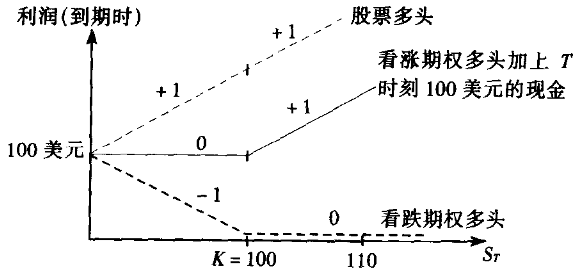
看跌—看涨平价关系基本上是欧式看跌期权价格、看涨期权价格、股票价格和持有无风险资产（如现金或在 T 时刻到期的国债）之间的关系。

看跌—看涨平价关系（欧式期权）

股票（多头）＋看跌期权（多头）＝看涨期权（多头）＋现金（Ke^{-rT}）

$$S+P=C+Ke^{-rT}$$

我们用方向向量模拟以上结果可以大致上得到上述结果，比如 $\{+1,\ +1\}$ 加上 $\{-1,\ 0\}$ 等于 $\{0,\ +1\}$，这是一个看涨期权多头，但是我们“丢掉”了“现金”一项。更详细的分析如图 8—1 所示。考虑下面的组合：



在 $t=0$ 时：股票多头＋看跌期权多头＝Ke^{-rT} 美元现金＋看涨期权多头

图 8—1　看跌—看涨平价

组合 A：股票多头＋看跌期权多头

为简单起见，我们设股票现价为 100 美元，看涨期权和看跌期权的执行价也都是 $K=100$ 美

元（其实 S 和 K 不相等时，看跌—看涨平价同样成立）。从图 8—1 可以看出，资产组合 A 的收益与持有一个看涨期权加上 100 美元现金（在时刻 $t=T$ 时）是相等的。为了更清楚地看出这一点，可以考虑到期日股票价格为 90 美元（$<K$）和 110 美元（$>K$）的情况。

看跌期权多头的收益 $V_p=\max\{K-S_T,0\}$，股票价值为 $V_S=S_T$。因此组合 A 的收益在 $K<S_T$ 时为 S_T，在 $k>S_T$ 时为 $K=(K-S_T)+S_T$。我们将看到，“股票加看跌期权”与组合 B 的收益相同。

组合 B：看涨期权多头＋100 美元 e^{-rT} 现金（$t=0$ 时）

如果你买入“股票＋看跌期权”，这意味着收益为 $K=100$ 美元（$S_T<K$ 时执行）或是 $S_T>K$（不执行期权，但拥有价值为 S_T 的股票）。“看涨期权多头＋100 美元现金”的收益也是 S_T（当 $S_T>K$ 时执行看涨期权，获得股票）或者是 100 美元（$S_T<K$ 时不执行看涨期权，但现金及其利息共为 100 美元）。因为在 T 时，组合 A 与 B 的收益相同，它们在今天（$t=0$）的价格也必定相同，这就得出看跌—看涨平价关系：

$$S+P=C+Ke^{-rT} \tag{8.1}$$

其中，S＝股票价格，P＝看跌期权价格，C＝看涨期权价格，Ke^{-rT} 为在 $t=0$ 时持有的无风险资产。如果你选择执行看涨期权，那么为了在 $t=T$ 时支付执行价格 K，必须在 $t=0$ 时拥有 Ke^{-rT} 的现金。现金数量 Ke^{-rT} 经常被称为“执行价格的现值”PV(K)，因此

$$\mathrm{PV}(K)=Ke^{-rT} \quad \text{（使用连续复利）} \tag{8.2}$$

或

$$\mathrm{PV}(K)=K/(1+r)^T \quad \text{（使用离散复利）} \tag{8.3}$$

上述分析中我们隐含假设期权直到 $t=T$ 时才能被执行，就是说看跌—看涨平价关系只适用于欧式期权。另外应注意到公式（8.1）的符号表明你持有多头还是空头。它们全部为正号，表明各项资产都是多头。组合 A 和组合 B 在 $t=T$ 时的价值（执行价 $K=100$）如表 8—2 所示。

表 8—2　组合 A 和组合 B 在 $t=T$ 时的价值（执行价 $K=100$）

股票价格	在 T 时刻股票＋看跌期权多头的价值	看涨期权多头 B＋现金 $100e^{-rT}$ 的价值
$S_T=50(<K)$	$V_s+V_p=50+50=100$	100 美元＝K
$S_T=110(>K)$	$V_s+V_p=110+0=110$	110 美元＝S_T

为了对看跌—看涨平价关系给出一个更正式的证明，考虑以下两个组合：

组合 A：$t=0$ 时，一个看跌期权加上一股股票。

组合 B：$t=0$ 时，一个看涨期权加上 Ke^{-rT} 美元的现金。

当 $K=100$ 时，组合 A 的收益如图 8—1 所示。能够看出组合 A 的收益等于 $t=0$ 时持有一个看涨期权和 $100e^{-rT}$ 美元无风险资产的收益。

首先，考虑组合 A 在到期日 T 的价值（见表 8—3）。如果股票价格 $S_T>K$，那么看跌期权价值在到期日为零，但是股票价值为 S_T。相反，如果 $S_T<K$，那么看跌期权的收益为 $(K-S_T)$，股票多头的收益为 S_T，因此组合 A 的收益＝$(K-S_T)+S_T=K$。

表 8—3　　**来自两个组合的收益：看跌—看涨平价**

	$S_T>K$	$S_T<K$
组合 A⁽¹⁾	S_T	K
组合 B⁽²⁾	$(S_T-K)+K=S_T$	K

1. 组合 A：在 $t=0$ 时，一个看跌期权＋一股股票

2. 组合 B：在 $t=0$ 时，一个看涨期权＋Ke^{-rT}现金

现在考虑组合 B。如果 $S_T>K$，那么看涨期权的收益为（S_T-K），现金 Ke^{-rT} 计利息后为 K，那么组合 B 的收益为（S_T-K+K）$=S_T$。相反，如果 $S_T<K$，那么看涨期权到期日价值为零，但是“现金”数量将为 K，这便是组合 B 在 T 时的价值。

上面结果被归纳于表 8—3 中，可以看出两个组合收益在到期日具有相同的结果。因为这两个期权不能在到期日之前被执行，这两个组合今天必然有相同的价值：

看涨期权多头＋ Ke^{-rT} 美元现金＝看跌期权多头＋股票多头

$$C+Ke^{-rT}=P+S \tag{8.4}$$

在 $t=0$ 时，我们已知 K，r 和 S，如果 σ 的估计值也给出，那么我们可以通过 Black - Scholes 公式或二叉树方法计算出 C 的价值，然后利用公式（8.5）导出 P 的价值。看跌—看涨平价关系也表明，通过适当的股票头寸并借入或贷出现金，看涨期权可以被“转化为”看跌期权，这被称为期权转换。同时，我们并不同时需要看涨期权、看跌期权、股票和借出/买入，给出三种资产，我们总是可以利用它们构造出第四种资产，这就是**金融工程**的一个例子。

我们不仅能利用公式（8.4）来“制造”出人工合成的看跌期权，如果我们发现看跌期权被错误定价，我们还可以利用合成看跌期权来进行无风险套利。为说明这一点，我们首先注意到通过公式（8.4）我们能利用看涨期权、股票和现金（短期国债）来创造合成看跌期权：

$$P=-S+C+Ke^{-rT} \tag{8.5}$$

从公式（8.5）可以看出，我们能够利用卖空一股股票（−1）、买入一个看涨期权（+1）和持有今天价值为 Ke^{-rT}（计息后在 T 时为 K）的银行存款或短期国债来“制造”出一个看跌期权多头的收益。下面说明如何通过这个**合成看跌期权**来对真实看跌期权与合成看跌期权间的错误定价进行套利。假设 $t=0$ 时，看跌期权报价是 P，并且 $P\geqslant -S+C+Ke^{-rT}$，于是这个看跌期权被过高定价，我们应该：

（1）以价格 P 卖出真实看跌期权，并以价格 S 卖空股票，这样在 $t=0$ 时，现金流为 $P+S$。同时我们应该：

（2）用所得资金购入看涨期权多头和面值为 K 的短期国债，或是把 Ke^{-rT}存在银行里。

在 $t=0$ 时，我们有净现金流入，因为根据假设 $P+S>C+Ke^{-rT}$，从表 8—3 中，我们很容易看出在到期日 $t=T$ 时，以上两种策略的收益相同，因此净收益为零。因此同时采用以上两种策略，在 $t=0$ 时有一个净现金流入，如果把它投入到无风险资产上，在 $t=T$ 时将获得一个正的资产收益。因此我们利用错误的定价完成了无风险套利。

8.3 二叉树定价模型

为解决 delta 对冲和期权定价中风险中性定价的问题，我们首先给出一个单期期权的实例，并假设我们已知股票价格的各种可能结果。这里的基本思想是构造出包含有看涨期权和股票并在一小段时间上无风险的“合成”组合。然后我们使这个合成组合的收益与已知的无风险利率相等，从而求出“未知”的期权价格。这里我们假设股票不支付红利。

单期 BOMP 模型（无红利支付）

考虑一个单期股票价格问题，这一时期结束后，股票价格有两种可能结果，分别是 110 和 90。我们设定符号：

$S=100=$今天的股票价格
$K=100=$看涨期权的执行价
$C=$未知的看涨期权价格
$r=0.05=$无风险利率
$R=(1+r)$

持有一股股票或是一个看涨期权的收益情况在图 8—2 中给出。持有股票的两种可能收益之差为 20(110−90)。持有看涨期权的两种可能收益分别为 $C_u=10(110-100)$和 $C_d=0$。这两种收益之差为+10，因此卖出一个看涨期权在两种情况下的收益之差为−10。我们可以把上面的概念写成 $\Delta S=20$，$\Delta C=10$，比率 $h=\Delta C/\Delta S=1/2$。实际上，我们将看出 h 就是利用看涨期权进行对冲的比率。考虑 1/2 股股票多头和一个看涨期权空头的组合 A。$t=0$ 时组合 A 的成本是$(1/2)S-C$。很显然，1/2 股股票在两种情况下的收益之差 10(=1/2×20)正好被卖出一个看涨期权的收益−10 所抵消。

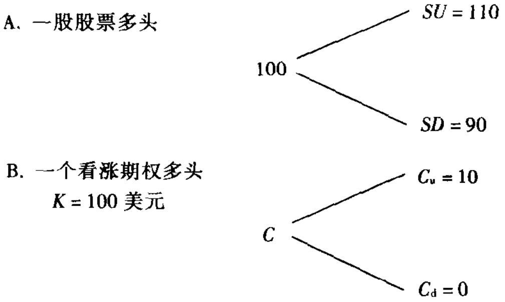


图 8—2 单期 BOPM 的收益

组合 A（1/2 股股票多头+1 个看涨期权的空头）：

当股价上涨时，收益$=(1/2)(110)-10=45$
当股价下跌时，收益$=(1/2)(90)-0=45$

在 $t=1$ 时，无论股票价格是哪种结果（等于 110 或是 90），组合 A 的收益都是确定不变的。

这样通过对冲比率 $h=-1/2$ 我们构造出了无风险资产组合。因此，把无风险收益 45 以无风险利率贴现到“今天”必然等于组合 A 的成本：

$$\frac{45}{1.05}=(1/2)100-C \tag{8.6}$$

因此

$$\mathbf{C=7.1428571}$$

换个说法便是，经过对冲的资产组合的收益是无风险的，因此必然获得无风险收益率：

$$(1+\text{无风险利率})=\frac{\text{在 } t=1 \text{ 时确定的回报}}{t=0 \text{ 时最初的投资}} \tag{8.7}$$

$$1.05=\frac{45}{(1/2)100-C} \quad \text{并且} \quad \mathbf{C=7.1428571}$$

正式推导

我们再次假设股票价格只有两种结果：$S_u=SU$ 和 $S_d=SD$（在上例中，如图 8—2 所示，$U=1.1$，$D=0.9$）。无风险利率必然位于股价上升的收益率和股价下降的收益率之间，因此 $U>R>D$（$D>0$）。这样会保证不存在无风险套利的机会。为说明这一点，我们假设 $R\geqslant U>D$，即在两种情况下，债券的无风险收益率都高于股票的收益率。那么你可以卖空 1 美元股票，把所得资金投资于债券，将获得回报为 R，净收益为 $R-U$ 或是 $R-D$，两种情况都为正值。如果我们假设 $U>D\geqslant R$，可得到类似的结论。

假设股票价格上涨，看涨期权将处于实值状态；如果股票价格下跌，看涨期权处于虚值状态（如图 8—2 所示）。我们令：

C_u＝股价 $S_u=SU$ 时的看涨期权多头收益
C_d＝股价 $S_d=SD$ 时的看涨期权多头收益

因此：

$$C_u=S_u-K=SU-K$$
$$C_d=S_d-K=SD-K \quad (\text{因为 } SD>K\text{，否则 } C_d=0)$$

组合 A（h 股股票多头＋1 个看涨期权空头）：

股价上涨时的收益 $V_u=hS_u-C_u$
股价下跌时的收益 $V_d=hS_d-C_d$

为了使 $t=1$ 时两种情况下收益相等：

$$hS_u-C_u=hS_d-C_d \tag{8.8}$$

$$h=\frac{(C_u-C_d)}{S_u-S_d}=\frac{(C_u-C_d)}{S(U-D)}=\frac{(10-0)}{100(0.2)}=\frac{1}{2} \tag{8.9}$$

上述分析中，我们售出了一个看涨期权，公式（8.9）显示对冲策略还包含 h 股股票的多头。对冲比率 h 也被称为期权的“delta”（参见下一章），因此该策略也被称为 **delta 对冲**。因为组合

A 在 $t=0$ 时是无风险的，它也被称为 **delta** 中性头寸。看来期权理论中的名词术语确实很多。我们将在第 9 章中看到这些名词的重要性。在确定这个无风险组合的对冲比率后，我们使该组合在 $t=1$ 时收益的现值等于它在 $t=0$ 时的成本，由此来确定看涨期权的价格 C。

组合 A 收益的现值＝组合 A 在 $t=0$ 时的成本

$$\frac{hSU-C_u}{(1+r)}=hS-C \tag{8.10}$$

用公式（8.9）中的 h 值进行代换，得到看涨期权价格为

$$C=\frac{1}{R}[qC_u+(1-q)C_d] \tag{8.11}$$

其中，$R=(1+r)$，$q=(R-D)/(U-D)=0.75$。“权重” $q=0.75$，它只依赖于 r，D 和 U，因此是一个常量。

> **看涨期权价格 C 由看涨期权收益（C_u，C_d）的加权平均值用无风险利率折现而得。权重 q 由 U，D 和 r 所决定。**

我们注意到，看涨期权价格只依赖于股票价格 S 变动的范围（即 U 和 D 的值），而与股票的期望收益无关。在上面这个简单例子中，（$U-D$）衡量的是股票价格的波动率，我们以后会看到，波动率在 Black－Scholes 模型中起着至关重要的作用。看涨期权价格的计算公式中，不包含股票实际上涨或下跌的概率，也没有描述投资者对风险偏好程度的变量。因此对所有投资者来说，无论他对未来股票价格涨跌的概率有什么预期，或是他对风险的厌恶程度如何，都能对看涨期权的“公平”或“正确”价格达成一致。期权相对于股票进行定价。股票价格在未来涨跌的概率影响股票的现在价格，却不影响看涨期权的价格。看涨期权的价格由给出的股票价格决定。

权重 q 被称为股票价格上涨的**风险中性概率**（*risk neutral probability*），但我们不应把它与股票价格上涨的实际概率相混淆，实际概率并不影响期权价格。风险中性概率只是位于 0 和 1 之间的一个数字，由组合 A 是收益率为无风险利率的无风险组合的假设推导而得。风险中性概率往往会使人误解，它好像暗示着投资者是风险中性的人，但事实并非如此。q 的另外一个叫法是“等价鞅测度概率”，这个术语在连续时间的文献中常常会遇到。不过本书中我们使用“风险中性概率”这个更通俗的叫法。利用公式（8.11），我们用风险中性概率 q 来给期权定价，这一定价方法被称为**风险中性定价（risk neutral valuation，RNV）**，它在所有类型期权的定价中都起着重要作用。

根据上述分析，如果我们有两个看涨期权，它们在其他方面完全相同，但是其中一个标的股票的预期增长率是零，而另一个增长率是每年 100%，那么这两个看涨期权的价格将相同。这是因为我们在两种情况下都能构造出无风险对冲组合，根据套利理论，这两个组合的收益率都是无风险利率。换个说法就是，看涨期权价格与标的股票价格的预期增长率无关。请注意，这里我们并没有说看涨期权价格与标的股票的波动率无关（在二叉树模型中是“$U-D$”）。预期增长率和波动率是两个完全不同的概念。零预期增长率的股票可以有相当大的波动率，很小波动率的股票

也可以有很高的预期增长率。根据数学上的简单随机漫步理论，$\ln(S_t)=\mu+\ln(S_t-1)+\varepsilon_t$，平均增长率为 μ，波动率为 $\mathrm{Var}(\varepsilon_t)=\sigma$。很可能 $\mu=0$，但 σ 非常大，相反的情况也可能出现。期权的价格依赖于 σ，但独立于 μ，在后面的章节中，我们会对此详细讨论。

当然在上面的例子中，我们有两个关键的简化假设，一个是股票价格只有两种可能的结果，另一个是期权在一个时期后就到期。如果把二叉树中的分支增多，股票价格就会有许多种可能结果。如果我们认为每一个分支代表一段很短的时间，那么理论上，我们就能看出多期的 BOPM 模型如何逼近连续时间的形式，这正是著名的 Black - Scholes 方法的基础。

无风险套利

如果期权的报价是 10 美元，超出 $C=7.143$ 的“公平”价格，那么赚取无风险利润的机会便出现了。就如往常一样，你可以卖高买低。在 $t=0$ 时，你以 10 美元卖出一个看涨期权，同时买入 1/2 股股票以保证 $t=1$ 时的收益。这个对冲组合的确定收益就为 45 美元，它的成本为 40 美元，即(1/2)100－10，因此收益率为 12.5%，即(45－40)/40，超出了 5%的无风险利率。我们要注意到，卖出看涨期权会使 C 降低，借款购买股票会使股票价格上涨，这样促使无风险套利的机会消失，回归到使公式（8.6）和公式（8.10）成立的状态。

如果看涨期权被过低定价，比如说 7 美元，那么我们可以购入看涨期权，并通过卖空 1/2 股股票得到 50 美元(＝1/2×100 美元)来对头寸进行对冲。在 $t=0$ 时净现金流入为 43 美元(＝50－7)。用这笔现金进行无风险投资，在 $t=1$ 时可得到 45.15 美元(＝43×1.05)。而 $t=1$ 时，无论股票价格如何变化，我们对冲的组合的价值都将是－45 美元，因此 $t=1$ 时的总利润为 0.15 (45.15－45)。

为看跌期权定价

为看跌期权定价和为看涨期权定价的思路类似。无风险对冲组合由若干股股票多头和一个看跌期权多头构成。因此，股票价格下跌的损失将由看跌期权所获利润弥补，使得“股票＋看跌期权”成为无风险组合，用 h_p 代表每持有一个看跌期权所需要的股票数量，那么：

组合 B 的收益（h_p 股股票多头＋1 个看跌期权多头）：

股价上涨时收益＝$h_p(SU)+P_u$

股价下跌时收益＝$h_p(SD)+P_d$

使 $K=100$，S 在 $t=1$ 时为 110 或是 90（如图 8—2A 所示）。那么 $S_u=110$ 时，看跌期权的收益 $P_u=0$，$S_d=90$ 时，看跌期权的收益 $P_d=10$。无风险组合中两种情况的收益应该相等，这样得出对冲比率

$$h_p=\frac{-(P_u-P_d)}{(S_u-S_d)}=\frac{-(0-10)}{(110-90)}=+\frac{1}{2} \tag{8.12}$$

对冲组合中，每持有一个看跌期权，就应购买 1/2 股股票，让无风险对冲组合的收益率等于无风险利率：

$$\frac{t=1\text{ 时确定性的支出}}{t=0\text{ 时的初始投资}}=(1+\text{无风险利率}) \tag{8.13}$$

$$\frac{h_pS_u+P_u}{h_pS+P_d}=1+r$$

把公式（8.13）中的 h_p 用公式（8.12）代换，令 $S_u=SU$，$S_d=SD$，我们得到

$$P=\frac{1}{R}[qP_u+(1-q)P_d]=\frac{(0.75)0+(0.25)10}{1.05}=2.381 \tag{8.14}$$

其中，$q=(R-D)/(U-D)$。公式（8.14）与看涨期权定价公式具有相同的形式，只是其中使用了看跌期权的收益 P_u 和 P_d。我们可以通过看跌—看涨平价关系来检验所得到的 $P=2.381$：

$$P=C-S+\text{PV}(K)=7.143-100+100/(1.05)=2.381 \tag{8.15}$$

8.4 *n* 期 BOPM 和 delta 对冲

图 8—3 给出了把 BOPM 由单期扩展到两期的股票价格和看涨期权价值的各种可能情况，其中 $U=1.1$，$D=0.9$。实际上，U 和 D 不需要对称取值（即 U 不一定要等于 $1/D$），只要保证 $D<(1+r)<U$，我们都可以对期权进行定价。例如在图 8—3 中，U 不等于 $1/D$，但在 $t=2$ 时，网格路径在中点重合在一起，因为无论 U 和 D 等于多少，沿着 SUD 或是沿着 SDU，最终股票价格都等于 99。99 要小于最初股价 100，但我们把网格绘成对称的图形，而忽略了这一差别。在下文和以后章节中我们将会看到，有许多方法来构造风险中性网格图，其中一种确实要求 $U=1/D$ 的对称性，不过这里我们先不去考虑这一点，因为现在要做的事情还很多。

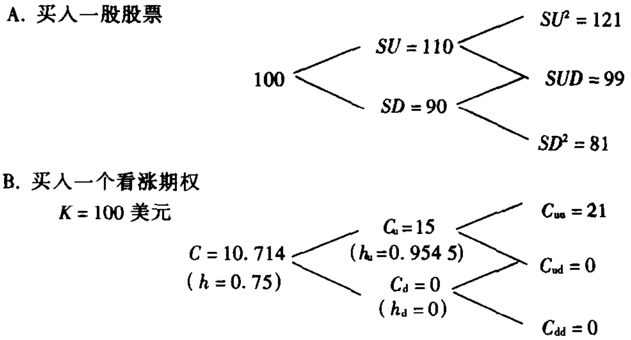


图 8—3　两期 BOPM 的收益

在任何节点，我们都可以构造出无风险对冲组合，并利用公式（8.11），根据 C_{uu}、C_{ud} 和 C_{dd} 的已知值通过回溯法计算出各节点上期权的价值。这里我们隐含地使用了风险中性定价方法。比如，图 8—3B 的上面两个分支和表 8—4，我们有

$$C_u=\frac{1}{R}[qC_{uu}+(1-q)C_{ud}]=\frac{0.75(21)+0.25(0)}{1.05}=15 \tag{8.16}$$

从下面两个分支，我们得到

$$C_d=\frac{1}{R}[qC_{ud}+(1-q)C_{dd}]=0 \tag{8.17}$$

现在我们可以计算出这个两期期权的期权价格：

$$C=\frac{1}{R}[qC_u+(1-q)C_d]=\frac{0.75(15)+0}{1.05}=10.714\ 23 \tag{8.18}$$

容易发现两期后到期的看涨期权价格要高于单期后到期的相同看涨期权的价格 $C=7.143$。每个节点上的对冲比率可以通过公式（8.19）求出（见图 8—3 和表 8—4）：

$$h_u=\frac{C_{uu}-C_{ud}}{S(U-D)}=\frac{21}{110(0.2)}=0.954\ 545 \tag{8.19a}$$

$$h_d=\frac{C_{ud}-C_{dd}}{S(U-D)}=0 \tag{8.19b}$$

$$h=\frac{C_u-C_d}{S(U-D)}=\frac{15-0}{100(0.2)}=0.75 \tag{8.19c}$$

表 8—4　　**二叉树在 $n=2$ 时**

输入参数	
向上比率	**0.1**
向下比率	**−0.1**
***S*（*t*=0）**	**100**
K	**100**
r	**0.05（每期利率）**
U	**1.1**
D	**0.9**
q	**0.75**

第 1 栏：股票价格 *S*

UPS 的数量			
2			121
1		110	99
0	100	90	81
时间	**0**	**1**	**2**

第 2 栏：看涨期权价格 *C*

UPS 的数量			
2			21
1		15	0
0	10.714 29	0	0
时间	**0**	**1**	**2**

第 3 栏：对冲比率 *h*

UPS 的数量			
2			
1		0.954 545	
0	0.75	0	
时间	**0**	**1**	**2**

第 4 栏：对冲组合的价值 *V*

UPS 的数量			
2			70.875
1		67.5	70.875
0	64.285 71	67.5	70.875
时间	**0**	**1**	**2**

对冲比率最初为0.75，如果随后的分支是上一支，它将上升到0.954 5，如果是下一支，它将在零下面，我们在各个节点都采取所需策略，从而维持delta中性头寸并获得无风险收益。

在 $t=0$ 时（$h=0.75$，$C=10.714$ 美元，$S=100$ 美元）：

售出1 000个看涨期权，购入750股股票

以100美元购入750股股票=75 000美元

以10.714美元售出1 000个看涨期权=10 714美元

净投资=64 285美元

在 C_u 节点（$h_u=0.954\ 5$，$C_u=15$ 美元，$S=110$ 美元）：

组合的价值 V_u=750(110美元)−1 000(15美元)=67 500(美元)

第1期的收益=67 450美元/64 285美元=1.05(或5%)

新的对冲比率 $h_u=0.954\ 5=N_s/N_c$：

策略为：售出1 000个看跌期权，持有954.5股股票（方法A）。

或者：售出785.7个看跌期权(=750/0.954 5)，持有原来的750股股票（方法B）。

第一种方法的持股数量从750上升到954.5（以每股110美元的价格），第二种方法看起来要便宜一些，因为它以 $C_u=15$ 的价格购回了214.3个看涨期权(=1 000−785.7)。现在假设我们采用方法B，我们不增加“自有资金”，而是以5%的无风险利率借得购回看涨期权所需资金。

方法B： 以15美元的价格购回214.3个看涨期权=3 214美元（借款）

在 C_{uu} 节点（$C_{uu}=21$ 美元，$S=121$ 美元，$r=0.05$）：

股票的价值=750(121美元)=90 750(美元)

减去看涨期权的价值=785.7(21美元)=16 500(美元)

减去贷款的价值=3 214美元(1.05)=3 375(美元)

所以组合的价值 V_{uu}=70 875美元

第2期的收益=70 875美元/67 500美元=1.05（或5%）

如果采用方法A，我们最终也会得到组合价值 V_{uu}=70 875美元，收益率为5%。

方法A： 继续保持售出的看涨期权数为1 000并增加股票为954.5股

以110美元的价格购入(954.5−750)股股票=22 495美元（借款）

在 C_{uu} 节点（$C_{uu}=21$ 美元，$S=121$ 美元，$r=0.05$）：

股票的价值=954.5(121美元)=115 494.50(美元)

减去看涨期权的价值=1 000(21美元)=21 000(美元)

减去贷款的价值=22 495美元(1.05)=23 619.75(美元)

所以组合的价值 V_{uu}=70 874.75美元(=70 875美元)

第2期的收益=70 875美元/67 500美元=1.05(或5%)

方法A和方法B的组合价值 V_{uu} 完全相同，方法A中，我们持有更多股票，同时也出售了更多看涨期权，因为股票价格 S 上升时，持股数量越多，组合的价值越大，而出售的看涨期权和更多的利息支出降低了组合的价值，这两种作用合起来，得到与方法B相同的净效果。本例中我们假设交易费用为零，但在实际操作中，因为交易费用（如股票和期权的买卖价差）的存在，采用不同的对冲策略可能造成最终组合价值不同，我们可以利用编制好的计算机程序来求出最佳的对冲方式。

下面我们看一下从 C_u 节点出发，对冲比率 $h_u=0.954\,5$，采用方法 A 时移动到 C_{ud} 节点的情形。

在 C_{ud} 节点（$C_{ud}=0$，$S=99$ 美元，$r=0.05$）：

股票的价值＝750(99 美元)＝74 250(美元)

减去看涨期权的收益＝785.7(0)＝0

减去贷款的价值＝3 214 美元(1.05)＝3 375(美元)

所以组合的价值 V_{ud}＝70 875 美元

这与 V_{uu} 完全相同。当然，得到这个结果没什么惊奇的，因为我们的策略就是 delta 对冲从而获得无风险收益。不过我们应注意到，尽管这两种方法结果相同，但收益的构成情况却不一样。下面我们转到 $t=0$ 节点。

在 C_d 节点（$h_d=0$，$C_d=0$，$S=90$ 美元）：

$t=0$ 时我们售出 1 000 个看涨期权，买入 750 股股票，因而现在有：

组合价值 V_d＝750(90 美元)－1 000(0)＝67 500(美元)

第 1 期的收益＝67 500 美元/64 285 美元＝1.05(或 5%)

这与 V_u 的结果相同。新的对冲比率为 $h_d=0$，意味着我们需要售出零个看跌期权，持有零股股票。因此我们需要把已有的 750 股股票售出，并名义上以 $C_d=0$ 的价格把售出的 1 000 个看涨期权购回。出售股票的总收入是 67 500 美元，我们把这笔资金投资于无风险资产上，第二期的收益自然就与股票价格是 99 美元还是 81 美元毫无关系（见图 8—3）。因此，如果一个看涨期权处于深虚值状态，对冲比率成为零，如果看涨期权处于深实值状态，对冲比率将等于 1。以上分析表明，如果要对一个组合进行完全对冲，那么对组合的头寸就要随时进行调整。表 8—5 中给出了 10 个节点的情况，并得出 C_{10} 的价格＝39.086。

表 8—5　　**二叉树在 $n=10$ 时**

输入参数					
向上比率	**0.1**				
向下比率	**－0.1**				
***S* (*t*=0)**	**100**				
K	**100**				
r	**0.05**				
U	**1.1**				
D	**0.9**				
q	**0.75**				
第 1 栏：股票价格 *S*					
UPS 的数量					
10					259.374 2
9				235.794 8	212.215 3
8			214.358 9	192.923	173.630 7
7		194.871 7	175.384 5	157.846 1	142.061 5

续前表

6							177.1561	159.4405	143.4964	129.1468	116.2321
5						161.051	144.9459	130.4513	117.4062	105.6656	95.099
4					146.41	131.769	118.5921	106.7329	96.0596	86.45364	77.80828
3				133.1	119.79	107.811	97.0299	87.32691	78.59422	70.7348	63.66132
2			121	108.9	98.01	88.209	79.3881	71.44929	64.30436	57.87392	52.08653
1		110	99	89.1	80.19	72.171	64.9539	58.45851	52.61266	47.35139	42.61625
0	100	90	81	72.9	65.61	59.049	53.1441	47.82969	43.04672	38.74205	34.86784
时间	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

第 2 栏：看涨期权价格 *C*

UPS 的数量

10											159.3742
9										140.5567	112.2153
8									123.6559	97.6849	73.63069
7								108.488	84.68159	62.60799	42.06148
6							94.88585	73.05673	52.79349	33.9087	16.23212
5						82.70213	62.6914	44.1337	26.98107	11.59437	0
4					71.80857	53.48961	36.58217	21.24402	8.281692	0	0
3				62.09384	45.36839	30.0784	16.58275	5.915495	0	0	0
2			53.45985	38.24987	24.5443	12.85086	4.225353	0	0	0	0
1		45.81814	32.05664	19.88826	9.897783	3.018109	0	0	0	0	0
0	39.08673	26.70984	16.0114	7.583129	2.155792	0	0	0	0	0	0
时间	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

第 3 栏：对冲比率 *h*

UPS 的数量

10											
9										1	
8									1	1	
7								1	1	1	
6							1	1	1	1	
5						0.999511	0.997718	0.989351	0.950305	0.768089	
4					0.997627	0.99072	0.965059	0.875989	0.603499	0	
3				0.993245	0.977177	0.927522	0.789887	0.474178	0	0	
2			0.985288	0.956111	0.878866	0.700461	0.372568	0	0	0	
1		0.972873	0.927354	0.821914	0.613091	0.292732	0	0	0	0	
0	0.955415	0.891402	0.759576	0.531001	0.230004	0	0	0	0	0	
时间	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

两期情况下利用错误定价进行无风险套利的方法与单期情况非常类似，但“超额利润”（即高出无风险收益率的部分）可能产生于两期之中任何一期，或是在两期都产生，这依赖于错误定价在何处被纠正。如果在第 1 期定价错误没有被纠正，那么对冲组合的收益可能会小于无风险收益率，但在第 2 期期权到期时，定价错误必然被纠正，因而 $t=1$ 和 $t=2$ 期间该组合将获得超额利润。如果 R_{01} 和 R_{12} 分别是第 1 期和第 2 期的组合收益率，那么如果期权最初定价有错误，$(1+R_{01})(1+R_{02})$必然大于$(1+r)^2$。比如，假设看涨期权最初定价过高，你可以在 $t=0$ 时出售一个看涨期权，并购入 h 股股票。如果在第 1 期看涨期权价格没有下跌足够程度，你可能在第 1 期获得比无风险收益率要低的收益率。如果在第 1 期期末，看涨期权定价错误被纠正，那么你可以获得比无风险收益率更高的收益率（于是第 2 期你的收益率将与无风险收益率相同）。最后，如果第 1 期期末，看涨期权价格跌到“公平价格”之下，你在第 1 期将获得比无风险收益更多的收益，但此时你应该平仓，并建立被低估价格看涨期权的多头，同时卖空股票，把所得资金投资于无风险资产上，这样在第 2 期你又将获得超额利润（即两期都获得超额利润）。

多期情况

公式(8.16)和公式(8.17)给出了以最终收益 C_{uu}，C_{ud}和 C_{dd}表达的 C_u 和 C_d 值，将公式(8.18)中的 C_u 和 C_d 进行代换，我们得到

$$C=\frac{1}{R^2}[(1)q^2C_{uu}+2q(1-q)C_{ud}+(1)(1-q)^2C_{dd}] \tag{8.20}$$

上式中的“2”代表有两条路径可以达到股价 SUD（分别是 UD 或是 DU），“1”表示到达 SU^2 和 SD^2 都只有一条路径。我们可以把 q 理解为在风险中性世界里股价上移的概率，$(1-q)$是下移的概率。那么到达节点 UU，UD 和 DD 的概率分别是 q^2，$2q(1-q)$和$(1-q)^2$。BOPM 公式（8.20）表明看涨期权的价格是 $t=2$ 时期权最终收益的风险中性概率权重均值。因此 C 是风险中性概率下期权收益的期望值，并以无风险利率折现。一般到达任一最终股价节点的路径都由下面的二项式系数公式给出：

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\ k!} \tag{8.21}$$

其中，$n!=n(n-1)(n-2)\cdots1$，$0!=1$，n 为二叉树的时期数目，k 为股价向上移动的次数。

当 $n=2$ 时：

$k=2$ 的路径有$(2!)/(0!\ 2!)=1(UU)$

$k=1$ 的路径有$(2!)/(1!\ 1!)=2(UD$ 或是 $DU)$

$k=0$ 的路径有$(2!)/(2!\ 0!)=1(DD)$

因此该式在 $n=2$ 时成立。读者可以自己画出 $n=3$ 的二叉树，来验证 $k=1$，即股价上移一次的可能路径有

$$\binom{n}{k}=3!\ /2!\ 1!\ =3$$

这几条路径分别是 UDD，DUD 和 DDU(见表 8—5)。因此 n 时期情况下，二叉树公式变成

$$C=\frac{1}{R^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\max[SU^kD^{n-k}-K,0] \tag{8.22}$$

股票价格在 n 时期后到达 $\binom{n}{k}q^k(q-q)^{n-k}$ 的概率是 SU^kD^{n-k}。注意到公式(8.22)中方括号内一项是该节点上收益的另一种写法。例如 $n=2$ 时：

$$C_{\mathrm{uu}}=\max[0,SU^2-K]\quad C_{\mathrm{ud}}=\max[0,SUD-K]\quad C_{\mathrm{dd}}=\max[0,SD^2-K] \tag{8.23}$$

> **二项式公式说明期权价格等于期权在到期日的收益（在风险中性概率下）的期望值，并以无风险利率折现。**

BOPM 中的对冲比率可以在每个节点分别计算出，表 8—5 列出了 $n=10$ 的情况。BOPM 假设：

- "上移"和"下移"（U，D）的幅度都是已知的，但不需要两者对称（即 $U\neq 1/D$），在多期二叉树模型中，这两个幅度都是常量（即乘数模型）。
- U 和 D 依赖于股票价格的实际波动率而不是增长率。
- 进行对冲时，即使对冲比率要不断进行调整，我们也假设不发生任何交易费用。
- 期权不会提前执行，股票也不分派任何红利（但我们下文将放松此假设）。

看跌期权的价格也可由公式（8.22）求出，但方括号内要换成看跌期权的收益 $\max[0,K-SU^kD^{n-k}]$。公式（8.22）显示期权价格依赖于执行价 K，标的资产价格 S，到期日 n，无风险利率 r 和标的资产的波动率（U，D），但它与投资者的个人风险偏好和股价实际涨跌的概率无关。

U 和 D 来自何处？

$t=0$ 时，r，K 和 S 都是已知的。上文我们证明，如果我们已知 U 和 D，那么我们可以通过 BOPM 公式所包含的 RNV 思想来对期权进行定价。但是不同股票的波动率不同，具有不同的 U 和 D 的值，因而具有不同的期权价格。U 和 D 的值必须与股票的实际测量波动率相关，实际上一个确定 U 和 D 的方法是

$$U=\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{8.24a}$$

和

$$D=\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{8.24b}$$

其中，σ 为在复利计算下股票收益的年观测标准差，$\Delta t=T/n$，T 为以年为单位的到期时间，n 是二叉树的时期数。

我们把 T 年分成 n 步，每一步代表一小段时间 $\Delta t(=T/n)$。注意到网格中任意相邻两点的差为 $\ln(SU)-\ln(SD)=2\sigma\sqrt{\Delta t}$，因此 SU 和 SD 的合适间距由股票的波动率 σ 直接决定。我们这种确定 U 和 D 的方法使 $U=1/D$，从而形成二叉树的对称结构，但我们可以证明，如果我们的目的是建立一个风险中性的网格，那么对称性并不是必要条件。在 $U=1/D$ 时，节点 SUD 或 SDU 的值都等于 S，因此这个风险中性网格不仅使路径重合起来，而且是几何对称的结构。如果 S 在

$t=0$ 时是100，在 $t=2$ 的中间节点上，它也将是 100。在本书其他部分，我们还会遇到“对称的风险中性网格”问题。最后我们还应注意到 U 和 D 不依赖于股票的平均增长率，因此期权价格也与股票的增长率无关，这也是 RNV 的体现。

复制组合

上文中提到，如果你是 h 股股票的多头并出售一个看涨期权，那么在一个时期后，你将得到确定的收益。你也可以通过投资于无风险债券而获得这个 $t=1$ 时的确定收益。因此以上分析涉及一个复制的组合：

$$N\text{ 股股票的多头}+1\text{ 个看涨期权的空头}=\text{无风险借款} \tag{8.25}$$

$$NS+(-C)=-B$$

其中，N 为持有的股票数量（即对一个看涨期权的对冲比率）。公式（8.25）允许我们计算单期的看涨期权价格：

$$C=\frac{1}{R}[qC_u+(1-q)C_d] \tag{8.26}$$

其中，$R=(1+r)$，$q=(R-D)/(U-D)$为无风险中性概率。

复制一个看涨期权多头

在最初的例子中，我们通过构造一个无风险组合来实现对看涨期权的定价，这个过程需要在每个节点调整对冲比率。现在我们通过使用对一个看涨期权多头的复制组合来得到公式（8.26）。这又是金融工程的一个实例。

> **考虑通过股票和债券（即无风险资产）的组合来复制看涨期权多头的收益。**

我们把公式（8.25）写成 $C=NS+B$ 的形式。

这里我们令 C 等于复制组合的成本，从而得到看涨期权的价格，这个包括股票和债券的复制组合在 $t=1$ 时与看涨期权具有同样的收益结构。

如图 8—4 所示，考虑以 S 的价格购买 N 股股票，并持有收益为 $R=(1+r)$的 B 美元无风险债券。当 $B>0$ 时，等价于购买债券，当 $B<0$ 时，等价于发行债券，换一种说法就是，$B>0$ 等同于借出现金，$B<0$ 等同于借入现金。$t=0$ 时，组合的成本为：

复制组合 A：股票＋债券

$$\text{复制组合的成本}=(NS+B)\text{美元} \tag{8.27}$$

在 $t=1$ 时，组合 A 的收益是（NS_u+BR）或者是（NS_d+BR）。现在我们通过使组合 A 的收益等于 C_u 和 C_d 来复制一个看涨期权多头的收益：

$$(NS_u+BR)=C_u \tag{8.28a}$$

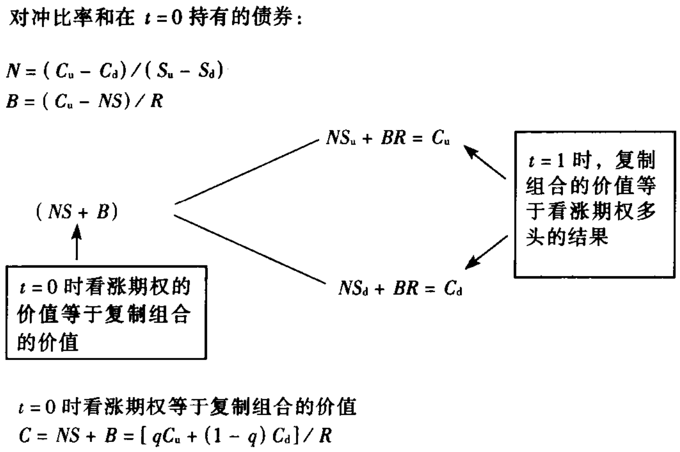

对冲比率和在 $t=0$ 持有的债券：
$N=(C_u-C_d)/(S_u-S_d)$
$B=(C_u-NS)/R$
$NS_u+BR=C_u$
$(NS+B)$
$NS_d+BR=C_d$
$t=1$ 时，复制组合的价值等于看涨期权多头的结果
$t=0$ 时看涨期权的价值等于复制组合的价值
$t=0$ 时看涨期权等于复制组合的价值
$C=NS+B=[qC_u+(1-q)C_d]/R$

图 8—4　股票＋债券复制看涨期权多头

$$(NS_d+BR)=C_d \tag{8.28b}$$

两式相减得到

$$N=\frac{C_u-C_d}{S_u-S_d} \tag{8.29}$$

从公式(8.28a)和公式(8.28b)我们得到

$$B=\frac{C_u-(NS_u)}{R}=\frac{C_d-(NS_d)}{R} \tag{8.30a}$$

把 N 用公式(8.29)的值代入，并使用 $S_u=SU$，$S_d=SD$：

$$B=\frac{S_uC_d-S_dC_u}{R(S_u-S_d)}=\frac{UC_d-DC_u}{R(U-D)} \tag{8.30b}$$

因为 $C_u-C_d=N(S_u-S_d)$，并且由公式(8.29)中的定义，我们可以很容易看出公式(8.30a)中 B 的两个表达式相等。我们选择的股票加债券的复制组合在 $t=1$ 时的收益与看涨期权的收益相同，因此在 $t=0$ 时看涨期权的价格必然与这个复制组合的成本相等。由公式(8.30b)和公式(8.27)，我们得到

$$C=(NS+B)=\frac{1}{R}[qC_u+(1-q)C_d] \tag{8.31}$$

其中，$q=(R-D)/(U-D)$。股票股数 N 与我们早先推导中的对冲比率相等。$R=(1+r)$ 等于单期的无风险利率。如果我们用复利来计算年利率 r_c，那么 $R=e^{r_c\Delta t}$，其中 $\Delta t=T/n$。

现在让我们复制两个时期情况下的看涨期权价值。从图 8—3B 中我们考虑在 $t=0$ 时发生的情况，由公式(8.29)和公式(8.30)我们得到：

$$N_0=\frac{C_u-C_d}{S_u-S_d}=\frac{15-0}{100(0.2)}=0.75 \quad （同前文） \tag{8.32}$$

$$B_0 = \frac{C_u - (N_0 S_u)}{R} = \frac{15 - 0.75(110)}{1.05} = -64.286 \tag{8.33}$$

因此在 $t=0$ 时，复制组合包括借入 64.286 美元并购买 75 美元的股票。这是一个 10.714 美元的净投资，这一数字与前面我们所得的期权价格 C 相等。这里我们用 0.75 股股票的多头和一个债券的空头来复制看涨期权多头的收益。如果我们是对看涨期权多头进行对冲，那么我们应该持有与复制组合完全相反的头寸，即 0.75 股股票的空头和一个债券的多头（即借出现金）。股票＋债券复制组合的上移或下移节点结果分别是：

节点 U：$N_0 S_u + B_0 R = 0.75(110) - 64.286(1.05) = 75 - 67.5 = 15$

节点 D：$N_0 S_d + B_u R = 0.75(90) - 62.286(1.05) = 67.5 - 67.5 = 0$

这当然也是看涨期权在最初两个节点的价值。现在我们调整复制组合的头寸，因此在 U 节点上：

$$N_u = \frac{C_{uu} - C_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} = 0.9545 \tag{8.34}$$

$$B_u = \frac{C_{uu} - (N_u S_{uu})}{R} = \frac{21 - 0.9545(121)}{1.05} = -90 \tag{8.35}$$

借入 90 美元的原因是你要以 110 美元的价格买入(0.9545－0.75)＝0.2045 股股票。总成本 22.5 美元加上原来的债务 67.5 美元，使债务总值达到 90 美元。从 U 节点移动到 UU 和 UD 节点的结果是：

节点 UU：$N_u S_{uu} + B_u R = 0.9545(121) - 90(1.05) = 75 - 67.5 = 21$

节点 UD：$N_u S_{ud} + B_u R = 0.9545(99) - 90(1.05) = 94.5 - 94.5 = 0$

我们又一次把在这两个节点上的看涨期权价值复制出来(见图 8—3B)。下面考虑节点 D，$N_d = (C_{ud} - C_{dd})/(S_{ud} - S_{dd})$，复制组合全部由债券构成，$B_d = C_{ud}/R$。但因为 $C_{ud} = 0$，我们持有零份债券。因此复制组合在节点 D 价值为零，复制组合在 $t=2$ 时的价值也为零，但这正好是看涨期权在节点 UD 和 DD 的价值(见图 8—3B)。

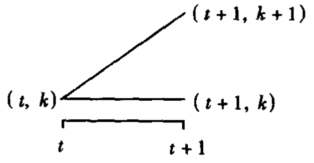
实际上，我们计算对冲比率时并不知道 C_u 和 C_d（S_u 和 S_d）的值，因此我们无法完美地复制看涨期权的收益。如果实际股票价格并不像预期那样变化，造成看涨期权的价值与 C_u 和 C_d 偏离(虽然这个偏差在 Δt 趋近于 0 时非常小)，结果会造成对冲误差。当然如果把以上的分析扩展到 $n>2$ 的情况时，对冲比率 N 在每个未来节点都将改变，借入或借出的现金 B 也会随之变化。这是又一个**动态对冲**的例子，只不过我们在试图复制看涨期权多头的收益。

上面我们通过包含股票和债券的复制组合和前面介绍的 delta 对冲无风险组合，都得到了同样的 BOPM 公式来对看涨期权进行定价。如果你是一个议员，以“太危险”为理由，成功地使禁止期权（看涨期权）交易的法案得以通过，那么你的法案毫无成果而言，因为看涨期权可以通过股票加债券进行复制，当然，不要忘记的是，我们在推导中假设了交易成本为零。

到目前为止，我们使用了概念 S_i（$i=$U，D，UU，DD，UD)，这只是因为我们比较习惯这样表示，但它看起来确实有些啰嗦。更常用的方式是用 i 来表示网格中实际“上移”的期数，用零

来表示所有“下移”的情况，在几何上这表示为水平移动。我们用 $S_{t,k}$ 来表示每个节点的情况，其中，t 是网格中的时期总数，k 是对应于 t 时期股票上移的次数。这样的表示有利于用计算机程序来绘出网格。利用这种表示方法，我们可以把风险中性的期权定价表示为（见图 8—5）：

$$C_{t,k}=[qC_{t+1,k+1}+(1-q)C_{t+1,k}]/R \tag{8.36}$$



在 t 时看涨期权的价值通过递推给出

$C(t,k)=[qC(t+1,k)+(1-q)C(t+1,k+1)]/R$

图 8—5　节点

相应地，我们持有 N^c 个看涨期权（上例中 $N^c=1$）的收益情况用股票加债券的复制组合可表示为

$$\text{节点}\ (t,j)\ \text{上复制组合的价值：}N^s_{t,j}S_{t,j}+B_{t,j} \tag{8.37}$$

对冲参数为

$$h_{t,j}\equiv\frac{N^s_{t,j}}{N^c}=\frac{C_{t+1,j+1}-C_{t+1,j}}{S_{t+1,j+1}-S_{t+1,j}} \tag{8.38}$$

和

$$B_{t,j}=\frac{N^cC_{t+1,j+1}-N^s_{t,j}S_{t+1,j}}{R} \tag{8.39}$$

8.5　提前执行、美式期权与红利支付

迄今为止，我们的分析只限于在到期日执行的欧式期权。美式期权可以在任何时候执行，那么何时是执行美式期权的最优时间呢？这又如何影响到美式期权的定价呢？证明这一点并不容易，我们将用二叉树来对此问题进行概括介绍。读者首先可以了解美式期权有下列几种结果：

- 对于标的于不支付红利股票的看涨期权，提前执行永远不是最优选择。
- 对于标的于支付红利股票的看涨期权，提前执行有时是最优选择。
- 对于标的于股票（支付或不支付红利）的看跌期权，提前执行有时是最优选择。

美式期权（不支付红利）

为了通过 BOPM 来实现对美式期权的定价，我们首先注意到，在到期日期权是“欧式”的，对两期看跌期权，收益将是 P_{uu}，P_{ud} 和 P_{dd}。我们现在使用回溯法来计算前一节点的价值，用 P_u

和 P_d 来表示。现在提前执行的可能需要被考虑进我们的模型之中。比如在节点 U，如果看跌期权被提前执行，它的价值将是 $\max\{K-S_u,0\}$。因此，如果 $K-S_u>P$，我们可以把二叉树中的 P_u 用 $K-S_u$ 代替。如果 $K-S_u<P_u$，我们让该节点处的值不变，仍为 P_u。我们在节点 D 重复上述过程，这样与原来的欧式期权节点值相比，新的节点值可能会因为 P_u，P_d 被替换掉而有所不同。我们用节点 U 和 D 上的值可以得到 $t=0$ 时看跌期权的“试验价值”P^*。最后我们把 P^* 与 $\max\{K-S_0,0\}$ 进行比较，用其中较大的那个值作为 $t=0$ 时看跌期权的价格。显然如果 $K-S_0$ 超出 P^*，这个看跌期权将被立即执行。下文我们将会看到，通过二叉树回溯来求得提前执行期权在更复杂的情况下也同样适用。

红利与 BOPM

当股票支付红利时，二叉树会变得相当复杂，我通常会做一些简化假设来使问题变得容易解决。例如，如果我们假设每期红利的支付都以连续速率 δ 进行，那么利用回溯法可以得到一个非常简单的看涨期权定价公式，我们把它叫做两时期的**标的于支付红利股票的欧式看涨期权**：

$$C_u=\frac{1}{R}[qC_{uu}+(1-q)C_{ud}] \quad 和 \quad C_d=\frac{1}{R}[qC_{ud}+(1-q)C_{dd}]$$

其中

$$q=\frac{(1+r-\delta)-D}{U-D}$$

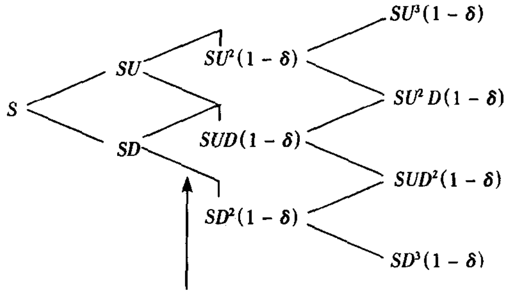
很容易看出，与不支付红利股票的看涨期权相比，定价公式只有 q 的定义发生了变化，其中 r 被 $r-\delta$ 所取代。这一点与风险中性有关，因为在风险中性的世界里，如果股票的收益率等于无风险利率 r，但是你以速率 δ 收到红利，那么股票的期望增长率必定等于 $r-\delta$。对于美式看涨期权来说，在沿着二叉树进行每一步回溯之前，C_u 和 C_d 的值必须与它们的内涵价值进行比较，在提前执行为最优时，它们将被替换掉。

已知红利收入

这是一种略微复杂的情况。假设二叉树有 n 个时期，每个节点相距 Δt 时段，那么 $n=T/\Delta t$。例如 $T=30/360$，我们选取 $\Delta t=1/360$，那么 $n=30$，每个节点代表实际上的一天。假设股票在 $t=i(\Delta t)$ 时支付红利（$i=1,2,3,\cdots,n$），在 $t=i(\Delta t)$ 之前的节点将有价值 SU^jD^{i-j}（对于 $j=0$，1，2，…，i），但股票付红利之后，节点的价值将变成 $S(1-\delta)U^jD^{i-j}$，其中 δ 是已知的红利收入。如果在期权的生命期，有几次已知的红利支付 δ_i，那么支付红利后日期的节点将有 $S(1-\delta_i)U^jD^{i-j}$。比如，在第 2 个节点前支付的一次红利，二叉树的结构如图 8—6 所示。实际上 δ 是一个需要估计的值，对于股票指数来说，固定红利支付率的假设还有一定道理，但对于单只股票来说，这个假设便很难成立，因为红利支付往往会集中在几个月份。

当考虑到提前执行期权的可能性后，为**标的于支付红利股票的美式看涨期权**定价应采取以下步骤：

- 在到期日 T 我们知道看涨期权的收益。我们再沿着二叉树回溯到前一个节点 $T-1$，根据



恰好在第 2 个节点之前的除权日，
红利收益已知的单一红利支付，随后树再次重合。

图 8—6　二叉树：支付红利

上述欧式看涨期权的公式计算出看涨期权的“回溯价值”。

- 对 $T-1$ 上的每一个节点，我们把上一步计算出的“回溯价值”与看涨期权的内涵价值 IV＝max{标的物价格－K,0}相比较，取其中较大值，并利用该值进行下一步回溯。
- 例如，如果 $C_{uu}=4.5$ 但是 $SU^2(1-\delta)=105$，$K=100$，那么提前执行的收益为 5（>4.5），因此“5”将替代 4.5。C_u 的计算如下：

$$C_u=\frac{1}{R}[q(5)+(1-q)C_{ud}]=(\text{比如})3.7 \tag{8.40}$$

这个值将与节点 U 的内涵价值进行比较。

- 重复以上步骤，直到我们达到 $t=0$ 时，我们把“回溯价值”C_0 与它的内涵价值 $\max\{0, S_0-K\}$相比较，期权价格将是两者之中的最大值。
- 由于提前执行的可能，美式期权价格将始终大于或等于一个其他方面与之相同的欧式期权。

已知现金红利

当红利不是连续支付时，问题会变得稍微复杂一些。首先，当支付红利后，股票价格会下跌与红利 D 相等的数量（忽略税收的因素）。这是因为如果股票价格下跌数量少于 D（比如 $Z<D$），那么你可以在股票付息之前买入股票，在得到红利 D 后马上将其以 $S-Z$ 卖出。这样利润将是 $D+S-Z-S=D-Z>0$（忽略现金延期支付的折现问题）。

如果股价 S 以 U 或 D 值变化，那么二叉树的节点将不再重合，这样节点数量将变得非常多。为避免这种情况发生，我们采用下面方法。我们令 S^*＝股票价格－所有已知未来红利的现值，并使 S^* 以 U 和 D 波动。假设除权日为 τ，那么：

除权日之前：$S^*=S-De^{-r(\tau-i\Delta t)}$　$(i\Delta t\leqslant\tau)$

除权日之后：$S^*=S$　$(i\Delta t>\tau)$

同时，U 和 D 的 σ 值也被 S^* 的波动率 σ^* 代替，因此 $U=e^{\sigma^*\sqrt{\Delta t}}$，$D=1/U$，$q=(R-D)/(U-D)$是通常的风险中性概率。这样对于 S^* 我们得到一个可以重合的二叉树，在此基础上，加上未来红利的现值，我们就得到 S 的二叉树。如果 S_0^* 是 S^* 在 $t=0$ 时的价值，那么股价 S 的二

叉树将是：

除权日之前：$S=S_0^* U^j D^{i-j}+De^{-r(\tau-i\Delta t)}$　（$i\Delta t\leqslant\tau$）

除权日之后：$S=S_0^* U^j D^{i-j}$　（$i\Delta t>\tau$）

假设在第 5 期之后股票要支付 10 美元的红利，那么红利的现值$=10/(1+r)^5=$(假设是)2 美元。如果 $S_0=100$，那么 $S_0^*=98$。然后我们利用公式求出 S^* 的网格，并从 S^* 再求出 S 来。从期权到期日起，沿着 S 的二叉树进行回溯，就可以得出欧式看涨期权（看跌期权）的价格。

为了对标的于支付红利股票的美式看涨期权进行定价，我们要计算出每一节点上期权的内涵价值，当然是否提前执行要根据 S 而不是 S^* 进行判断。比如，如果在第 τ 个时期股票刚好要支付红利，在该时期上，向上的节点 $S^*=110$ 美元，红利 $D=3$ 美元，那么 τ 时期付利前股票价格 S 应是 113 美元。股票支付红利后，价格立即从 113 美元跌到 110 美元，而付利之前看涨期权价值刚好是 3 美元($=113-110$)。如果回溯价值 C_τ 比 3 美元的内涵价值要小，那么我们用内涵价值替换 C_τ：

$$C_{\tau-1}=\frac{1}{R}[q(20)+(1-q)C_{\tau-1,\mathrm{d}}] \tag{8.41}$$

在每个节点我们都要进行类似的计算和比较，并通过二叉树回溯最终求出标的于支付红利股票的期权价格。

总结：BOPM

- 通过构造一个包含股票多头和看涨期权空头（即出售看涨期权）的无风险组合，我们可以为期权定价。
- 期权价格可以由 U，D，r，q 和到期时间决定。U 和 D 由股票实际测量的波动率 σ 决定，但与股票的预期增长率无关。
- 参数 q 可以被理解为风险中性概率。因此定价期权时，我们假设这个世界风险中性，而由此得出的期权价格在现实世界中是成立的。BOPM 公式是由到期日沿着二叉树回溯得到的。我们在第 17 章中将详细地说明这些问题。
- 二叉树方法可以定价欧式期权与美式期权，因此是一个非常灵活的方法。

8.6 Black - Scholes 模型

19 世纪 60 年代，美国的投资者以场外交易的方式交易期权，但非常奇怪的是，没有人知道如何正确对期权定价。当然当时的投资者都知道一些因素对期权价格有影响，比如执行价越低，成熟期越长，利率越高，标的股票波动越大，看涨期权的价格就越高。但如何把这些因素统一在一个公式里从而清楚地给出期权价格呢？文章 8.1 介绍了 Black - Scholes 公式的一段历史。

文章 8.1　　高尚的追求

20世纪70年代初，在费希尔·布莱克（Fischer Black），迈伦·斯科尔斯（Myron Scholes）和罗伯特·默顿（Robert Merton）三位学者的合作努力之下，期权定价的问题终于得到解决。这三位学者均来自位于波士顿的麻省理工学院。布莱克在获得他的物理学学位之后，最初对认股权（相当于公司自己发行的标的于本公司股票的期权）定价的课题进行研究，与股票期权不同，当时美国有些交易所有认股权的交易。布莱克最初利用CAPM对包含有认股权和其标的股票的组合进行定价，他得出的一个重要结论就是认股权的价值不依赖于股票的收益。

斯科尔斯在20世纪60年代晚期也在麻省理工学院的斯隆管理学院从事期权定价的研究，在遇见Black以后，他们开始一起工作。当时一个年轻的应用数学家罗伯特·默顿作为研究助理加入了麻省理工学院著名经济学家保罗·塞缪尔森的团队。塞缪尔森根据他自己的早期工作，鼓励默顿对认股权定价这一领域进行探索。那时默顿用伊藤引理发展出了跨期（Intertemporal）CAPM模型，这个数学思想正是Black-Scholes公式的基础。

在麻省理工的几年间，默顿、布莱克和斯科尔斯三位学者经常在一起探讨问题。他们通往成功的道路可以被描述为“带有正漂移的随机漫步”。他们曾碰上了很多死胡同，但最终问题得以解决。

1970年，布莱克和斯科尔斯写完了他们的期权定价论文。他们说明是默顿提出建议把期权与标的资产结合起来构造出无风险组合。布莱克和斯科尔斯的论文最初被芝加哥大学经济系出版的《政治经济学》（Journal of Political Economy，JPE）退回，理由是论文太专业化了。随后哈佛大学的《经济学与统计学评论》（Review of Economics and Statistics）也拒绝了他们。不过最终在尤金·法马（Eugene Fama）和默顿·米勒（Merton Miller）的支持下，JPE接受了这一论文，并以《期权定价和公司债务》为题发表于1973年的5月及6月期上。与布莱克和斯科尔斯合作过的默顿也写了一篇论文发表于1973年春季的《贝尔经济学学报》（Bell Journal）上。

斯科尔斯和默顿都因他们出色的工作获得了诺贝尔奖，但费希尔·布莱克却因已不在人世而没有获得这一殊荣（诺贝尔奖是不颁给已去世学者的）。这几位学者也都身体力行，在投资实践中应用他们的理论成果来试图战胜市场。他们有时很成功，但有时也不走运，比如长期资本公司就是其中一例，斯科尔斯和默顿都参与了这个对冲基金的运作，但这个公司在1998年却破产了。

芝加哥期权交易所恰巧在1973年4月开始交易期权（最初是在芝加哥交易所烟雾缭绕的交易大厅里），于是Black-Scholes“新”公式很快在交易员中间流行开来（关于故事的细节，读者可以参阅伯斯特恩（Berstein）在1992年写的书）。象牙塔里的学者创造出了兼具美感和真实价值的东西。不管人们把它叫做Black-Scholes公式，还是开玩笑称它是Black-holes（黑洞）公式，用数学来解决实际问题的力量是让人吃惊的，当然不只是在现代金融领域里。在后面的章节里，我们用连续时间数学来定价期权时，这一点将变得更加明显。

Black-Scholes期权定价公式（1973）应用于欧式期权。它假设资产价格在各节点上是一个给定概率下的连续随机过程，并通过随机积分推导出该公式。正如BOPM一样，它也构造了包括股票多头和看涨期权空头的资产组合，并连续地调整组合头寸。实际上Black-Scholes公式是

BOPM 模型当股票价格变化的时间间隔 $\Delta t = T/n$ 趋近于无穷小时的极限形式。模型的假设可以表述如下：

- 所有的无风险套利机会都被消除。
- 没有交易成本和税收。
- 交易是连续进行的，一股股票可以分成任意小的部分，股票不支付红利。
- 投资者可以在期权生命期中以无风险利率无限量地借入或贷出现金。
- 股票价格服从“几何布朗运动”随机过程。这一随机过程使得股票价格具有恒定期望收益 μ 和波动率 σ 的对数正态分布（它的扩展模型可以包括 r 和 S 是时间的特定函数的情况）。

看涨期权

通过假设股票价格的对数随机过程并构造出包含期权和标的资产的对冲组合，Black 和 Scholes 得到了欧式看涨期权定价的精确公式（通过看跌—看涨平价关系可以对看跌期权定价）。欧式看涨期权的 Black - Scholes 定价公式看起来有点吓人：

$$C=S.N(d_1)-N(d_2)\mathrm{PV}=S.N(d_1)-N(d_2)K\mathrm{e}^{-rT} \tag{8.42}$$

其中，$d_1=\dfrac{\ln(S/\mathrm{PV})}{\sigma\sqrt{T}}+\dfrac{\sigma\sqrt{T}}{2}=\dfrac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$，$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}=\dfrac{\ln(S/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$，$C$ 为看涨期权的价格，r 为 T 时期的无风险利率(连续复利)，S 为股票的现在价格，T 为到期时间(以年为单位)，PV 为执行价格的现值($=K\mathrm{e}^{-rT}$)，σ 为股票(连续复利)收益的年标准方差。

$N(d_1)$是一个标准正态变量的累积概率分布函数，它给出了一个服从标准正态分布 $N(0,1)$的变量小于 d_1 的概率(见图 8—7)。实际上，当 $N(d_1)=0.025$ 时，$d_1=-1.96$，这与统计检验中的 5%置信水平类似(对应于正态分布的两个“尾巴”，$5\%=2\times2.5\%$)，另外 $N(-\infty)=0$，$N(0)=0.5$，$N(+\infty)=1$，$N(-x)+N(+x)=1$。

在表 8—6 中，我们对一个 $S=45$，$K=43$，$r=0.1$，$\sigma=0.20$，$T=0.5$ 年的期权进行了定价。我们看到 $d_1=0.745\,7$，因此 $N(d_1)=0.772\,1$。这说明在标准正态曲线下面位于$-\infty$和 $d_1=0.745\,7$ 之间的面积为 0.772 1。已知 d_1，$N(d_1)$的值可以通过标准正态分布表(利用插值)得到，或是通过幂级数近似得到(见表 8—7)，或是直接使用 Excel 等电子表格软件中的适当函数得到(即“NORMSDIST(d_1)”)。

从图 8—7 中，我们可以直观地看到：

当 $d_1\rightarrow\infty$时，$N(d_1)\rightarrow1$

当 $d_1\rightarrow-\infty$时，$N(d_1)\rightarrow0$

可以证明 $N(d_1)$($=0.772\,1$)是看涨期权在到期日处于实值状态的概率。本例中这个概率比 77%还要大，这是因为股票现价 $S=45>K=43$，正处于实值状态，而股票波动率 $\sigma^2=20\%$却相对较小，因此，股票价格在 6 个月后跌至 $K=43$ 以下的可能性非常小。现在我们已有了根据

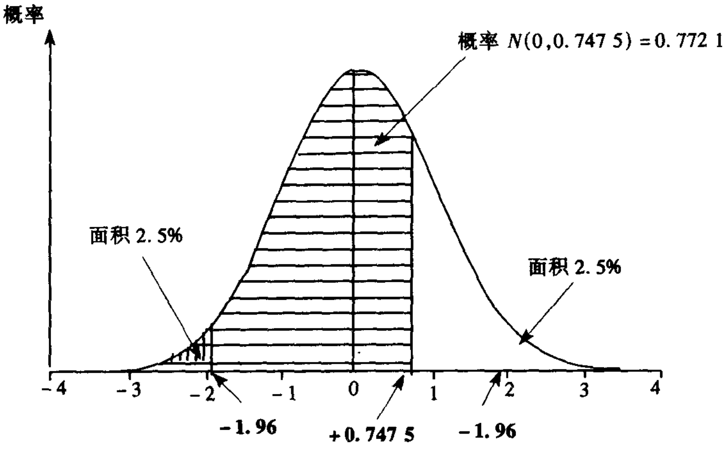


图 8—7　标准正态分布

Black - Scholes公式来决定看涨期权价格的所有信息，经计算得到 $C=5$ 美元（见表 8—6）。

表 8—6　　使用 Black - Scholes 公式得到的看涨期权价格

数据： $S=45$ 美元　　$K=43$ 美元

$r=0.1(=10\%\text{p. a.})$　　$\sigma=0.2$(每年 20%)

$T=0.5$（6 个月到期）

问题： 计算看涨期权价格 C。

答案： 执行价格的现值：

$$PV=Ke^{-rT}=43e^{-(0.1)(0.5)}=40.902\,9$$

$$d_1=\frac{\ln(45/40.902\,9)}{0.2\sqrt{0.5}}+\frac{0.2\sqrt{0.5}}{2}=0.675\,0+0.070\,7=0.745\,7$$

$$d_2=0.745\,7-0.2(0.5)^{1/2}=0.604\,3$$

根据累积正态分布表（插值）或者使用幂函数近似：

$$N(d_1=0.745\,7)=0.772\,1$$

$$N(d_2=0.604\,3)=0.727\,2$$

因此 $C=SN(d_1)-N(d_2)PV=45(0.772\,1)-0.727\,2(40.902\,9)=5.00$(美元)

看跌期权

我们可以根据看跌—看涨平价关系来对具有相同到期日和执行价的欧式看跌期权定价，得到：

$$P=C-S+Ke^{-rT} \tag{8.43}$$

$$P=5-45+43\exp[(-0.1)(0.5)]=0.902\,8$$

我们也可以从 Black - Scholes 公式直接得到

$$P=\mathrm{PV}.N(-d_2)-S.N(-d_1) \tag{8.44}$$

其中，$d_1=0.745\ 7$

$d_2=0.604\ 3$

$N(-d_1)=1-N(d_1)=1-0.772\ 1=0.227\ 9$

$N(-d_2)=1-N(d_2)=1-0.727\ 2=0.272\ 8$

因此

$$P=40.902\ 9(0.272\ 8)-45(0.227\ 9)=0.902\ 8$$

表 8—7　　对于 $N(d_1)$ 和 $N(d_2)$ 的幂级数近似

幂级数可以近似任何（连续）函数：幂级数的项数越多，精确度越高。一个有用的近似是（可以编制程序在 Excel 中使用）：

$N(x)=1-(a_1k+a_2k^2+a_3k^3)Z(x)$

$k=1/(1+ax)$

$a=0.332\ 67$

$a_1=0.436\ 183\ 6$

$a_2=-0.120\ 167\ 6$

$a_3=0.937\ 298\ 0$

$Z(x)=(1/\sqrt{2\pi})\exp[-(x^2/2)]$

例如，对于 $x=0.354\ 7$ 我们有：

$k=0.894\ 5$

$Z(0.354\ 7)=0.424\ 8$

$N(0.354\ 7)=0.590\ 1$

答案 0.590 1 与根据累积标准正态表(插值)得到的结果(0.638 6)相近。

假设 $x<0$

标准正态分布关于它的均值对称，因此，对于 $x=-0.354\ 7$，我们先计算 $x=0.354\ 7$ 的 $N(x)$，然后得到 $N(-x)$：

$N(-x)=1-N(x)$

$N(-0.354\ 7)=1-N(0.354\ 7)=0.409\ 9$

当然，实际上交易员们都利用计算机软件来完成计算工作，而只有计算的结果才显示在交易屏上。计算可以使用 Excel 或是一些标准的统计或数学软件（比如 Gauss，C++，VB，Mathematica）来实现。根据公式可以由不同现价 S，执行价 K，到期时间 T，无风险利率 r，波动率 σ 来得出不同的期权价格。下表中给出的就是用 Gauss 写的计算不同现价 S 下期权价格的程序。

```
GAUSS CODE
@ Calculating Black-Scholes for call and put (no dividends) @

tau        =180/365;                @ time to maturity @
r          =0.05;                   @ continuously compounded @
k          =100;                    @ strike price @
sigma      =0.10;                   @ annual volatility @
s          ={98,99,100,101,102};    @ inputs for underlying asset @

@ === Use Gauss procedures for Black-Scholes call and put premia == @
   {call_bs}= bscall (k, s, sigma, tau, r);
   {put_bs} = bsput (k, s, sigma, tau, r);

@ ======= Black-Scholes Procedures/Subroutines Follow ========= @

proc bscall (k, s, sigma, tau, r);
   local d1, d2, c;
      d1=(ln (s./k)+(r+sigma^2/2).*tau)./(sigma.*sqrt(tau));
      d2=d1-sigma.*sqrt (tau);
   c=s.*cdfn(d1)-k.*exp(-r.*tau).*cdfn(d2);
   retp(c);
endp;

proc bsput (k, s, sigma, tau, r);
   local d1, d2, p;
      d1=(ln(s./k)+(r+sigma^2/2).*tau)./(sigma.*sqrt(tau));
      d2=d1-sigma.*sqrt(tau);
   p=k. *exp(-r.*tau).*cdfn(-d2)  -  s,*cdfn(-d1);
   retp(p);
endp;

end;
```

在确定输入变量 K，r，τ（到期时间），σ（波动率）和 5×1 的向量 S 之后，这个程序利用子程序 bscall 和 bsput 计算对应于 $S=\{98, 99, 100, 101, 102\}$ 下的各个期权价格。看涨期权价格 Call_bs 可以与 S 绘制在一张图上，如图 8—8 所示。bscall 和 bsput 的子程序列在程序的底部，正是课本中上面给出的公式，其中“cdfn”＝N(.)。

当期权逼近它的到期日时，曲线 AB 向代表到期收益的折线移动。在一个给定的执行价，比如 S^* 时，CD 间的距离是期权的内涵价值，而 BC 是期权的时间价值。我们从图 8—8 中可以看到，如果股票价格不发生变化，那么看涨期权如果是以执行价购入的，它的时间价值将是最大的。实际的收益要依赖于持有期和股票价格的变化。例如，如果你在点 X 从一个投资者手中买入一个“现存的”看涨期权，随后股票价格上升到 S^*，那么在到期日，你的利润将是 C_c-C_x。

S 可以取不同的值，来模拟“极端事件”（如 1987 年 10 月的股市崩盘）对看涨期权价格的影响。这被称做情景分析或是压力测试。在标的资产价格变动时，对一个包括看涨期权和看跌期权的投资组合的价值变化进行分析，是后面章节所讨论的风险管理的重要内容。

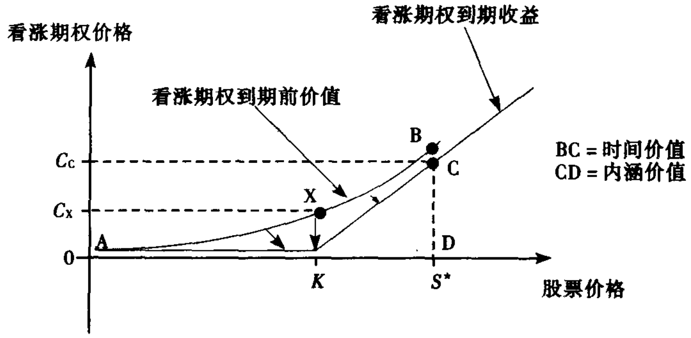


图 8—8 Black - Scholes

对 Black - Scholes 公式的分析

Black - Scholes 公式，即公式(8.42)，有一些复杂。让我们看一下 Black - Scholes 公式的结论是否与我们前面关于影响期权价格诸因素的分析符合。我们已得出结论，即看涨期权价格与 S 和 σ 正相关，S 与 K 负相关。

股票价格与执行价格

在到期日之前，由 Black - Scholes 公式给出的看涨期权价格与股票价格具有非线性或是凸性关系。如果 S 下跌到 0，C 也同样下跌为 0（见图 8—8 中的点 A)，因为期权根本不可能被行使。Black - Scholes 是否也给出此结果呢？在 $S=0$ 时，由方程（8.42)，$d_2=-\infty$，$N(d_2)=0$，因此 $C=SN(d_1)-N(d_2)Ke^{-rt}=0$。

另一方面，如果 S/K 很大，那么 C 在 B 点只比 $S-K$ 大一点。如果 S 非常大，那么看涨期权几乎是肯定要被执行的，因此它成为一个执行价为 K 的远期合约，价值为 $C=S-Ke^{-rT}$。Black - Scholes给出的结果如何呢？当 S 趋近于无穷大时，我们看到 d_1 和 d_2 也都趋近于无穷大，因此 $N(d_1)$和 $N(d_2)$都趋近于 1，因此方程（8.42）如期望一样，给出结果 $C=S-Ke^{-rT}$。

波动率

从 Black - Scholes 公式中我们不能明显看出看涨期权价格与波动率正相关。但是我们可以看出，当 σ 趋近于 0 时，Black - Scholes 公式的结果非常合理。在这种情况下，股票几乎没有任何风险，因此股票价格在到期日将是 Se^{rT}，期权收益将是

$$\max[Se^{rT}-K,\ 0] \tag{8.45a}$$

折现到 $t=0$ 时将是

$$C=e^{-rT}\max(Se^{rT}-K,\ 0)=\max[S-Ke^{-rT},\ 0] \tag{8.45b}$$

让我们看一下当 σ 趋近于 0 时，式(8.45b)是否与 Black - Scholes 公式一致。我们知道期权在到期日将确定地处于虚值或实值状态。考虑下面两种情形：

A：到期处于实值状态($Se^{rT}>K$)

在 $t=0$ 时，可以通过买低卖高而获得无风险利润。

- 借入 Ke^{-rT} 美元，以 C 美元的价格买入看涨期权。
- 在到期日支付 K 美元，取得股票，然后把股票以 Se^{rT} 美元出售。

T 时期的利润将是 $\Pi=Se^{rT}-K-Ce^{rT}$。套利将使得无风险利润为 0，我们令 $\Pi=0$，得到

$$C=S-Ke^{-rT} \tag{8.46}$$

Black - Scholes 公式(8.42)与这个结果一致，因为 $\sigma=0$ 时，我们有 $d_1=d_2=+\infty$，因此 $N(d_1)=N(d_2)=1$，$C=S-Ke^{-rT}$。当看涨期权处于深实值时，看涨期权(到期交割一股股票)与一份远期合约的多头等价，因此公式(8.46)的结果与一份(标的于不支付红利股票的)执行价为 K 的远期合约价值相同。

B：到期处于虚值状态 ($Se^{rT}<K$)

很显然，看涨期权的价值为零，这与 Black - Scholes 公式一致，因为

$$S<Ke^{-rT} \quad 表明 \quad \ln(S/Ke^{rT})<0 \tag{8.47}$$

因此当 σ 趋近于 0 时，d_1 趋近于 $-\infty$，因此 $N(d_1)$ 和 $N(d_2)$ 也都趋近于 0。由式(8.42)可得出 $C=0$，这与期权在到期日处于虚值相一致。

有红利的 Black - Scholes 公式

Black - Scholes 公式不能处理美式期权和提前执行的问题，但我们可以用它来定价支付红利的欧式期权，步骤与 BOPM 所用的方式非常类似。首先我们假设红利 D_i 是在离散的时间支付的，t_i（单位为年）是期权生命期中的除权日。为定价期权，我们只需用 $S^*=S-\text{DPV}(红利)=S-\sum_i D_i e^{-rt_i}$ 来代替 Black - Scholes 公式中的 S。

另一个办法是假设红利的支付速率是一个常量，这对股指期期权而言是有一定道理的。那么在 Black - Scholes 公式里 S 将被 $S^*=Se^{-rT}$ 替换。S^* 的表达式是这样得来的：如果 S 不变，支付的红利都以利率 δ 再投资，那么 T 时股票价格将为 $Se^{\delta T}$，因此 T 时所支付的红利的价值将是 $(Se^{\delta T}-S)$。如果像以前一样，我们让 S^* 代表 S 减去红利的现值，那么 $S^*=S-e^{-\delta T}(Se^{\delta T}-S)=Se^{-\delta T}$。

以上两种情况下，支付红利的欧式看涨期权的价格都比不支付红利的欧式看涨期权价格要低，这是因为股票支付红利后，股票价格会下跌，相应看涨期权的价格也会下跌。

8.7 从 BOPM 到 Black - Scholes

对于基于连续时间数学的 Black - Scholes 期权定价公式，我们可以通过将二叉树模型中的步数 n 增多来给出一个直观的感觉。假设收益率是连续计息的 $R_t=\ln(S_t/S_{t-1})$。统计数学中一个著名的结果是，如果股票收益是正态分布的，那么股票价格就是对数正态分布的。而后者正是 Black - Scholes在连续时间方法中所用到的假设。

在 BOPM 中，假如我们从股价 S 出发，如果下跌的乘数 D 被设为与上升的乘数 U 互为倒数，即 $D=1/U$，那么收益将是对称的（这是乘数几何过程）。这是因为 $R_u=\ln(SU/S)$，$R_d=$

$\ln(SD/S)=\ln(D)=\ln(1/U)=-\ln(U)$。另外，在 n 个连续下跌之后，股票价格将变成 $SD^n=S/U^n$，因为 $U>1$，股票价格在这个几何过程里绝不会跌到零以下。因此分布的左尾在零处被截断。另一方面，n 步连续上升后，股票价格将为 SU^n，并可以不断上升。因此我们把二叉树中的步数增加后，价格在到期日的分布正如 Black - Scholes 模型的假设一样，将趋近于对数正态。如果我们有：

$$S=99 \quad K=100 \quad r_c=0.10 \quad \sigma=0.20 \quad T=0.3\ (\text{年})$$

为把这些输入转换成 BOPM 中的变量，我们把期权的生命期进一步细分为更多的时间间隔 $\Delta t=T/n$，其中，n 是二叉树的步数，并计算 U 和 D 如下：

$$U=\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{8.48a}$$

和

$$D=\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{8.48b}$$

我们同时也要把连续复利 $r_c=0.10$ 转换成离散利率 r_p 来匹配 $\Delta t=T/n$ 的时间划分方式：

$$R=(1+r_p)=\mathrm{e}^{r_c\Delta t} \tag{8.49}$$

对于 $n=1$：

$$\Delta t=T/n=0.3/1=0.3 \qquad R=(1+r_p)=\mathrm{e}^{r_c\Delta t}=1.030\,4$$

$$U=\mathrm{e}^{0.20\sqrt{0.3}}=1.061\,8 \qquad D=\mathrm{e}^{-0.20\sqrt{0.03}}=0.941\,8$$

$n=1$ 时看涨期权价格于是变成

$$C^{(1)}=\frac{qC_u+(1-q)C_d}{R}=6.21 \tag{8.50}$$

其中

$$q=(R-D)/(U-D) \qquad C_u=\max[SU-K,\ 0] \qquad C_d=\max[SD-K,\ 0]$$

因此 $n=1$ 时，BOPM 给出 $C^{(1)}=6.21$，这与 Black - Scholes 得到的 $C^{\mathrm{BS}}=5.33$ 相差很多。但是如果我们把 n 从 1 增加到 2，3，…，等等，两种结果将越来越接近。比如 $n=30$ 时，$C^{(30)}=5.345$（见图 8—9）。对于普通香草型期权(对于复合奇异期权并不一定)选择 $n=30$ 就会得到非常近似的结果(相应的 Gauss 程序可以在网上得到)。不过用类似于 BOPM 的数值方法定价有一个明显的问题，因为有时结果并不收敛，可能会在围绕着期权的真实价值跳上跳下。这是你为二叉“树”模型的灵活性所付出的价格。另一个阐述 BOPM 方法和 Black - Scholes 公式的基本思想的方法从数学上略微复杂一些，我们把它放在附录 8.1 中。

最后，我们探讨一下上面股票价格的二项过程和 Black - Scholes 公式中的连续时间随机过程的关系。后者假设股票价格服从几何布朗运动的随机过程，它对到期日的期权给出了一个对数正态分布。这里我们能做的是演示一下这个过程看起来是什么样子。实际上，对于股票价格变化的随机路径，如果服从具有对数正态分布的几何布朗运动，我们可以用下式进行模拟：

$$S_t=S_{t-1}[1+\mu\Delta t+\sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}] \tag{8.51}$$

其中，μ 为股票价格的年增长率，σ 为股票收益的年标准方差，Δt 为一小段时间间隔。例如，如果总模拟期是 $T=1$ 年，总步数是 $N=100$，那么 $\Delta t=T/N=0.01$（约为 3.5 天）。在方程

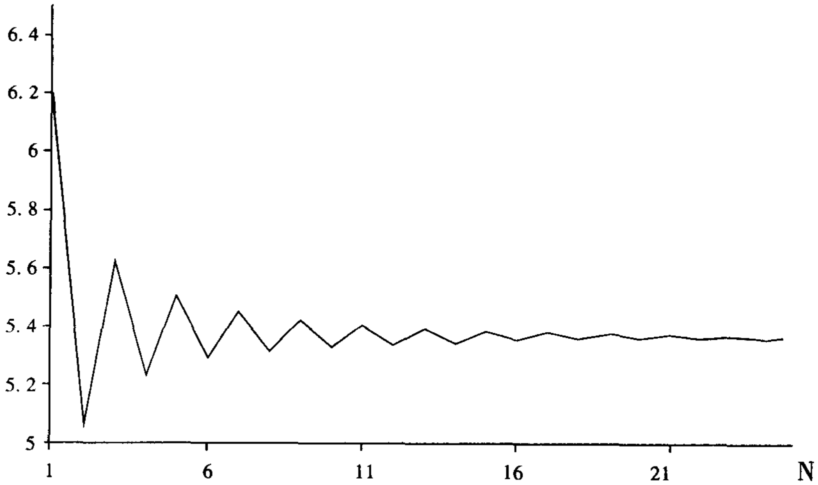


图 8—9 看涨期权价格和 BOPM 模型

(8.51) 中，股票价格以 $\mu\Delta t$ 的速度增长，方差为 $\sigma^2\Delta t$。

在表 8—8 中，我们用 $\sigma=20\%$，$\mu=15\%$产生了一个随机系列。我们令 $S_0=100$，然后从分布 $\varepsilon\sim N$（0，1）中得到 ε_1，ε_2，ε_3，…等一系列值。在 Excel 中 RAND(.)从 0 和 1 之间等概率的抽出一个数字。可以证明，$\varepsilon=\sum_{i=1}^{12}$RAND(.)产生出一个 $niid(0,1)$变量。我们的模拟结果在图 8—10 中绘出。（注意产生出的收益系列 $R=\ln(S_t/S_{t-1})$将是一个正态分布随机变量。）

表 8—8 **离散布朗运动**

关于 100 个值的布朗运动的计算：

第 1 步：设定参数（比如 S 的初始值，漂移参数和波动率，时间步长）；

第 2 步：生成正态随机变量 $N(0,1)$的 100 个观测值；

第 3 步：使用布朗运动公式计算 S 的值；

第 4 步：画图。

股票价格，S ($t=0$)	**100**
漂移 (μ)	**0.15**
波动率 σ	**0.25**
时间步长 Δt	**0.01**

公式：$S(t+1)=S(t)(1+\mu\Delta t+\sigma\varepsilon\Delta t^{1/2})$

时间	资产	随机数 $\varepsilon=N(0,1)$	时间	资产	随机数 $\varepsilon=N(0,1)$
0	100		0.5	126.053 8	−0.491 6
0.01	101.377 9	0.491 165	0.51	126.589 1	0.109 881
0.02	103.469	0.765 074	0.52	125.907 3	−0.275 43
0.03	99.849 91	−1.459 11	0.53	123.275 1	−0.896 23
0.04	96.159 62	−1.538 34	0.54	122.544 9	−0.296 95
0.05	94.959 69	−0.559 14	0.55	125.133 4	0.784 906
0.06	91.805 35	−0.388 71	0.56	129.355 2	1.289 541
0.07	92.566 65	0.271 701	0.57	126.570 5	−0.921 09
0.08	94.938 39	0.964 881	0.58	124.038 7	−0.860 12
0.09	96.249 02	0.492 2	0.59	128.016 8	1.222 863

续前表

时间	资产	随机数 $\varepsilon=N(0,1)$	时间	资产	随机数 $\varepsilon=N(0,1)$
0.1	94.604 8	-0.743 32	0.6	125.688 8	-0.787 41
0.11	95.755 19	0.426 395	0.61	126.574 2	0.221 776
0.12	96.174 95	0.115 347	0.62	123.863 9	-0.916 54
0.13	97.988 76	0.694 383	0.63	124.006 2	-0.014 04
0.14	100.169 4	0.830 164	0.64	120.696 3	-1.127 65
0.15	100.134 7	-0.073 85	0.65	120.360 9	-0.171 16
0.16	97.500 74	-1.112 18	0.66	120.994	0.150 387
0.17	96.931 93	-0.293 36	0.67	121.891 4	0.236 698
0.18	97.327 94	0.103 419	0.68	119.267 5	-0.921 09
0.19	101.536	1.669 418	0.69	114.645 4	-1.610 16
0.2	103.254 9	0.617 165	0.7	120.249 7	1.895 351
0.21	106.560 2	1.220 444	0.71	122.869 4	0.811 415
0.22	109.320 8	0.976 274	0.72	123.139 8	0.028 04
0.23	109.713 1	0.083 519	0.73	124.221 7	0.291 441
0.24	114.219	1.582 798	0.74	125.177 1	0.247 649
0.25	113.316 2	-0.376 15	0.75	119.135	-1.990 73
0.26	111.602 1	-0.665 08	0.76	118.212 7	-0.369 67
0.27	111.862 9	0.033 474	0.77	121.204 7	0.952 405
0.28	110.623 7	-0.503 11	0.78	122.148 9	0.251 594
0.29	109.662 3	-0.407 62	0.79	121.574 7	-0.248 04
0.3	105.623 7	-1.533 11	0.8	117.901 9	-1.268 39
0.31	107.222 3	0.545 417	0.81	121.028 4	1.000 715
0.32	101.599 2	-2.157 77	0.82	117.457 5	-1.240 17
0.33	104.657 6	1.144 126	0.83	116.495 4	-0.387 67
0.34	108.538 4	1.423 236	0.84	116.935 1	0.090 968
0.35	108.622 2	-0.029 11	0.85	118.208 1	0.375 489
0.36	108.117 4	-0.245 91	0.86	118.970 8	0.198 08
0.37	104.406 8	-1.432 78	0.87	120.408 5	0.423 381
0.38	104.908 8	0.132 306	0.88	118.591 1	-0.663 75
0.39	108.395 9	1.269 593	0.89	124.446 8	1.915 078
0.4	106.705	-0.684	0.9	127.032	0.770 931
0.41	106.283 6	-0.217 94	0.91	128.798 3	0.496 177
0.42	107.575 8	0.426 311	0.92	131.572 1	0.801 46
0.43	112.979 4	1.949 202	0.93	125.048 3	-2.043 36
0.44	112.456	-0.245 28	0.94	122.507 2	-0.872 82
0.45	116.356 4	1.327 351	0.95	120.452 3	-0.730 97
0.46	121.013 1	1.540 839	0.96	120.535 6	-0.032 33
0.47	126.515 5	1.758 772	0.97	126.574 8	1.944 118
0.48	129.473	0.875 057	0.98	122.839 2	-1.240 51
0.49	127.428 7	-0.691 56	0.99	122.110 6	-0.297 27
			1	123.493 8	0.393 114

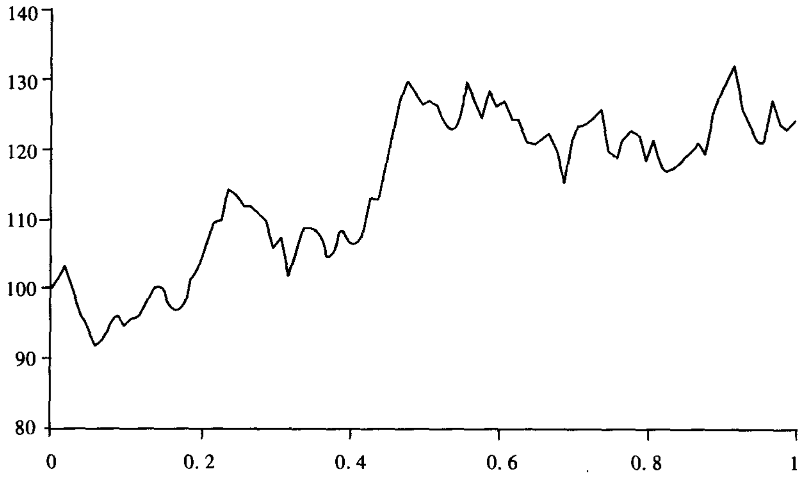


图 8—10 股票价格的布朗运动

产生出一个股票价格变化的随机系列，是用蒙特卡罗方法根据风险中性定价原则对期权定价的第一步，进一步的讨论放在第 17 章。不过我们要注意到，在利用风险中性定价时，我们假设股票增长率与无风险利率 r 相同。因此用蒙特卡罗方法定价期权时，我们让公式（8.51）中 $\mu=r$。

BOPM 定价方式得到的结果趋近于 Black - Scholes 公式的结果，是因为 n 趋近于无穷大时（即 $\Delta t=T/n\rightarrow 0$），BOPM 中“上移下移”的网格与几何布朗运动中的 S 行为相近，而后者正是 Black - Scholes 中使用的方法。

8.8 本章摘要

- 通过构造包含期权和标的资产的无风险组合，**二叉树模型**（BOPM）和 **Black - Scholes** 公式（连续时间）都能用来**对看涨期权和看跌期权进行定价**。
- 在 BOPM 和 Black - Scholes 方法中，我们假设股票价格的增长与无风险利率相同，这是**风险中性定价**的原理，表现为 BPOM 中的**风险中性概率 q**。
- **看涨期权和看跌期权的价格**依赖于股票现价与执行价的比值（S/K），无风险利率 r，标的资产波动率 σ 和期权的到期时间 T。
- **看跌—看涨平价**是一个套利的条件，可以用来根据看涨期权的公平价格，推导出看跌期权的公平价格。这是**期权转换**或是**金融工程**的一种形式。
- 可以证明，当 BOPM 中的步数增加时，**BOPM** 公式给出的期权价格趋近于 Black - Scholes 公式的结果。这是因为到期日股票价格的二项分布趋近于连续时间的对数正态分布，后者正是 Black - Scholes 方法的假设。
- 相对于 Black - Scholes 方法，**BOPM** 更加灵活，它可以处理**提前执行**的问题，因而能够对美式期权和本书后面将讨论的奇异期权进行定价。当然我们要为这一灵活性付出“价格”，因为用 BOPM 定价欧式期权时，BOPM 作为一个数值方法存在一个**收敛性问题**，

往往只能给出一个真实值附近的结果。

章末练习

1. 如果有两个期权，一个标的股票的年收益波动率为 20%，另一个标的股票的年收益波动率为 10%，你会不会为前者付更高的价钱？为什么？

2. 直观上看，为什么美式看涨期权或看跌期权要比类似的欧式期权价值更大？

3. 在一小段时间上，你如何（delta）对冲股票看涨期权或看跌期权的多头？

4. 对 BOPM 中得到的看跌期权价格给出一个直观解释，这个看跌期权标的于两期后到期的股票：

$$P=\frac{1}{R^2}[q^2P_{\mathrm{uu}}+2q(1-q)P_{\mathrm{ud}}+(1-q)^2P_{\mathrm{dd}}]$$

其中，$q=(R-D)/(U-D)$，$R=1+r$，r=无风险利率，P_{uu}等是看跌期权的收益。

5. 什么是看跌—看涨平价，它有什么用处？

6. 股票的现价是 $S=100$。股价每期会上升 10%或下跌 10%，每期的无风险利率是 5%。利用 BOPM 表示出二叉树上每个节点上股票价格和看跌期权的价值。这个看跌期权两期后到期，执行价是 $K=100$。另外计算出每个节点上的对冲比率，并证明在 $t=1$ 的两个节点上，对冲组合具有相同的价值。

7. 利用 Black - Scholes 公式计算 6 个月后到期的欧式期权价格。假设 $S=100$，$r=10\%$（连续复利），$K=100$，$\sigma=20\%$（每年），如果明天 σ 提高到 30%，结果会如何？利用看跌—看涨平价求出看跌期权的价格。

附录 8.1　比较 BOPM 与 Black - Scholes 公式

为看涨期权定价的 BOPM 公式可以改变一下形式，用与 Black - Scholes 公式类似的方法进行解释（见 Fortune，1995）。在 BOPM 中，到期时间 T 被分成 n 个时期。看涨期权在经过 k 个上移后的收益为：

$$k\text{ 次“上移”后的收益}=\max[SU^kD^{n-k}-K,\ 0] \tag{A8.1}$$

为使期权处于实值状态，k 的最小数目应满足

$$SU^kD^{n-k}-K=0 \tag{A8.2}$$

我们用 k^* 表示这个特殊的值，其中 $k^*=\ln[K/SD^n]/\ln[U/D]$。我们可以把公式(8.22)重新写成

$$C=\frac{1}{R^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\max[SU^kD^{n-k}-K,\ 0] \tag{A8.3}$$

如

$$C=S.N_1-K.R^{-n}N_2 \tag{A8.4}$$

其中

$$N_1=\frac{1}{R^n}\sum_{k=0}^{n}q^k(1-q)^{n-k}[U^kD^{n-k}]$$

$$N_2=\sum_{k=0}^{n}q^k(1-q)^{n-k}\ i=\max(k^*\ ,\ 0),\ \cdots,\ n$$

注意上面形式的 BOPM 与 Black - Scholes 公式的相似之处：

$$C=S.N(d_1)-N(d_2)Ke^{-rT} \tag{A8.5}$$

我们可以把 BOPM 中的 $S.N_1$ 解释为股票在到期日处于实值条件下的的期望现值。N_2 的表达式可以被理解为股票上升了足够多的次数(如 k 次或更多次)，因而在期权在到期日处于实值状态而被执行的概率。$KR^{-n}N_2$ 就是执行价格的期望现值。因此 BOPM 公式说明，看涨期权的价格就是期权被执行条件下的期权净现值，这与我们对 Black - Scholes 公式的解释一致。

第9章

对冲与波动率

学习目标

- 阐述如何利用 **Black - Scholes（B - S）**公式来配置期权及其标的资产，以形成在一小段时间上没有风险的组合。这种策略被称为**delta 对冲**。
- 介绍“**希腊字母**”（the Greeks，比如 delta，gamma，rho，theta 和 vega）如何为期权提供“总结性的统计信息”。
- 演示如何利用“希腊字母”近似说明期权的价格变化和**对冲**标的资产（如股票组合）或**已有的期权组合的头寸**。
- 考察、衡量并**预测波动率**（包括隐含波动率）的其他方法，以便在 Black - Scholes 公式中使用。
- 评价 **Black - Scholes** 公式在对欧式期权定价中的**局限性**。

9.1 Delta 对冲

在对 Black - Scholes 公式进行分析时，我们建立了一个包括期权及其标的资产头寸的无风险组合，以此来决定期权的价格。这样一个无风险组合的收益率必然等于无风险利率，否则就会有套利的机会产生。我们之所以能够构造出一个无风险组合，是因为期权价格受到标的股票价格的影响。因此我们可以使组合中来自股票的收益或损失（在一小段时间上）完全由期权的损失或收益抵消掉。这种策略被称为 **delta 对冲**。因为看涨期权价格与股票价格具有正相关性，因此对冲的头寸应包括一种资产的多头和另一种资产的空头，以形成它们之间的负相关性。考虑一个有 N_s 股股票和 N_c 个看涨期权的组合的价值 V：

$$V=N_sS+N_cC=N_c(hS+C) \tag{9.1}$$

其中，$h=N_s/N_c$ 被称为**对冲比率**。为实现对组合头寸的完全对冲，应该使 V 与 S 的变化完全独立。我们令 $\partial V/\partial S$ 等于零：

$$\frac{\partial V}{\partial S}=h+\frac{\partial C}{\partial S}=0 \tag{9.2}$$

因此

$$h=-\partial C/\partial S$$

对冲比率“h”等于$-\partial C/\partial S$，$\partial C/\partial S$ 的值被称做**期权的 delta**，以 Δ_c 来表示（对于看涨期权）。对于零漏出资产，我们可以证明 Δ_c 等于 Black - Scholes 公式中的 $N(d_1)$ 。因此看涨期权的 delta 值位于 0 和 1 之间（见附录 9.1）。这表明每持有一个看涨期权，相应持有标的股票的数量应该位于 0 和 1 之间（$N_s=-\Delta_cN_c$），因此，对冲组合里股票的数量要小于期权的数目。这是因为股票价格每变化 1 美元，期权价格的变化要小于 1 美元，这意味着你可以用少于期权数的股票来实现对冲。对冲比率 h 的公式里有一个负号，表明如果对冲组合头寸是标的股票的多头（空头），同时就应该是期权的空头（多头）。

使用看涨期权

为简化起见，我们假设每一个看涨期权标的于一股股票（实际上标的于 100 股股票），看涨期权的 delta$=\partial C/\partial S=\Delta_c=0.4$，为完全对冲，股票的持有者应该：

对持有的（做多）每 40 股股票售出（做空）100 个看涨期权

如果股票的价格下跌 1 美元，看涨期权的价格下跌 0.4 美元。因此 40 股的损失（=40 股×1 美元）被出售看涨期权的收益（0.4 美元×100 个看涨期权）相抵消。这个投资者可以通过以新的低价购买 100 个看涨期权，冲销掉原有的看涨期权空头，获得收益 40 美元。

我们所出售看涨期权的数量要大于持有的股票数量。股票价格上升 1 美元，看涨期权价格相应上升 0.4 美元。看涨期权的持有者（多头）的资产数量增加 0.4 美元，因此看涨期权出售者就

损失了 0.4 美元。但是，对一个由“Δ_c 股股票＋出售 1 个看涨期权”构成的组合，并没有发生任何损失。我们说组合 A 是一个 **delta 中性组合**，如果它：

DELTA 中性组合（$h=N_s/N_c=-\Delta_c$）
－1：看涨期权（即卖出看涨期权）
＋
Δ_c：股票多头（$0<\Delta_c<1$）
delta 中性组合包括的期权总是比股票更多。

因为 Δ_c 随着股票价格变化而不断变化，为了获得一个 delta 中性的头寸，需要对组合不断进行调整。比如说，在股票价格是 100 美元时（见图 9—1，点 A），Δ_c 是 0.4。考虑到 C 和 S 之间的曲线关系，如果第 2 天股票价格变成 110 美元，那么 Δ_c 可能变成了 0.5（见图 9—1，点 B）。因此为了维持 delta 中性，我们应该购买 0.1 股股票。当然我们无法购买 0.1 股股票，但如果最初组合里包含 100 股股票，那么我们再多买入 10 股股票就实现了 delta 中性。这种策略被称为**动态对冲**。

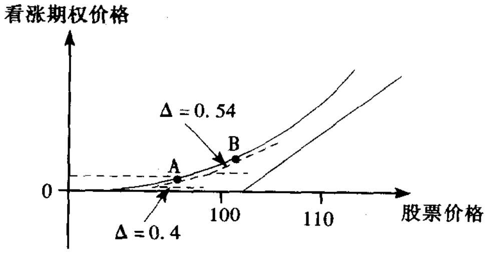


图 9—1 Delta 对冲

当通过出售看涨期权来对股票多头进行对冲时，如果股票价格下跌（上升），那么 Δ_c 减小（增加），比如说从 0.5 到 0.4，于是我们需要卖出（买入）一些股票来维持 delta 对冲头寸。这种头寸调整策略可以概括为“买高卖低”，即股票价格上升时，要买入股票；股票价格下跌时，要卖出股票。

当然，为了维持上述组合的 delta 中性，我们也可以持有同样不变数量 40 股的股票，而卖出或买进看涨期权。究竟采取哪一种策略，要根据我们进行 delta 对冲的原因和股票与期权交易费用的比较进行取舍。比如，一个养老基金希望继续持有最初的 40 股股票，但是担心股票价格下跌，于是可以出售 100 个看涨期权来实现 delta 对冲。如果一段时间以后，Δ_c 变成 0.5，那么他们只需出售 80 个看涨期权就可达到对冲目的，因此他们应买入 20 个看涨期权。

Delta 对冲只对股票价格的少量变化提供对冲，而当股票价格变化巨大，或是波动率、无风险利率、到期时间等发生变化时，我们需要其他的对冲策略。

看涨期权多头的 delta 随着股票价格而改变，当期权处于深虚值时，$\Delta_c=0$，当期权处于深实值时，$\Delta_c=1$（见图 9—2，执行价格 $K=50$）。如果你做空看涨期权，那么有效的 delta 在 0 和 1 之间变化。当然，对于看跌期权多头的 delta，$\Delta_p=\Delta_c-1$ 在 0 和 1 之间变化，当 S 非常低时，$\Delta_p=-1$，当 S 非常高时，$\Delta_p=0$。

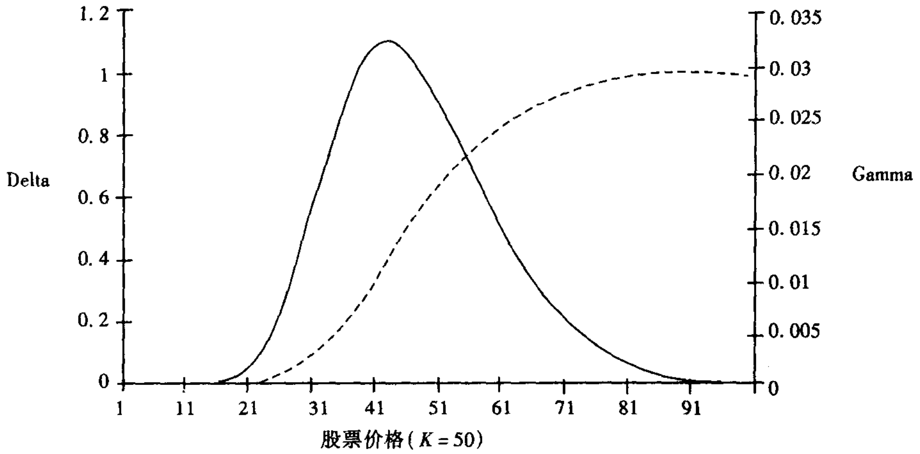


图 9—2 Delta 和 gamma：看涨期权

我们可以把上面的动态对冲策略和**“每持有一股股票便出售一个看跌期权”**的静态策略相对比。这个静态策略被称为**出售有保护的看涨期权**。这种策略不涉及头寸调整，因此不是在所有时期都受到完全保护，在对冲期结束时，有可能获得收益或受到损失（参见第 10 章）。

总结：Delta 对冲

根据 Black - Scholes 公式，标的于零漏出资产的看涨期权或看跌期权的对冲比率，或期权的 delta 是：

$$\Delta_c=\partial C/\partial S=N(d_1)>0 \tag{9.3}$$

$$\Delta_p=\partial P/\partial S=N(d_1)-1<0 \tag{9.4}$$

因为 d_1 依赖于 S，因此 Δ 的值随 S 的变化而变化。因为对冲比率 $h=-\Delta_c$，一个欧式看涨期权的 delta 中性头寸涉及下面两种组合之一：

看涨期权的 delta 中性头寸

组合 A：一个看涨期权的空头和 $\Delta_c=N(d_1)$股股票的多头。

组合 B：一个看涨期权的多头和 $\Delta_c=N(d_1)$股股票的空头。

对于看跌期权的 delta 对冲，我们可以重复以上的分析。令 $V=N_sS+N_pP=N_p(hS+P)$，因此 $h=N_s/N_p=-\Delta_p$。因为 Δ_p 是负的，所以如果你是标的资产的多头($N_s>0$)，但是担心价格下跌，那么你可以通过成为看跌期权的多头($\Delta_p>0$)来实现对冲，这样股票价格下跌时，你可以从看跌期权的收益中得到补偿。类似地，如果你是标的股票的空头，那么你可以通过做空看跌期权来实现对冲。利用看跌期权进行 delta 对冲包括：

看跌期权的 delta 中性头寸

组合 A：一个看跌期权的多头和$|\Delta_p|$股股票的多头。

组合 B：一个看跌期权的空头和$|\Delta_p|$股股票的空头。

期权的错误定价和 Delta 对冲

delta 对冲的概念可以用来构造出无风险组合，并从错误的期权定价中获得利润。假设一个欧式看涨期权的价格现在被高估（或许是因为市场定价使用了过高的波动率）。如果采用一个未受保护的头寸，即出售看涨期权，那么这个看涨期权价格跌回它的真实价值时，我们可以通过在低价冲销头寸而赚取一定的利润。然而，这种策略具有相当大的风险，因为这个期权的价格有可能上升（比如因为股票价格上涨，或是波动率陡然增大）。不过，投资者可以通过 delta 对冲来从期权的错误定价中获利，并且避免因期权价格上升而带来的风险。持有 delta 中性的投资者能够使组合收益避开股票价格等因素对期权价格的影响，而从过高定价的期权最终获利。简单地说，如果股票价格不变，期权价格向它的真实价值下降，投资者可以以不变的价格卖掉他用来进行 delta 对冲的股票，同时冲销在期权上的头寸，而获得利润。实际操作中，delta 对冲具有一些风险和成本：

- 当进行对冲组合的头寸调整时，投资者要调整组合中期权或股票的数量，因此要付出一定的交易费用。
- delta 对冲只在股票价格有微小变化时才有效。
- 标的资产的波动率和无风险利率会随时间发生变化，因而影响对冲组合的价值（时间流逝本身也会影响组合的价值）。
- 股票红利的支付会使 delta 对冲变得复杂一些，因为这时 $\Delta_c \neq N(d_1)$，对冲比率需要从调整后的 Black - Scholes 公式计算而得($\Delta_c = N(d_1)e^{-\delta T}$，参见附录 9.1)。

9.2 希腊字母

我们已经由 Black - Scholes 公式（标的于不支付红利的股票）看出，期权价格 $f(S,t)$随着 S，t，r 和 σ 的变化而改变，而这几个变量在期权的生命期里都会发生变化。这一节，我们将说明期权价格的变化如何通过一些通常被称为希腊字母的“总结性统计量”来表示。知道这些希腊字母的数值可以帮助我们用期权建立对冲头寸。我们将会看到，你想对冲的风险来源越多，精确性越强，你就越需要在组合里使用更多的期权。本节中，我们把衍生价格表示成 f，我们的结论将同样适用于看涨期权和看跌期权。我们可以通过持有如下资产建立起 delta 中性对冲组合：

$N_o = -1$　　出售一个看涨期权和
$N_s = \Delta_c$　　股股票

如果股票价格下跌 1 美元（$dS = -1$），组合中股票价值将下跌 $-\Delta_c = (N_s \times -1)$美元。但这个损失从出售看涨期权的收益中得到了补偿，$N_o df = -1(\Delta_c dS) = +\Delta_c$ 美元。例如，如果股票价格是 100 美元，你拥有 2 000 股股票，当 $\Delta_c = 0.4$ 时，一个 delta 中性组合将包括 2 000 股股票和 5 000(2 000/0.4)个出售的看涨期权。S 上升 1 美元使股票价值增加 2 000 美元，同时 5 000 个看涨期权的多头价值将上升 2 000 美元，而组合中出售的看涨期权价值将下降 2 000 美元。

Delta 对冲

假设当前股票价格为 $S_0=100$，$\Delta_0=0.6368$，我们以 $C_0=10.45$ 的价格出售了一个看涨期权（$K=100$，$\sigma=20\%$，$r=5\%$，$T=1$）。在 $t=0$ 时，为了对冲这个看涨期权，我们以 $S_0=100$ 的价格买入 $\Delta_0=0.6368$ 股股票，总共花费 63.68 美元（见表 9—1 和表 9—2 中 $t=0$ 行）。因此我们需要借入

$$D_0=\Delta_0 S_0=63.68\text{（美元）} \tag{9.5}$$

期权现在处于平值。如果股票价格在期权生命期不发生变化，那么 $S_T=K$，期权多头方不会执行，因此期权卖方将保留期权的权利金 $C_0=10.45$。对售出的这个看涨期权进行对冲的成本将是为负债 63.68 美元支付的利息。当股票价格变化时，套期头寸需要调整，这时情况变得略微复杂一些。假设对冲一直到期权的到期日为止，考虑以下两种情况：第一种情况下，看涨期权处于虚值（$S_T<K$），第二种情况它处于实值（$S_T>K$）。

期权以虚值结束（见表 9—1）

在 $t=1$ 时，股票价格下跌为 $S_1=99.9$，$\Delta_1=0.6343$（见表 9—1 中 $t=0.01$ 行）。我们因此要以 S_1 的价格卖出（$\Delta_0-\Delta_1$）股股票，得到 0.2545 美元现金流入，这笔钱可以用来减少负债，因此我们的债务头寸在 $t=1$ 时应该是

$$D_1=D_0 e^{r\Delta t}-(\Delta_0-\Delta_1)S_1=63.68e^{+0.05(0.01)}-0.2545=63.46\text{（美元）} \tag{9.6}$$

在 $t=0$ 和 $t=1$ 之间，我们这个对冲组合的价值（包括我们出售的看涨期权的市场价值）变化非常小，见表 9—1 $t=0.01$ 行：

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &=\text{股票价值增加}-\text{债务增加}-\text{看涨期权价格增加}\\ &=(\Delta_1 S_1-\Delta_0 S_0)-(D_1-D_0)-(C_1-C_0)\\ &=0.2233\end{aligned} \tag{9.7}$$

对于 S 微小变化造成的价值变化，我们也可以写成下面形式：

$$\begin{aligned}dV_{t+1} &=N_{st}dS_{t+1}-D_t(rdt)-dC_{t+1}\\ &\approx\Delta_t dS_{t+1}-D_t(rdt)-(\Delta_t dS_{t+1})\\ &=-D_t(rdt)\end{aligned}$$

其中，$dS_{t+1}=S_{t+1}-S_t$，$N_{st}=\Delta_t$ 为持有的股票数，$dC_{t+1}=\Delta_t dS_{t+1}$ 为看涨期权价格的变化，r 为年利率，dt 为时间的微小变化。如果对冲有效，那么 ΔV_1 在一个微小时段上应该接近于零，因此我们"股票+债券"复制组合的价值变化应该与被对冲资产（在本例中是出售的看涨期权）价值变化匹配。实际上，我们对去除对冲后的组合价值非常关心。因为组合是没有风险的，在对冲期内，它的成本应该与无风险利率相同。从对冲组合价值变化的表达式上，我们可以清楚地看出，如果 $dC_{t+1}=\Delta_t dS_{t+1}$ 是看涨期权价格变化的很好近似，那么对冲组合的价值变化将是 $D_t(rdt)$，这与对冲期间的无风险利率 rT 将非常近似。

表 9—1　　**看涨期权的 delta 对冲(虚值)**

初始股票价格 *S*	**100**
执行价格 *K*	**100**
年利率 *r*	**0.05**
年波动率	**0.2**
股票的漂移率	**0.05**
“分红”速率 σ	**0**
到期时间(年)	**1**
时间步长	**0.01**

时间 *t*	**剩余时间 *T*—*t***	**资产价格 S**	d_1	d_2	**Delta**	**现金流入(负号表示流出)**	**借款利率**	**累积借款**	**对冲价值变化**	**看涨期权价格**
0	1	100	0.3500	0.1500	0.6368			63.68306	0	10.4506
0.01	0.99	99.9	0.3432	0.1442	0.6343	0.254537	0.031849	63.46037	-0.2233016	10.3228
0.02	0.98	99.2252	0.3072	0.1092	0.6207	1.352391	0.031738	62.13972	-0.947343	9.8352
0.03	0.97	102.3708	0.4637	0.2667	0.6786	-5.92755	0.031078	68.09835	3.90076351	11.8147
0.04	0.96	100.1506	0.3506	0.1546	0.6371	4.155976	0.034058	63.97643	-3.0672939	10.2880
0.05	0.95	100.6886	0.3763	0.1814	0.6467	-0.9675	0.031996	64.97593	0.59062866	10.5679
0.06	0.94	101.7327	0.4279	0.2340	0.6656	-1.93105	0.032496	66.93947	1.26182801	11.1870
0.07	0.93	102.2491	0.4528	0.2600	0.6747	-0.92245	0.033478	67.8954	0.58964659	11.4664
0.08	0.92	101.8484	0.4312	0.2394	0.6668	0.798288	0.033956	67.13107	-0.6400487	11.1307
0.09	0.91	98.1531	0.2362	0.0454	0.5933	7.212635	0.033574	59.95201	-4.89467	8.7337
0.1	0.9	99.7713	0.3200	0.1302	0.6255	-3.20823	0.029983	63.19022	1.8510072	9.6546
0.11	0.89	100.7103	0.3677	0.1790	0.6435	-1.80749	0.031603	65.02931	1.08487719	10.1837
0.12	0.88	100.3342	0.3461	0.1585	0.6354	0.810861	0.032523	64.25097	-0.5821449	9.8761
0.13	0.87	99.4422	0.2965	0.1099	0.6166	1.869989	0.032134	62.41312	-1.2242172	9.2507
0.14	0.86	99.9474	0.3217	0.1363	0.6262	-0.96046	0.031214	63.40479	0.52715182	9.4976
0.15	0.85	98.5816	0.2452	0.0608	0.5969	2.890698	0.03171	60.5458	-1.7893173	8.5953
0.16	0.84	97.1170	0.1612	-0.0221	0.5640	3.18798	0.03028	57.3881	-1.8206545	7.6790
0.17	0.83	97.0823	0.1564	-0.0259	0.5621	0.184834	0.028701	57.23197	-0.1331499	7.5941
0.18	0.82	99.5171	0.2902	0.1091	0.6142	-5.1798	0.028623	62.44039	2.70561071	8.9597
0.19	0.81	99.1800	0.2693	0.0893	0.6061	0.797132	0.031228	61.67449	-0.5120034	8.6860
0.2	0.8	95.8831	0.0780	-0.1008	0.5311	7.194459	0.030845	54.51087	-3.9720681	6.7431
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0.95	0.05	77.0356	-5.7557	-5.8004	0.0000	0.001146	0.005083	10.16753	-0.0051571	0.0000
0.96	0.04	78.2263	-6.0691	-6.1091	0.0000	2.88E-07	0.005085	10.17261	-0.005085	0.0000
0.97	0.03	76.4622	-7.6867	-7.7213	0.0000	4.94E-08	0.005088	10.1777	-0.0050876	0.0000
0.98	0.02	75.8773	-9.7104	-9.7387	0.0000	5.81E-13	0.00509	10.18279	-0.0050901	0.0000
0.99	0.01	75.0233	-14.3336	-14.3536	0.0000	0	0.005093	10.18788	-0.0050927	0.0000
1	0.0001	77.3411	-128.4686	-128.4706	0.0000	0	0.005095	10.19298	-0.0050952	0.0000

注：看涨期权的初始价格($t=0$)=10.4506

ABS[(债务(T)$-C_0$)/C_0]×100=%对冲成本=2.4649(约等于无风险利率)

当 S 下跌时，看涨期权的 delta 也要下跌，因此我们逐渐卖掉剩余的股票，在每一时期收到 $(\Delta_{t-1}-\Delta_t)S_t$ 的现金，这些现金可以偿还部分债务。如果股票价格单调下降，那么我们将不断以更低的价格出售股票，直到期权到期日为止，此时我们将有正的债务。如果股票价格随时变化，那么我们无法知道最终债务的头寸情况。

在 T 时刻，因为 S_t 远小于 K，$\Delta_T=0$，我们持有零股股票，看涨期权到期时处于虚值。但是我们的累计负债水平为 D_T。对冲组合的净成本比例为 $NC_T\%=(D_T-C_0)/C_0$，约等于对冲期的无风险利率 rT。在我们的例子中，净成本是 2.46%，非常接近 5%的无风险利率水平。如果我们进行很多次股票价格模拟，并使每一步的时间间隔非常小（接近于连续时间调整），那么平均成本将接近于 5%。考察最终头寸的另一个方法是，如果我们进行多次对冲模拟，那么用无风险利率折现 D_T 的现值 PV 的平均数将等于最初的看涨期权价格 C_0：

$$\text{对冲表现\%：}\ \%\text{HP}=\frac{\text{Std. dev.}[\text{PV}(NC_T)]}{C_0}$$

其中 $\text{PV}(NC_T)=D_T\mathrm{e}^{-rT}-C_0$

我们越频繁地调整头寸，我们将越期待 $\text{PV}(NC_T)$接近于 0。如果标的股票的波动率 σ 保持不变，那么我们通过多次模拟，可以得到不同头寸调整期的“对冲表现，%HP”的不同值。比如，我们的调整间隔为别是 25，5，1，1/2 天，那么%HP 的值将分别是 0.5%，0.25%，0.15%和 0.1%（见 Kurpiel 和 Roncalli，1998）。

期权以实值结束（见表 9—2）

如果 S 上升，Δ 也相应上升，我们应该买入股票来维持 delta 中性（见表 9—2 中 $t=0.01$ 行到 $t=0.04$ 行）。如果在到期日之前 $S_t\gg K$，那么 $\Delta=1$（见表 9—2 底部）。因此在到期日，我们对出售的一个看涨期权持有一股股票。为了买入增加的股票，我们同时也负有 D_T 的债务，因此

$$\text{在 } T \text{ 时的净成本：}\quad NC_T=D_T-K=111.29-100=11.29 \tag{9.8}$$

净成本依赖于对冲组合在到期日 T 的价值，$V_T=\Delta_T S_T-D_T-C_t=(1)S_T-D_T-(S_T T-K)=-(D_T-K)$。净成本相对于最初出售看涨期权的收入 C_0 的比值应等于无风险利率：

$$\frac{NC_T-C_0}{C_0}=\text{净成本\%}\approx rT \tag{9.9}$$

在我们的模拟中(见表 9—3)，上式的值是 8.1%(=(11.29−10.45)/10.45)，与无风险利率 5%相比，相差不大。当股票价格大幅上升或下跌时，对冲误差（即股票+债券组合的价值变化与期权价格的变化之差）将很大。考虑股价大幅上升情况。Δ 上升，因此我们需要在更高的价格买入股票。因为我们是以更高的价格买入，形成了对冲的“隐成本”。Delta 只为看涨期权价格的变化提供了一阶近似，而实际上有其他因素（比如利率和波动率）影响看涨期权价格。因此当标的股票的波动率 σ 发生变化时（在随机波动的世界中），delta 对冲组合无法与出售的看涨期权价格的实际变化完全匹配，%HP 也会比上面给出的结果要差。Kurpiel 和 Roncalli（1998）的结果显示，在对冲头寸以一天为调整期时，如果 σ 是个常数（Black - Scholes 条件下），%HP 是 0.15%，而如果 σ 发生变化（在随机波动的世界里），%HP 将是 0.2%到 0.25%之间。

表 9—2　**看涨期权的 delta 对冲（实值）**

初始股票价格 S	**100**
执行价格 K	**100**
年利率 r	**0.05**
年波动率	**0.2**
股票的漂移率	**0.05**
“分红”速率 σ	**0**
到期时间（年）	**1**
时间步长	**0.01**

时间 t	剩余时间 $T-t$	资产价格 S	d_1	d_2	Delta	现金流入（负号表示流出）	借款利率	累积借款	对冲价值变化	看涨期权价格
0	1	100	0.3500	0.1500	0.6368			63.68306	0	10.4506
0.01	0.99	100.1	0.3533	0.1543	0.6381	0.12269	0.031849	63.8376	0.03129976	10.4500
0.02	0.98	104.364	0.5622	0.3642	0.7130	−7.82325	0.031927	71.69277	5.50698281	13.2683
0.03	0.97	106.8576	0.6814	0.4845	0.7522	−4.18706	0.035855	75.91568	3.5028945	15.0291
0.04	0.96	106.8016	0.6787	0.4828	0.7513	0.091393	0.037967	75.86226	−0.1891538	14.9199
0.05	0.95	103.0039	0.4930	0.2980	0.6890	6.423628	0.037941	69.47657	−5.6964457	12.1148
0.06	0.94	106.7811	0.6777	0.4838	0.7510	−6.62439	0.034747	76.13571	5.22254693	14.7697
0.07	0.93	110.502	0.8553	0.6624	0.8038	−5.83305	0.038077	82.00684	5.584046	17.5974
0.08	0.92	110.4886	0.8557	0.6638	0.8039	−0.01084	0.041014	82.0587	−0.1299769	17.5192
0.09	0.91	110.3877	0.8519	0.6611	0.8029	0.115334	0.04104	81.9844	−0.270893	17.3705
0.1	0.9	107.0141	0.6893	0.4996	0.7547	5.154753	0.041002	76.87065	−5.4472515	14.6727
0.11	0.89	103.8895	0.5324	0.3437	0.7028	5.392538	0.038445	71.51656	−4.7439325	12.3253
0.12	0.88	101.4081	0.4029	0.2152	0.6565	4.696282	0.035767	66.85604	−3.5352031	10.5698
0.13	0.87	102.4634	0.4569	0.2704	0.6761	−2.0143	0.033436	68.90378	1.29438501	11.2048
0.14	0.86	102.6606	0.4662	0.2807	0.6794	−0.34032	0.034461	69.27856	0.16389374	11.2698
0.15	0.85	106.2228	0.6501	0.4657	0.7422	−6.66362	0.034648	75.97682	4.85060955	13.7348
0.16	0.84	104.8835	0.5809	0.3976	0.7193	2.394974	0.037998	73.61985	−2.080752	12.6860
0.17	0.83	108.2762	0.7553	0.5731	0.7750	−6.02118	0.036819	79.67785	4.87063864	15.1530
0.18	0.82	107.3599	0.7091	0.5280	0.7609	1.513477	0.039849	78.20422	−1.5238893	14.3790
0.19	0.81	109.3247	0.8103	0.6303	0.7911	−3.30768	0.039112	81.55102	2.91045056	15.8337
0.2	0.8	110.2871	0.8604	0.6815	0.8052	−1.55602	0.040786	83.14782	1.41865969	16.5317
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0.95	0.05	154.3975	9.7909	9.7461	1.0000	0	0.055496	111.0204	−5.55278	54.6472
0.96	0.04	157.2825	11.3918	11.3518	1.0000	0	0.055524	111.0759	5.66447752	57.4823
0.97	0.03	154.1949	12.5616	12.5270	1.0000	0	0.055552	111.1314	−6.2805509	54.3448
0.98	0.02	157.3344	16.0727	16.0444	1.0000	0	0.05558	111.187	6.17352718	57.4344
0.99	0.01	160.6512	23.7383	23.7183	1.0000	0	0.055607	111.2426	6.52803984	60.7012
1	0.0001	163.3499	245.3658	245.3638	1.0000	0	0.055635	111.2983	5.29226869	63.3504

注：看涨期权的初始价格($t=0$)＝10.4506

净美元成本 NC＝在 T 时的债务－收入 K＝11.2983

$\%NC=(NC/C_0)\times100=8.1114$（约等于 rT）

希腊字母的合唱

delta 对冲不能对股价的大幅变化提供保护。第一，delta 的值随 S 的变化而变化，这被称做期权的 gamma（见图 9—3），无论期权是看涨期权还是看跌期权：

$$\Gamma(\text{看涨或看跌})=\frac{\partial\Delta}{\partial S}=\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=\frac{N'(d_1)\mathrm{e}^{-\delta T}}{S\sigma\sqrt{T}}\geqslant 0 \tag{9.10}$$

其中 $N'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\geqslant 0$

上面给出的期权 gamma 值公式是基于 Black - Scholes 公式（对于不付息股票，令 $\delta=0$）。gamma 代表着对于 S 的不同值时的曲率变化（即图 9—2 中 delta 的变化）。显然当看涨期权处于高实值 $S\gg K$ 或虚值 $S\ll K$ 时，Γ 的值都非常稳定，但是处于平值时，将变化非常剧烈。为获得一个负的 gamma 值，我们必须做空看涨或看跌期权。

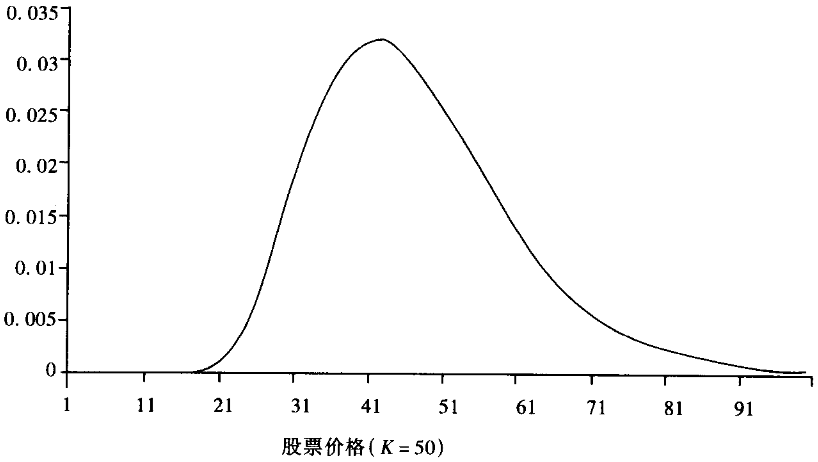


图 9—3 Gamma（看涨期权和看跌期权）

期权的价值随时间的流逝而发生变化，这个过程是非随机的，可以用期权的 **theta** 值来衡量：

$$\Theta=\frac{\partial f}{\partial T} \tag{9.11}$$

期权价值因 r 的变化而发生的变化称做 **rho**，对于付红利和不付红利的股票期权，表达式都是

$$\rho=\frac{\partial f}{\partial r} \tag{9.12}$$

和

$$\rho_c=TK\mathrm{e}^{-rT}N\ (d_2)\ >0 \tag{9.13a}$$

$$\rho_p=-TK\mathrm{e}^{-rT}N\ (-d_2)\ >0 \tag{9.13b}$$

Theta 和 rho 是“希腊众神中职位较低的神”，因为通常期权价格对 t 和 r 的变化不那么敏感。相反，期权价格对于波动率 σ 的变化十分敏感，这被称做期权的 **vega**（见图 9—4）。Vega 并不是一个希腊字母，它的第一个字母 V 代表了波动率（volatility）。有时这个伪希腊字母也被称做 lambda，kappa 或是 sigma，这几个都是希腊字母。看涨期权和看跌期权的 vega 相同，都是钟形曲线，在期权平值附近具有最大值（见图 9—4）。

$$\Lambda=\frac{\partial f}{\partial \sigma} \tag{9.14}$$

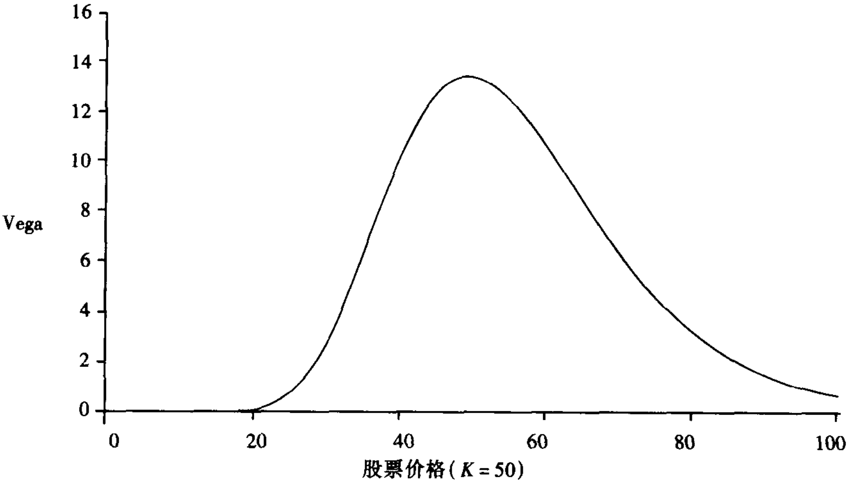


图 9—4 Vega（看涨期权和看跌期权多头）

如果我们有期权定价的封闭公式，那么我们可以得到这些希腊字母的显式表达式。由欧式期权的 Black - Scholes 公式（股票支付连续红利）得到的表达式列于附录 9.1 中。我们使用希腊字母可以使组合不受标的证券价格波动或是利率变化的影响。严格说来，使用 Black - Scholes 公式得到的 vega 并不能对标的股票的波动率变化进行对冲，但在实践中，这个方法却非常有效（即真实世界的波动率是随机的，见 Kurpiel 和 Roncalli，1998）。当决定期权价格的诸因素（即 S，r，t 等）全部变化时，利用希腊字母可以近似得出期权价格的变化（这对计算期权组合的总风险暴露是非常有用的，参见第 22 章）。可以证明（见下文“泰勒公式与希腊字母”）

$$\mathrm{d}f\approx\Delta\mathrm{d}S+\frac{1}{2}\Gamma(\mathrm{d}S)^2+\Theta\mathrm{d}t+\rho\mathrm{d}r+\Lambda\mathrm{d}\sigma \tag{9.15}$$

其中，$\mathrm{d}x=x_2-x_1$ 为变量 x（对于 $x=S$，t，r，或 σ）的一个微小变化。当假设某些变量不发生变化时（比如 $\mathrm{d}r=\mathrm{d}\sigma=0$），这个公式可以进行简化。当计算不同场景下 $\mathrm{d}f$ 的变化时（比如用蒙特卡罗方法研究 VaR 值），这也是一个很有用的公式。需要注意的是，所有希腊字母都随时间发生变化，例如，当前一个 gamma 为零的组合，即使股票价格不发生变化，一段时间以后也将不再是 gamma 中性。

利用希腊字母进行对冲

一个 delta 中性的组合包含：

$N_o = -1$　衍生证券
$N_s = \Delta$　股票

这些股票本身的 delta 是 1，组合的 delta 由下式给出：

$$\Delta_{\text{port}} = \sum_{i=1}^{n} N_i \Delta_i \tag{9.16}$$

其中，N_i 为第 i 种资产的数量，如果多头，则 $N_i > 0$，如果空头，则 $N_i < 0$。

利用期货

实际上，对期权的 delta 对冲通常是通过标的资产的期货合约而不是标的资产本身来实现的，因为期货合约的交易费用要比资产本身的交易费用低。期货的价格和期货的 delta 是（支付红利股票或货币期货的 $\delta = r_f$）：

$$F = Se^{(r-\delta)T^*} \qquad \partial F/\partial S = e^{(r-\delta)T^*} \tag{9.17}$$

其中，T^* 为期货合约的到期时间（它不需要与被对冲的期权的到期时间相同），因此 $e^{-(r-\delta)T^*}$ 份期货合约对股票价格变化的敏感度与一股股票的敏感度相等。如果一个组合有 $\Delta_0 = -2\,000$ 个期权，那么这个头寸的 delta 对冲可以由 2 000 股股票的多头或是 $2\,000e^{-(r-\delta)T^*}$ 份期货的多头来完成。

我们需要注意，远期合约的 delta 与期货合约的 delta 可能不同。一个支付红利股票的远期合约的价值是 $V_f = (F_t - F_0)e^{-rT} = S_t e^{-\delta T} - F_0 e^{-rT}$，其中 F_0 是最初期货合约中的交割价。因此 $\partial V_f / \partial S = e^{-\delta T}$，对于不支付红利的股票而言，这意味着 delta 为 1。

实际上，delta 中性的组合并没有被完全对冲。这是因为即使 Δt 很小，它也不是零。因此我们在考虑期权 delta 变化时，还要考虑到 S 从 S_0 变做 S_1 时 $\partial S / \partial t$ 的影响。对于 delta 中性组合，另外两个因素造成组合的价值发生变化：

$$\Delta V = \Theta dt + \frac{1}{2}\Gamma (dS)^2 \tag{9.18}$$

gamma 中性

股票或股票期货的 gamma 都是零。因此，改变期权组合 gamma 值的惟一办法是建立其他期权的头寸。假设你已经有了 delta 中性的组合 A，这个组合的 gamma 是 Γ_A。如果你在组合中加入 N_T 个期权，那么组合的 gamma 值将变成

$$\Gamma_{\text{port}} = N_T \Gamma_T + \Gamma_A \tag{9.19}$$

这个组合是 gamma 中性的条件是

$$N_T = -\Gamma_A/\Gamma_T \tag{9.20}$$

不幸的是，把 N_T 个期权加进组合中后，组合的 delta 将发生变化，因此为维持组合的 delta 中性，组合中标的股票或股票期货的头寸也要进一步调整。表 9—3 给出了一个例子。注意到随着时间变化（或是因为 S 或 σ 变化），Γ 也在变化，组合头寸需要不断调整以维持 gamma 中性。

表 9—3　　gamma 和 delta 中性的组合

数据： 假设组合 A 为 delta 中性，但是 gamma 为－300。市场上有标的于相同资产（比如股票或者货币）的看涨期权，delta 为 0.6，gamma 为 1.5。用“Z”表示此看涨期权。

问题： 你如何利用 Z 使整个组合 gamma 和 delta 中性？

答案： 我们需要：

$$n_z\Gamma_z + \Gamma_a = 0$$

$$n_z = -\Gamma_a/\Gamma_z = -(-300)/1.5 = 200$$

做多(买人)200 个期权 Z 的合约。

“新”组合的 delta 现在是

$$\Delta = n_a\Delta_a + n_z\Delta_z = 0 + 200(0.6) = 120$$

因此，为了维持 delta 中性，你必须做空 **120 单位**的标的资产。

Kurpiel 和 Roncalli（1998）发现，在 Black - Scholes 波动率不变的情况下，纯粹的 delta 对冲表现在 5，1，1/2 调整期上的%HP 值分别是 0.25，0.15，0.1。然而采用 delta - gamma 对冲，%HP 分别提高为 0.08，0.03，0.02。即使对于调整期为 5 天的情况，该结果也非常理想。

vega 中性

如果期权的 vega 很大，那么期权的价格高度敏感于波动率 σ 的微小变化。对于股票或股票指数的期权而言，当期权处于平值时（即 $S \approx K$），vega 最大；当期权处于深实值或虚值时，vega 值为零（见图 9—4）。

利用 Black - Scholes 公式，我们可以得到标的于支付连续红利股票或股票指数的欧式（看涨或看跌）期权的解析式：

$$\Lambda = \text{看涨/看跌 vega} = S\sqrt{T}N'(d_1)\mathrm{e}^{-\delta T} \geqslant 0 \quad \text{其中} \quad N'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} \geqslant 0 \tag{9.21}$$

当然，Black - Scholes 公式要求 σ 是一个常量，然而我们假设 σ 变化时，公式（9.21）也成立，这是一个在实践中较为合理的假设（见 Hull 和 White，1987）。因为标的股票或标的股票期货的 vega 是零，一个组合的 vega 只能通过加入可交易期权才能改变。因此如果我们最初有一个 vega 值为 Λ 的组合，我们需要包括

$$N_T = -\Lambda/\Lambda_T \tag{9.22}$$

个期权（每一个的 vega 值是 Λ_T）来使整个组合具有 vega 中性。如果我们的组合已经是 gamma 中性，那么它往往不是 vega 中性。因此我们需要使用至少两种可交易期权来使组合同时 gamma 和 vega 中性。我们在表 9—4 中给出了一个例子。

表 9—4　　delta，gamma 和 vega 中性的组合

数据：　你持有期权组合 A，它具备如下特征：

$\Delta_a = -500 \quad \Gamma_a = -5\ 000 \quad \Lambda_a = -4\ 000$

其中，Λ_a 为期权的 vega。市场上有期权“Z”，它有 $\Gamma_z = 1.5$，$\Lambda_z = 0.8$，$\Delta_z = 0.5$。市场上还可获得期权“Y”，它有 $\Gamma_y = 0.3$，$\Lambda_y = 0.4$，$\Delta_y = 0.6$。

问题：　你如何把期权 A，Y 和 Z 组合起来，构成“gamm，vega 和 delta 中性”的组合？

答案：　我们需要：

$n_z \Lambda_z + n_y \Lambda_y + \Lambda_a = 0$

$n_z \Gamma_z + n_y \Gamma_y + \Gamma_a = 0$

因此：

$n_z (0.8) + n_y (0.4) - 4\ 000 = 0$

$n_z (1.5) + n_y (0.3) - 5\ 000 = 0$

解出：

$n_z = 2\ 222.2$（做多）　　$n_y = 5\ 555.5$（做多）

新组合的 delta：

$2\ 222.2 \Delta_z + 5\ 555.5 \Delta_y + \Delta_a = +3\ 944.4$

因此，做多 3 944 股标的股票。

组合对冲了 S 的小幅（delta）和大幅（gamma）变化以及 S 的波动率的变化（vega）。

对于随机波动并每日调整头寸的情况，Kurpiel 和 Roncalli（1998）的结果显示，纯粹 delta 对冲的表现为%HP=0.20%～0.25%，而 delta - vega 对冲的表现为%HP=0.135%。

标的于股票的看涨期权和看跌期权的多头（具有同样的执行价和到期日）具有相等的正的 gamma 和 vega 值。看涨期权和看跌期权的空头具有负的 gamma 和 vega。虽然大多数交易员不断调整他们的组合头寸以维持 delta 中性，他们通常并不为保持 gamma 和 vega 中性而频繁调整头寸，因为要在低廉的价格找到合适的“相抵期权”往往是非常困难的。因此他们只是在 gamma 和 vega 变得大到难以接受的程度才进行调整。但是，组合头寸的变化每天都受到监测，股票价格或是股票价格波动率的大幅变化而造成的可能损失每天都会被计算出来，这是后面我们将要讨论的风险管理的主题。另一方面，很多金融机构主要向它们的客户出售看涨期权和看跌期权，因此在正常交易中，会建立起具有负的 gamma - vega 的头寸，它们经常作为期权的买主，以合适的价格购入期权，来减少它们的风险暴露程度。

delta，theta 和 gamma

对于不支付红利股票的衍生证券，Δ，Θ 和 Λ 是相互联系的。这可以从根据 Black - Scholes 公式导出的衍生品价格 f 的微分方程（参见第 17 章）中看出来，f 的微分方程形式较为复杂：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\left(\frac{\partial f}{\partial S}\right) + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{9.23}$$

但是，通过上面 Δ，Θ 和 Λ 的定义，上式可以写成

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \Gamma = rf \tag{9.24}$$

对于 *delta* 中性组合(即上式中 $\Delta=0$)，公式(9.24)变成

$$\Theta+\frac{1}{2}(\sigma S)^2\Gamma=rf \tag{9.25}$$

因此，一个 delta 中性组合的 Θ 和 Γ 是负相关的。当 Θ 非常大时，Γ 将很小，反之亦然。

泰勒公式与希腊字母

上面关于期权价格变化的公式全部是基于泰勒定理的近似结果。根据泰勒定理，任意连续可微的函数可以由它的泰勒展开式近似。让我们通过泰勒展开式求出 $f(S,r,t,\sigma)$的变化。可以证明(参见第 17 章)$\mathrm{d}S$ 与$\sqrt{\mathrm{d}t}$同阶，因此在我们的近似式中，为包括进 $\mathrm{d}t$ 项(但不包括比 $\mathrm{d}t$ 高阶的项)，就应包括进$(\mathrm{d}S)^2$ 项。为了简化说明，最初设 r 和 σ 都是常量，那么 f 的泰勒展开式就是

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t\right)+\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2+\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2+\frac{\partial f}{\partial S\partial t}(\mathrm{d}S)(\mathrm{d}t)+\cdots \tag{9.26}$$

我们忽略比 $\mathrm{d}t$ 高阶的最后两项。再根据希腊字母，上式可以写成

$$\mathrm{d}f=\Delta(\mathrm{d}S)+\Theta(\mathrm{d}t)+\frac{1}{2}\Gamma(\mathrm{d}S)^2 \tag{9.27}$$

对于 delta 中性组合，上式进一步简化为

$$\mathrm{d}f=\Theta\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\Gamma(\mathrm{d}S)^2 \tag{9.28}$$

如果我们考虑波动率的变化，就需要在公式(9.27)中引入 $\mathrm{d}f$ 的新项

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma}(\mathrm{d}\sigma)+\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial\sigma^2}(\mathrm{d}\sigma)^2 \tag{9.29}$$

其中，$\mathrm{d}\sigma$ 为 $\mathrm{d}t$ 时段上波动率的变化($\Lambda=\partial f/\partial\sigma$)。实际上，在近似估计波动率变化给期权价格变化造成的影响时，二阶项$(\mathrm{d}\sigma)^2$ 通常被省略。

BOPM 中的对冲参数

假设我们没有期权价格的一个封闭解，但我们想计算出这些“希腊字母”的值。让我们使用 BOPM 来建立股票价格和期权价值的网格图，每一步对应于一个星期，就是说 $\Delta t=T/n=1/52$，$U=\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$，$D=\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$。为了对 delta 和 gamma 风险进行对冲，我们应如何决定期权的 delta 和 gamma 值呢?

为了达到此目的，我们需要用更清楚的方式来表示网格图。迄今为止，我们用 S_i（$i=$U，D，UU，DD，UD 等）来表示。显然这样表示十分繁琐，更方便的形式是用 i 来表示网格中“向上”移动的次数（比如 UU=2)。下移的次数用 0 来表示，几何上则用水平线来描述（见图 9—5)。我们还需要表示每个节点的时期数，因此完整形式应该是 $S_{t,j}$。因此在 $t=2$ 时，原来的 S_{ud}变成 S_{21}，其中“1”代表向上移动的次数。这样“新的”和“旧的”表示方法分别是：

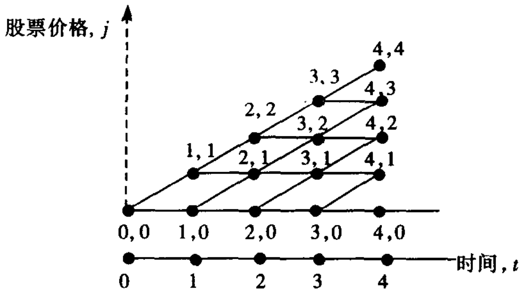


图 9—5 BOPM 网格

$S_d = S_{10}$，$S_u = S_{11}$ 和 $S_{dd} = S_{20}$，$S_{ud} = S_{21}$，$S_{uu} = S_{22}$

表达式的通常形式是“$S_{t,j}$”，其中 t=网格图中的时期数，j=相应节点在时期 t 总共上移的次数。这种表达形式使得我们可以用计算机程序来生成网格图。比如在 $t=0$ 时，我们可以计算出节点（0，0）的期权 delta 值：

$$\Delta_{00} = \frac{f_{11} - f_{10}}{S_{11} - S_{10}} \tag{9.30}$$

为估计 gamma，注意到在 $t=1$ 时有两个 Δ 的估计值：

$$\Delta_{11} = \frac{f_{22} - f_{21}}{S_{22} - S_{21}} \tag{9.31a}$$

和

$$\Delta_{10} = \frac{f_{21} - f_{20}}{S_{21} - S_{20}} \tag{9.31b}$$

对应于这些 Δ 值的 S 值可以这样计算：在网格图的上半部分，S 的平均值是 $S^* = (S_{22} + S_{21})/2$，在下半部分，$S^{**} = (S_{21} + S_{20})/2$，因此它们的差是

$$\lambda = [(S_{22} + S_{21}) - (S_{21} + S_{20})]/2 = (S_{22} - S_{20})/2 \tag{9.32}$$

为计算在 $t=0$ 时的 gamma 值，我们把 delta 的变化量除以这两个 delta 之间的“距离”：

$$\Gamma_{00} = \frac{\Delta_{11} - \Delta_{10}}{\lambda} \tag{9.33}$$

虽然我们对 Δ 和 Γ 的估计需要用到节点 $t=1$ 和节点 $t=2$ 的值，但可以认为这些值代表了 $t=0$ 时的 Δ 和 Γ，特别是在时间间隔 Δt 很小的情况下。对于期权的 theta 值（当 S 不变时，$\Theta = \partial f / \partial t$）的估计可以通过在最初两个节点间插值而很方便地得到。期权在 $t=1$ 时的平均值是 $(f_{11} + f_{10})/2$，因此对 theta 的估计是

$$\Theta = \frac{(f_{11} + f_{10})/2 - f_{00}}{\Delta t} \tag{9.34}$$

为估计 vega 我们需要两个二叉树，因为当决定 U 和 D 时，每一个树的 σ 都是常量。我们要做的是选择另外一个波动率值（$=\sigma^*$，并接近于原来的 σ），并使 Δt，r，K 和 T 不变，计算出这一新

的“期权”在 $t=0$ 时的价格 f^*。那么期权的 vega 就是

$$\Lambda=\frac{f^*-f}{\sigma^*-\sigma} \tag{9.35}$$

因为我们可以使 Δt 尽可能的小，我们也可以通过近似衍生品在其他节点上（时期）的值来估计出 Δ 和 Θ。比如，$t=2$ 时，Δ 的一个估计值就是

$$\Delta=\frac{f_{22}-f_{20}}{S_{22}-S_{20}} \tag{9.36}$$

$t=0$ 时的 theta 值可以被估计为

$$\Theta=\frac{f_{21}-f_{00}}{2(\Delta t)} \tag{9.37a}$$

或

$$\Theta=\frac{f_{42}-f_{00}}{4(\Delta t)} \tag{9.37b}$$

Wilmott（2000）清楚地讲述了各种估计希腊字母的方法（比如向前、向后和中间差分），我们将在第 17 章中进一步探讨这个问题。

9.3　波动率

在 Black－Scholes 公式中，在 t 时刻，除了股票在期权生命期的波动率之外，所有的变量都是已知的。因此我们需要对波动率做出预测。典型的年标准差的波动率一般在 $\sigma=0.2\sim0.4$ 之间（即每年 20%到 40%）。如果不同时期股票的收益是独立的，那么 T 时段的标准差是 $\sigma_T=\sigma\sqrt{T}$。例如，一只股票的年波动率 $\sigma=30\%$，那么它 3 个月（$T=1/4$）的波动率则是 $\sigma_{0.25}=30\sqrt{0.25}=15\%$。因此，利用$\sqrt{T}$法则，我们只需要估计出股票单位时期上的波动率，其他任意时期 T 上的波动率就是 $\sqrt{T}\sigma$。

估计波动率

为了估计波动率，人们建立了各种模型，其中有等权重均值模型、指数权重移动平均模型（EWMA）、基于收益上/下限的更复杂的一些模型、被称为 ARCH，GARCH 的时间序列模型和更复杂的随机波动模型。

等权重模型

如果我们每天对股票价格进行观测，那么每天的连续复合收益是

$$R_i=\ln(S_i/S_{i-1}) \tag{9.38}$$

n 个数据点的等权均值就是 n 天里的日平均收益：

$$\bar{R}=\frac{\sum_{i=1}^{n}R_i}{n} \tag{9.39}$$

样本标准差的通常形式为

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i-\bar{R})^2}{n-1}} \tag{9.40}$$

上面公式可以对任意长时期上以任意频率（如日、周、月）采集的数据估计出平均值和标准差（忽略掉重合数据产生的复杂性）。例如，如果我们用每日收益的数据作为样本，发现$\hat{\sigma}=0.01$（每天1%），如果我们假设每年有$T=250$个交易日，那么可以计算出将在Black - Scholes公式中使用的年波动率为

$$\hat{\sigma}_{250}=0.01\sqrt{250}=0.158\quad（或每年15.8\%） \tag{9.41}$$

如果收益是*niid*分布的（即正态独立同分布），我们对σ_{250}估计的准确性可以用$\hat{\sigma}_{250}$的标准差来衡量，可以证明Std. dev. $(\hat{\sigma}_{250})=\hat{\sigma}_{250}/\sqrt{2n}$。因此，如果我们使用$n=25$个观测点来计算标准差，那么

$$\text{Std. dev.}(\hat{\sigma}_{250})=\frac{0.158}{\sqrt{50}}=0.0223\quad（或每年2.23\%） \tag{9.42}$$

因此，使用25个观测点意味着我们对σ_{250}的估计并不是十分准确的。实际上，我们一般采用90天到180天的数据进行估计。这样准确性可以分别提高到每年1.18%和每年0.83%。如果股票支付D美元的红利，那么对包含除权日的时期，连续复合股票收益将是

$$R_i=\ln[(S_i+D_i)/S_{i-1}] \tag{9.43}$$

上式中我们忽略了税收因素带来的复杂性。如果把税收的复杂影响考虑在内，那我们计算时有时要把包含除权日的时期去掉。（与支付红利相关的日期是股票持有者为收取红利而登记所有权的日期，通常叫做除权日。）

以上我们计算年波动率是基于250个交易日而不是365个日历日。至于这两种方法哪个“正确”要依赖于我们认为波动率的来源究竟是什么。根据有效市场假说（EMH），波动是因为随机到达的新信息而形成的，因此2天的波动应该是1天波动的两倍。相反的一个观点是，波动是由交易本身形成的。Fama和French（1980）验证了这两种观点，他们计算了：

(1) 每日股票价格（收盘价）在连续的交易日变化的方差（即星期一到星期五的收盘价，并去掉其间有节假日的星期）。

(2) 股票在星期五的收盘价和星期一的收盘价变化的方差（即3个日历日）。

如果交易日和非交易日相同，那么使用方法（2）计算出的方差应该等于方法（1）计算出的方差的3倍。然而，Fama和French发现，方法（2）的结果只比方法（1）的结果大20%左右。因此交易日的波动要远大于非交易日的波动。当然，有效市场的支持者会说，在交易日会有更多的信息出现。有一个例子对这个观点不利，我们知道影响农作物期货的气象新闻在星期一至星期五或是周末出现的机会同样大。因此，依赖于天气的农作物期货理应遵循“三倍”法则，但事实并非如此

（见 French 和 Roll，1986），这表明交易本身造成了波动。以上分析说明，应用 250～252 个交易日的方法（通常用 250 个交易日）要比用 365 个日历日的方法更好一些。

估计 σ 的另一个问题是，我们需使用多少个历史数据点？如果股票的真实波动率是随时间变化的，那么我们应该只使用最近的数据来计算 σ（比如过去 90 个交易日），因为这样才能更好地代表未来期权生命期的波动。但是，如果 σ 的变化不是很大的话，那么我们为了更精确地估计 σ，反而应使用更多的历史数据。因此，我们必须根据真实变量随时间变化的程度在两者之中取一个折中方案，通常我们用最近 90 到 180 个交易日的数据来估计 σ。我们用 n 个样本点的历史数据来估计波动率，暗示着我们知道波动率是随时间变化的，而 Black - Scholes 公式中使用 σ_{250} 却要求波动率是个常数，这两者具有矛盾之处。不过，假设在期权的生命期里波动率是个常数通常不会导致大的定价错误。

指数加权移动平均

在这种模型里，权重是呈几何级数递减的，$w_k=(1-\lambda)\lambda^k$，因此 $\lambda=0.9$ 时，λ^k 的值将是 0.9，0.81，0.73，等等。那么波动率的预测将是

$$\sigma_t=(1-\lambda)\sum_{m=1}^{n}\lambda^m(R_{t-m}-\bar{R})^2 \tag{9.44}$$

只有当 $n=\infty$ 时，权重 w_k 的和才等于 1。然而，如果我们使用 20 天的数据，那么权重 w_k 的和只有 0.86，那么我们让每个 w_k 都乘以（$w_k/0.86$），因此“新”的权重和就等于 1 了。

ARCH 和 GARCH

预测 σ 的更复杂方法包括 ARCH 和 GARCH 回归。这些方法假设对明天 σ 的预测是我们昨天对 σ 的预测和今天股票的非预期收益的加权平均。简单 GARCH 模型与 EWMA 模型非常相似，两者都是自回归的模型（对未来的预测要依赖于过去波动的加权平均，参见第 24 章和 Cuthbertson，1996）。但与 EWMA 模型不同的是，GARCH 方法是随机波动率模型，因为模型中波动率的变化是随机的。

以简单 GARCH 模型为例（GARCH 代表一般自回归条件异方差，generalized autoregressive conditional heteroscedasticity）。资产的收益 R_t 被假设为以 0 为均值的条件正态分布：

$$R_t=\varepsilon_t\sigma_t \qquad \varepsilon_t\sim niid(0,1) \tag{9.45}$$

式中随机因素由 ε_t 给出，因为我们假设 $\mathrm{Var}(\varepsilon_t)=1$，所以 R_t 的条件方差为

$$\mathrm{Var}(R_t)=\sigma_t^2 \tag{9.46}$$

上式表明收益的方差是随时间变化的（$=\sigma_t^2$）。GARCH 模型假设波动率是自相关的（明天的波动率要依赖于今天的波动率）：

$$\sigma_{t+1}^2=\alpha_0+\alpha_1\sigma_t^2+\alpha_2R_t^2 \tag{9.47}$$

如果 $\alpha_1+\alpha_2$ 接近于 1，那么方差具有一致性，即如果某段时期的方差很高（低），那它随后时期的方差也会高（低）。从理论上讲，GARCH 模型可以利用收益的任何分布（如 t 分布），因此具有很强的灵活性。一个对每日英镑—美元汇率的 GARCH 估值方程的形式可以为

$$\sigma_{t+1}^2=0.014+0.08R_t^2+0.88\sigma_t^2 \tag{9.48}$$

$\alpha_1+\alpha_2=0.96$，非常接近于1，体现了方差的一致性。这意味着，如果今天波动比较大，那么在未来比较长的时期里，波动都会很大。

虽然 Black - Scholes 公式中的期权定价独立于股票的期望收益，但它与投资者对于未来波动率的主观预期却有关系，这个预期会受到未来可能发生事件的影响（比如大选结果）。考虑到未来事件的主观预期，根据历史数据对波动进行的预测要不断进行修正。

隐含波动率

市场对于股票收益的未来波动性的预期，会随着基本经济形势的变化而改变。我们可以通过期权报价所暗示的“隐含波动率”发现市场对于波动率历史改变的看法。

如表9—5所示，$z=\{S,K,r,T\}$的所有变量和看涨期权的报价$C=5.75$都是已知的。因此我们能把 Black - Scholes 公式反过来，求出隐含波动率σ。从原理上，我们是用一系列σ的测试值来根据 Black - Scholes 公式计算出期权的理论值$\hat{C}$，然后选择使$\hat{C}=$期权报价C的σ值。表9—5计算得出波动率是0.288。显然，用计算机编程来求解此问题是非常简单的，只需重复选择不同的σ，以使$(\hat{C}-C)^2$最小化。表9—6中给出了循环查找程序的例子。Excel 的优化函数 SOLVER 也使用了一个循环步骤，对我们例子中的期权，也给出了$\sigma=0.288$的结果（见表9—7）。对每一个观测到的期权报价，我们都可以计算出相应的隐含波动率。这样我们就得到了隐含波动率的时间序列，可以用来与早先介绍的其他方法得出的结果进行比较。

表9—5　　计算隐含波动率（试算法）

输入数据	
S	**164**
K	**165**
r	**0.052 1**
T	**0.095 9**
δ	**0**
看涨期权报价	**5.75**

试算法计算［注意：$N'(d_1)=\exp(-d_1^2/2)/\sqrt{2\pi}$］。

选择不同的“sigma”值，利用 Black - Scholes 公式计算看涨期权的理论价格，直到等于实际的报价。

Sigma 的试算值	d_1	d_2	$N'(d_1)$	**使用 Black - Scholes 得到的价格**
0.281	0.031 068	−0.055 95	0.398 75	5.606 293
0.282	0.031 267	−0.056 06	0.398 747	5.626 545
0.283	0.031 466	−0.056 17	0.398 745	5.646 796
0.284	0.031 664	−0.056 28	0.398 742	5.667 047
0.285	0.031 862	−0.056 4	0.398 74	5.687 298
0.286	0.032 06	−0.056 51	0.398 737	5.707 549
0.287	0.032 257	−0.056 62	0.398 735	5.727 799
0.288	0.032 454	−0.056 73	0.398 732	**5.748 05**
0.289	0.032 651	−0.056 85	0.398 73	5.768 3

注：sigma=0.288时，得到看涨期权报价。

表 9—6　　**计算隐含波动率的算法**

Manaster 和 Koehler（1982）给出了一个基于 Newton - Raphson 查询程序计算隐含波动率的迭代程序。它们建议初始的波动率猜测值是：

$$\sigma_1^* = [\mathrm{ABS}(\ln(S/K)+rT)(2/T)]^{1/2}$$

迭代过程由下式给出：

$$\sigma_{i+1}^* = \sigma_i^* - \frac{[C(\sigma_i^*)-C]e^{d_1^2/2}\sqrt{2\pi}}{S\sqrt{T}}$$

其中，d_1 来自 Black - Scholes 公式（见附录 9.1），根据 σ_i^* 计算得到。项 $C(\sigma_i^*)$是根据 Black - Scholes 公式计算出的看涨期权价格（利用 σ_i^*），已知的期权报价是“C”。

表 9—7　　**计算隐含波动率（利用“SOLVER”）**

输入数据	
S	**164**
K	**165**
r	**0.052 1**
T	**0.095 9**
δ	**0**
实际看涨期权价格	**5.75**
Black - Scholes 看涨期权价格	**5.75**

利用 SOLVER 最小化的单元格(实际价格－Black - Scholes 价格)^2＝**1.82E－27**

SOLVER 中使用的 sigma 初值(和终值)＝**0.288 096**

计算 Black - Scholes 价格的其他输入：

$d_1=0.032\,473$，$d_2=-0.056\,744$，$N'(d_1)=0.398\,732$。

隐含波动率的时间序列可以告诉我们，市场对于 σ 的一致预期是随时间剧烈变化还是近乎常数。事实上，这些数据可以用来判断隐含波动率是否有自相关性，即市场相当长的时间都认为波动率很大（如 1987 年 10 月的股市大崩溃后），或是认为波动率很小（如股市一段时间的相对平静）。

利用基于历史数据得出的隐含波动率，我们可以确定一些模型（如自回归移动平均，ARMA)的参数，从而应用这些模型预测出未来的波动率。这些波动率可以用在 Black - Scholes 公式之中，来决定期权的真实或公平价格，如果该价格与期权报价差别较大，我们可以尝试利用套购方式赚取无风险利润，甚至为投机只建立期权的单边头寸。例如，我们利用预测的波动率 $\hat{\sigma}$ 通过 Black - Scholes 公式对看涨期权定价，得到 C 的理论价格。如果 C 的报价低于$\hat{C}$，那么我们可以买入被低估的看涨期权（并 delta 对冲），等它的报价上升到“理论价格”时，我们就能得到利润。当然，这要求市场对于波动率的预期向我们的预期靠拢。这通常被称为“交易波动”。

在解释隐含波动率时，我们会遇到一个问题，就是根据当前市场上标的于同一股票并具有相同到期日的期权可以计算出不同的隐含波动率。例如，一个平值期权可能会给出为每年20%的隐含波动率，而一个处于深虚值的期权可能会给出每年24%的波动率。解决此问题的一个方法是这两个波动率的加权平均值作为“真实的”的波动率。权重系数可以基于期权价格对于波动率的敏感性（即期权的“vega”）。因为平值期权对于波动的敏感性要大，所以我们可以对平值期权的隐含波动率取0.8的权重，对虚值期权取0.2的权重。目前已经有许多对权重最优选择进行的研究。Beckers（1981）建议，对任何“新”股票期权的定价，应该采用由已有期权中价格对σ最敏感的期权算出的隐含波动率（本例中是由平值期权求出的20%年波动率）。

9.4 Black - Scholes 公式的局限

如果Black - Scholes模型背后的假设在现实中得到满足，并且市场已消除了所有无风险套利的机会，那么利用Black - Scholes公式便能够得出期权的“正确”价格。实证检验显示，当Black - Scholes应用于历史数据时，对于平值期权给出的价格确实与交易价或屏幕报价相等，但是对于实值或虚值的期权，情况就不同了（这里，我们说Black - Scholes公式给出的是有偏结果，见下文）。这样，如果我们利用Black - Scholes公式，求出平值期权的隐含波动率，并用此波动率来对实值或虚值期权定价，那么Black - Scholes公式得到的理论结果并不与交易价相等。

Black - Scholes公式的一个关键假设是在已知今天价格的条件之下，股票的未来价格是对数正态分布的（等价的说法是，股票的连续复利收入是正态、独立同分布的，即*niid*）。因此，如果真实分布不同于对数正态分布，那么市场价格将与Black - Scholes的定价不同。

比如，一个处于深虚值的看涨期权只有当价格有大幅上升时，才会有正的价值，因此只有分布的右尾才影响期权的价格。分布的右尾越厚，期权的价格将越高，如果真实情况如此，那么Black - Scholes公式得出的结果将倾向于低估该期权（相对于基于真实分布的正确市场价格而言）。对右尾偏薄的分布而言，我们也可以推出相应的结果，这种情况下，看涨期权的真实价格将比Black - Scholes公式的结果要低。对于一个处于虚值的看跌期权，期权在到期日的正的收益将要求股票价格下跌，因此如果股价的真实分布比对数正态分布有一个偏厚的左尾，那么Black - Scholes公式将低估此看跌期权。

Black - Scholes模型假设波动率不变（独立于股票价格）。然而，假设股票价格与波动率正向相关，那么当S较大时，分布的右尾将比较厚（相反亦然），分布的左尾将相对较薄。因此，Black - Scholes公式将对实值和虚值的期权定价错误。这些由错误波动率造成的定价误差将随到期时间的变长而增大（因为，$\sigma_T=\sigma\sqrt{T}$，因此σ任何的不确定性将被T放大）。

特殊事件和阶跃

Black - Scholes假设股票价格变化是对数正态分布的（即股票收益是正态分布的，*niid*）。但是，如果真实分布有时有相对较大的正或负的“阶跃”，那么分布就会有“厚”的右尾和左尾，这样造成Black - Scholes的定价错误。

阶跃扩散过程

在前一章中，我们根据下面公式用 Excel 产生了股票价格的序列：

$$S_t = S_{t-1}(1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t) \tag{9.49}$$

因为 $\varepsilon_t \sim niid(0,1)$，股票价格上升或下降都具有相同的可能。假设我们想生成一个股票价格序列，它与公式（9.49）中的对数正态分布相比，具有更频繁的下跌可能，下跌的幅度也更大，这可以用一类**阶跃扩散过程**来代表。简略地说，当 ε_t 是负值时，公式（9.49）表示股票价格下跌，现在我们需要在公式（9.49）的右侧再减去一个正值，以使 S 下跌更多。我们用 $J>0$ 来表示**阶跃的幅度**。我们还需要确定**阶跃的频率**，这里用 $I>0$ 来表示。我们把公式（9.49）包含进下面一项：

$$-J.\,\mathrm{IF}\{\mathrm{RAND}(.)<[I\times J],\ 1,\ 0\}S_{t-1} \tag{9.50}$$

如果界于 0 和 1 之间的随机数 RAND(.)小于 $I\times J$，那么“IF”语句取值为 1，那么整个表达式的值等于 $-J.\,S_{t-1}$，因此股票价格下跌。例如，如果 $J=0.2$，那么股票价格将再下跌 20%。如果 RAND(.)是一个大的正数，那么“IF”返回值是 0，股票价格与公式(9.49)的 *niid* 过程完全相同。阶跃发生的频率通常服从泊松过程。因此如果阶跃用 dq 来表示：

$$\mathrm{d}q=1\ \text{概率为}\ I\,\mathrm{d}t \tag{9.51a}$$

和

$$\mathrm{d}q=0\ \text{概率为}(1-I\mathrm{d}t) \tag{9.51b}$$

因此在 dt 时间段上，阶跃发生的概率是 $I\mathrm{d}t$。这样我们的阶跃扩散过程具有一个厚的左尾（即左偏分布）。在图 9—6 中，我们绘出了依此分布形成的股票价格，可以看出在正漂移的基础上，股票价格频繁下跌。

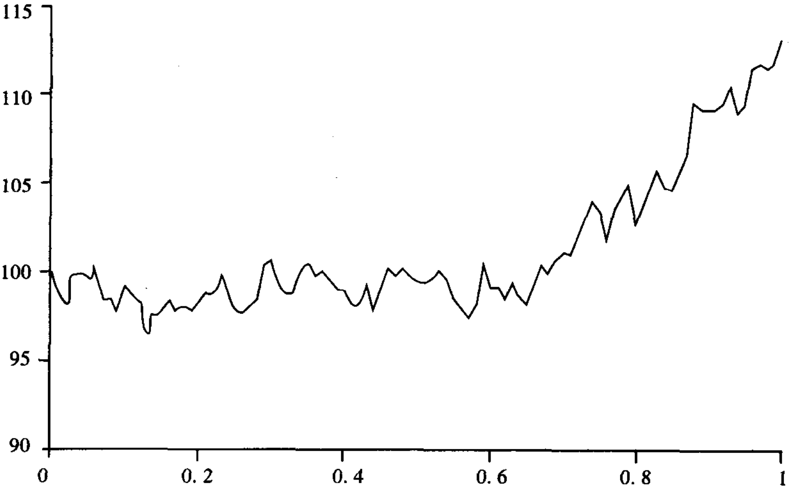


图 9—6　阶跃扩散过程

如果有阶跃出现，那么我们不能进行完全的对冲。我们只能选择对股票的小扩散变化进行对冲，或者选择一个对冲比率，使得受阶跃过程影响的组合价值的方差最小。这两个方法都不特别

令人满意。在前一种情况下，当股票价格发生大幅下跌时，我们完全没有实现对冲，在后一种情况下，我们只是“平均上”对大幅变化对冲，如果处于一个大幅下降后的时期，这并不是安全的做法。

另一个做法是从实际阶跃过程中估计出波动率的上下限 σ^+ 和 σ^-，并利用“最坏情况”的结果来为期权定价。这里我们不对大幅下跌的概率分布（频率/强度）做任何假设，我们不需知道下跌的平均幅度“J”和它的概率分布，我们所需的惟一假设是设置一个跌幅的上限，并将单位时间内下跌的次数控制在一定范围以内（比如，每年大幅下跌不超过 3 次，每次大幅下跌之后的 6 个月内不能再有大幅下跌）。这是一个相当简化的假设，避免了潜在的估计误差。（见 Wilmott，2000，他称这种情形为“崩溃模型”，并提出了使风险最小化的“白金对冲”方法）。如果我们的标的资产不止一种，那么我们还要对资产间的关系做些附加的假设。例如，我们可以假设资产间独立（并不十分现实），或是假设所有资产在同一时间下跌相同比例（相对前者，这个假设略微现实一点，比如对于所有的股票、外汇汇率或是所有的利率），或是假设我们所选择的“更坏的情景”。

对于某些种类的阶跃过程来说，我们可以得到期权定价的 PDE 和它的数值解，从而为期权进行定价。例如，如果资产收益的阶跃成分代表了非系统风险（此风险没有被定价），那么我们还是能够应用风险中性定价来获得欧式期权的一个形式复杂的封闭解（Merton，1976；Nail 和 Lee，1990）。但是，这个理论上的价格会受到前面所述问题的影响，而且它依赖于阶跃过程的估计参数 I 和 J，其中会有误差。上面的分析解释了为什么阶跃扩散模型在实践中没有广泛应用。为实现它所付出的努力，要大于它潜在的优点，因此交易员们更喜欢一个 *niid* 扩散过程，当涉及“阶跃”时，宁愿“闭着眼睛交易”。

在后面的章节中，我们将通过 Monte Carlo 等模拟方法定价期权，这时需要有一个具代表性的股票价格运动过程。我们将使用股票价格的阶跃扩散过程，这种方法得出的结果会不同于 Black - Scholes 公式得到的期权价格（Black - Scholes 假设标的资产收益是 *niid* 过程）。

为了从直觉上体会股票价格的一个特别“阶跃”如何影响期权价格，我们考虑一个最简单的例子。比如在某个特别事件发生前的某个点上（比如即将到来的兼并），交易员预期股票价格将有一个非常大的变化：价格在预期价格附近具有或“高”或“低”的二项分布。因此我们不能应用 Black - Scholes 公式对这类股票的期权定价，实际上这类股票期权的价格确实应该有别于 Black - Scholes 公式给出的结果。期权的到期时间越短，“阶跃”对期权价格的影响就越大，而在长期，阶跃就被“平均化”了。但是，Ball 和 Torous（1985）发现，对于标准期权（“普通香草”），利用 Black - Scholes 公式得到的结果和利用阶跃模型得到的结果并没有显著区别。不过这个结论对于某些新型期权（如障碍期权）并不适用。

9.5 检验 Black - Scholes 模型

检验 Black - Scholes 公式需要检验下面两个联合假设：

(a) Black - Scholes 期权定价公式是正确的；

(b) 市场是有效的，因此期权价格会瞬间变动，消除掉任何无风险套利的机会。

检验 Black - Scholes 公式从原理上非常简单。利用变量 S，T，r，K 的已知历史数据和 σ 的预测值，我们可以根据 Black - Scholes 公式计算出标的于不支付红利股票的欧式期权的理论价格 C_t^*，我们预期它等于观测到的期权真实市场价格 C_t。但实际上，检验 Black - Scholes 公式会有如下几个困难：

- 股权的价格 C_t 必须与股票价格 S_t 同步观测到，即在某一天里交易发生的同一精确时点上。比如，使用 S_t 和 C_t 收盘价的数据可能会得到错误结论，即使它们所指交易发生时间只相差两分钟。如果期权的交易不活跃，那么期权的“收盘价”可能是指下午 2 点的价格，而股票收盘价却是下午 4 点的价格。因为在研究潜在的无风险套利利润时，我们需要“高质量”的同步数据。同样的问题也涉及无风险利率的同步和利率品种的选择（比如我们是应该采用国债收益率还是回购利率）。
- 用 Black - Scholes 计算 C_t^* 值，要用到 σ 的估计值，而 σ 可以用很多方法估计，每种方法都会得到一个不同的 C_t^* 值。
- 对于支付红利的股票期权，必须对支付红利的时间做出一些假设。

一般的实证研究发现，对于 $C_t^* = C_t$ 的平值期权，Black - Scholes 公式成立。然而，对于 $C_t^* \neq C_t$ 的实值期权或者虚值期权，Black - Scholes 公式是有偏的。然而，在后一种情况下，重要的是考虑到交易费用和买卖价差以后，利用买/卖股票来维持一个 delta 中性组合的同时等待错误定价纠正的策略，是否能够赚取无风险利润。对此问题人们做了大量的研究，但是结果却很不明确，有的学者认为在某些情况下（但不常发生），可以获得一点套利利润（Black 和 Scholes，1972；Galai，1977）。然而，必须采取相当快的行动才能获得此利润，因为下一个交易可能把套利机会完全消除。

证明 Black - Scholes 公式对于实值期权（i）和虚值期权（o）得到有偏结果（$C_t^* \neq C_t$）的另一个方法是，找出标的于相同股票期权的隐含波动率。例如，MacBeth 和 Merville（1979）发现，$\sigma_i > \sigma > \sigma_o$，其中 σ 是平值期权的隐含波动率。因为 Black - Scholes 期权价格与 σ 正相关，那么如果我们假设 Black - Scholes 对平值期权定价正确，那么它将高估虚值期权的价格，低估实值期权的价格。到期时间越长，处于实值或者虚值的状态越“深”，这个效应越明显。

Chiras 和 Manaster（1978）检验了基于历史数据对波动率的估计（比如最近 90 天价格变化 $\ln S_t / S_{t-1}$ 的标准差）对于未来波动率的预测是否比（加权）隐含波动率要好。他们发现隐含波动率的预测要好于“历史波动率”的估计，这暗示着期权交易员使用的信息比波动率的简单历史均值要多。

9.6 本章摘要

- 利用期权对股票多头进行 **Delta 对冲**需要做空看涨期权或是做多看跌期权。看跌期权和看涨期权的数量要比持有的股票数量更多，因为期权的价格变化小于股票的价格变化。
- 维持 **delta 中性组合**需要**连续头寸调整**，这可能会带来较高的交易成本。在实际中头寸调整都是离散进行的，因此对冲总会存在风险。
- **Delta 对冲**不能对冲 S 的较大变化，也不能对冲其他影响期权价格的变量(如 r，t 和 σ)。

- **“希腊字母”**允许我们衡量期权价格对于其他变量的敏感性，包括标的股票的价格（即 delta 和 gamma）、利率的变化（rho）、波动率（即 vega）和时间的推移（即 theta）。希腊字母构成了创建对冲组合的基本输入，组合的价值将（基本上）不受 S，t，σ 和 r 的影响。
- 在 Black - Scholes 公式中，期权价格对于波动率非常敏感。虽然存在更为复杂的模型（比如 **GARCH 模型**），但大多数**波动率预测**建立在对过去波动率的加权平均基础之上，或是利用**隐含波动率**来进行。
- **Black - Scholes 公式**体现了一些系统的定价错误，但在大多数情况下，其他的模型也无法得到更好的结果，从这类错误定价中获取大量套利利润几乎是不可能的。
- **软件**：查看 Excel 程序“greeks. xls”，它计算了“希腊字母”的值并绘出图形。“Impliedvol. xls”利用 SOLVER 计算了期权的隐含波动率，“delta-hedge. xls”提供了一个例子，说明如何对冲一个出售的期权，“jump. xls”模拟阶跃扩散过程。这些都能在我们的 J. Wiley 网站上找到。

章末练习

1. 什么是隐含波动率，它是如何计算的？

2. 在一个交易日结束后，你是标的于同一股票的 40 个欧式看涨期权的多头和 20 个欧式看跌期权的空头。看涨期权和看跌期权具有相同的到期日，看涨期权的 delta 等于 0.1。在最近这 24 小时内，你如何用 delta 对冲你的头寸？你将买还是卖标的资产？

3. 在 BOPM 中，你如何计算期权在 $t=0$ 时的 delta 和 gamma？

4. 你们公司的老板不懂期权，因此担心公司的期权头寸会在未来几天带来巨额损失。你向他汇报，让他不必担心，因为你对冲了组合。那么你对期权头寸应用的是 delta 还是 gamma 对冲？你的老板是否就能安稳地入睡？

5. 假设组合 A 是 delta 中性的组合，但是 gamma 为 −300。可以得到标的于同一资产的看涨期权，它的 delta 为 0.62，gamma 为 1.5。我们用“Z”来表示这个看涨期权。你怎样利用 Z 来使整个组合具有 gamma 和 delta 中性？

6. 投资银行具有如下的 OTC 期权组合 A：

期权	期权头寸（持有的期权数量）	Delta	Gamma	Vega
看涨期权	−1 000	0.50	2.2	1.8
看涨期权	−500	0.80	0.6	0.2
看跌期权	−2 000	−0.40	1.3	0.7
看涨期权	−500	0.70	1.8	1.4

市场上有期权 Z，它的 delta＝0.6，gamma＝1.5，vega＝0.8。另一期权 Y 的 delta＝0.1，gamma＝0.5，vega＝0.6。

(a) 计算组合 A 的 delta，gamma 和 vega。

(b) Z 和组合 A 的什么头寸可以使整个组合 gamma 和 delta 中性?

(c) Z 和组合 A 的什么头寸可以使整个组合 vega 和 delta 中性?

(d) Z，Y 和组合 A 的什么头寸可以使整个组合 gamma，vega 和 delta 中性?

7. 假设你（从一家知名的统计机构那里）知道了某股票“正确”的标准差，你相信 25%是正确的数值。你利用市场上的看涨期权价格计算出隐含波动率为 30%。为了获得无风险套利，你应该怎么做（假设 25%确实是期权有效期上的正确波动率)?

附录 9.1　Black - Scholes 模型和希腊字母

一旦我们利用 Black - Scholes 公式得到看涨期权的价格，我们可以用看跌—看涨平价来得到看跌期权价格的表达式（或者直接使用看跌期权的 Black - Scholes 公式）。对于以每年 δ 的速度连续支付红利的股票，它的欧式看涨期权公式与不支付红利股票的看涨期权非常相似，但是要用 $Se^{-\delta T}$ 取代 S。这是因为不支付红利的股票和支付红利的股票应该获得同样的收益。因此支付红利股票的价格增长速度将比不支付红利的股票的增长速度低 δ，但具有同样的期末价值 S_T。因此，如果股票不支付红利，初始价格为 $Se^{-\delta T}$，那么它在 T 时，将与初始价格为 S，以每年 δ 的速度连续支付红利的股票具有同样的价格。

看涨和看跌价格：标的于支付红利股票的欧式期权

$$C=Se^{-\delta T}N(d_1)-Ke^{-rT}N(d_2) \tag{A9.1}$$

$$P=Ke^{-rT}N(-d_2)-Se^{-\delta T}N(-d_1) \tag{A9.2}$$

因为

$$\ln\frac{Se^{-\delta T}}{K}=\ln\frac{S}{K}-\delta T$$

所以

$$d_1=\frac{\ln(S/K)+(r-\delta+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{A9.3a}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}=\frac{\ln(S/K)+(r-\delta-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{A9.3b}$$

C=看涨期权价格
P=看跌期权价格
T=到期期限
S=股票价格
δ=红利收益(连续复利)
σ=标准差

r=无风险利率（连续复利）

Delta：$\Delta=\partial f/\partial S$

Δ_c=看涨期权 delta$=N(d_1)e^{-\delta T}$

看跌—看涨平价：

Δ_p=看跌期权 delta$=[N(d_1)-1]e^{-\delta T}$

Gamma：$\Gamma=\partial^2 f/\partial S^2$

Γ=看涨期权和看跌期权的 gamma$=\dfrac{N'(d_1)e^{-\delta T}}{S\sigma\sqrt{T}}\geqslant 0$　其中　$N'(x)=\dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\geqslant 0$

Vega：$\Lambda=\partial f/\partial \sigma$

Λ=看涨期权和看跌期权的 vega$=S\sqrt{T}N'(d_1)e^{-\delta T}\geqslant 0$

Rho：$\rho=\partial f/\partial r$（对于支付红利和不支付红利的股票）

$\rho_c=TKe^{-rT}N(d_2)>0$

$\rho_p=-TKe^{-rT}[N(-d_2)]>0$

执行价：$\partial f/\partial K$

看涨期权$=e^{-rT}N(d_2)<0$

看跌期权$=e^{-rT}[1-N(d_2)]>0$

Theta：$\Theta=\partial f/\partial T$

不支付红利的股票：

$$\Theta_c=\frac{-SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}}-rKe^{-rT}N(d_2)>0$$

注意，T=“到期时间”，因此，随着到期日的临近，T 会降低。上面的表达式表明当 T 下降时，C 也下降。因此看涨期权的价格随着到期日的临近而降低，即它失去了“时间价值”：

$$\Theta_p=\frac{-SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}}+rKe^{-rT}N(-d_2)>\text{或}<0$$

支付红利的股票：

$$\Theta_c(\text{红利})=\frac{-SN'(d_1)\sigma e^{-\delta T}}{2\sqrt{T}}-rKe^{-rT}N(d_2)+\delta SN(d_1)e^{-\delta T}$$

$$\Theta_p=\frac{-SN'(d_1)\sigma e^{-\delta T}}{2\sqrt{T}}+rKe^{-rT}N(-d_2)+\delta SN(-d_1)e^{-\delta T}>\text{或}<0$$

在上面的公式中，时间是以年衡量的。为了求出一天变化的 theta 值，公式得到的结果必须除以 252，即一年的交易日。因此，如果我们用上面的公式之一计算 Θ，得到 $\Theta=-20$，那么一

天的期权的价格变化是（$-20/252$）。

期权的 theta 一般小于零，这是因为，随着时间的推移，期权逐渐失去价值。然而，有些情况下，theta 会大于零，例如，对于不支付红利的股票的实值欧式看跌期权，或者是利率很高的某种货币的实值看涨期权。

当然，如果我们令上面公式中的 $\delta=0$，那么我们可以得到不支付红利股票的期权的 Black-Scholes 希腊字母。

看涨价格、看跌价格和希腊字母：其他期权

我们可以很方便地对上面的公式进行改动，从而适用于标的于欧式外汇期权和欧式期货期权的公式，这些期权我们将在后面章节讨论。需要的变换如下：

外汇期权：

把 δ 替换成国外利率 r_f，
S 是即期汇率，
σ 是波动率。

期货期权：

用 r 代替 δ（因此 r 从 d_1 和 d_2 的定义中消失了），
用 F 代替 S（F 是期权到期日那天的期货价格），
因此 σ 现在变成期货的波动率。

上面各种情况下的看跌—看涨平价关系可以这样导出：在不支付红利股票的看跌—看涨平价关系中把 S 替换成 $Se^{-\delta T}$，因此：

对于不支付红利的股票：$S+P=C+Ke^{-rT}$
对于支付红利的股票：　$Se^{-\delta T}+P=C+Ke^{-rT}$

后面的结果可以通过考虑下面两个组合导出：

组合 A：一个欧式看跌期权加上 $e^{-\delta T}$ 股股票，红利被投资于额外的股票上。
组合 B：一个欧式看涨期权加上 $Ke^{-\delta T}$ 数量的现金。

很容易看出，对于 $S_T>K$ 和 $S_T<K$，两个组合在 T 时的价值为 $\max(S_T,K)$，因此今天必须具有同样价格。对于外汇的欧式期权，我们用 r_f 替换 δ，对于期货期权，$\delta=r$，$S=F$，因此看跌—看涨平价关系变成 $C-P=(F-K)e^{-rT}$。

第10章

期权价差与股票期权

学习目标

- 演示如何利用期权来**复制不同的收益曲线**。当一个期权组合的收益与另一个资产的收益完全相同时，我们便创造出了**合成证券**（synthetic security）。
- 阐述基于预测未来股票价格（或汇率）变化方向的**投机策略**如何形成**牛市和熊市价差**（bull and bear spreads）。
- 介绍基于预测未来股票价格（向上或向下）变化幅度的策略如何在投机中应用。这些策略被称为**波动率策略**（volatility strategies）。
- 分析**股票期权和股票指数期权**，特别是他们在长期和短期情况下对股票组合进行对冲的应用。

看涨期权、看跌期权和期货（或是持有标的资产）的组合能够形成各种形式的收益，它们的通用名词叫做**金融工程**（financial engineering），

或者被称为**合成头寸**（synthetic position）或是**合成证券**（synthetic securities）。我们前面已见到过金融工程的一个例子，即看跌—看涨平价关系。本章中，我们来研究如何组合期权以对标的资产的未来价值（或价值的范围）进行投机。标的资产可以是某一特定公司或行业（例如 CBOE 的互联网公司指数期权）的股票，也可以是市场指数（如 S&P500 指数）、汇率或是利率（后者将在第 15 章中讲述）。本章的第二部分将研究股票期权和股票指数期权。如果你持有一个股票组合，那么股票指数期权可以对股票价格的下跌提供保险（即具有一个已知的最小值），但同时能使你从股票价格的潜在上涨中获益。同时，指数期权的组合可以用来“制造出”一个无风险头寸，或是从期权的错误定价中赚取无风险利润，后者被称为比率价差。

10.1　合成证券

为了演示把几种期权和期货组合起来的（几乎无限多种）可能性中的几种，我们考察各种组合在到期时的收益情况。我们用纵轴表示收益的美元数，横轴表示（到期时）标的资产的价格，我们可以用收益线的倾斜方向来描述不同的收益状况。如图 10—1A 所示，考虑持有一个看涨期权到它的到期日，如果到期日现价低于执行价，那么期权的收益为 0；而如果现价每超出执行价 1 美分，那么期权的收益就多出 1 美分：这可以用 {0，+1} 来表示。一个看涨期权的空头（售出看涨期权）在到期日的收益将是多头收益的镜像（竖直翻转过来，见图 10—1B）。

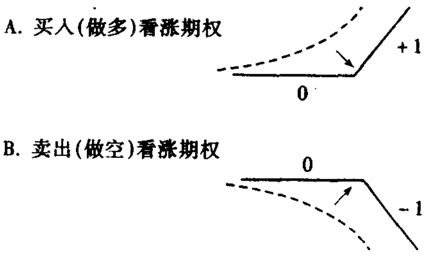


图 10—1　看涨期权的收益

如果一个现存的看涨期权是从另一个投资者手里购买而得的，那么收益曲线将是图 10—1 中的曲线（由 Black - Scholes 公式给出）。当到期日逼近时，曲线会向折线 {0，+1} 移动（即失去它的时间价值）。类似地，如果一个出售的看跌期权是从其他投资者那里买来的，那么图 10—1B 中的曲线将是它的收益，它的时间价值随着到期日临近而增加（对任意给出的固定股票价格而言）。

如果股票价格在到期日跌至执行价之下，那么一个看跌期权的多头（见图 10—2）将获得正的收益。股票价格下跌，收益为正，收益可以用 {−1，0} 来表示。因此“方向向量”＋1 表示收益与股票价格之间的正相关关系：股票价格上升（下降）导致收益上升（下降）。方向向量−1 表示负相关关系：股票价格上升（下降）意味着收益下降（上升）。

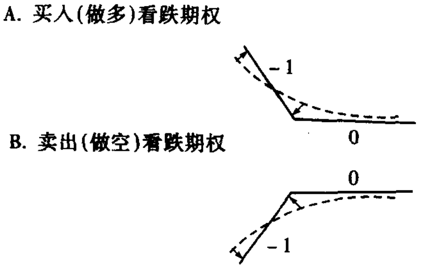
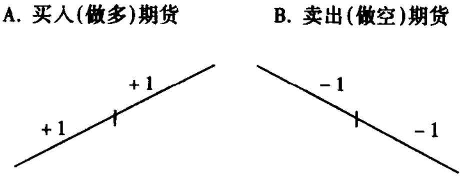


图 10—2　看跌期权的收益

如果已有的看跌期权买自另一个投资者，那么看跌期权多头的收益曲线是图 10—2A 的曲线（如 Black - Scholes 公式给出的结果）。在“合理的”股票价格上，看跌期权的多头失去时间价值，这由曲线向折线的移动表示。然而，当股票价格“非常低”时，（欧式）看跌期权的价值可能会随到期日临近而上升。（此现象的原因有些让人费解。当股票价格很低时，看跌期权的多头几乎必然要选择执行，

因此他必须要把一些钱投资在股票上，来对头寸进行对冲，因此他就损失了利息收入，而时间价值的增加是对这种损失的补偿）。已存在的看跌期权的空头的收益曲线是多头收益曲线的镜像（见图 10—2B）。

假设标的资产是一只股票。远期合约（或期货）的多头最终要在到期日交割合约中的股票。期货的多头相当于今天借入现金，买入股票。除了借款的利息成本外，今天拥有股票或是成为远期合约的多头具有等价的收益曲线。为了避免引入借款（或贷款）而把问题复杂化，我们将使用远期合约（期货）而不是股票来作为我们建立投资组合的基本单元。应该注意的是，股票或是期货合约的收益曲线是完全相同的，因为借款的利息成本独立于股票的价格变化。股票或是远期合约多头的收益都是 {+1，+1}，两者空头的收益都是 {−1，−1}，如图 10—3 所示。



期货和标的股票的支付曲线相同。
期货的利润与期权的利润同时发生。
期货不需要任何 $t=0$ 时的“预付”成本。

图 10—3　期货的收益

假设我们有三种资产，看涨期权、看跌期权和远期（期货），三者具有相同的到期日。看涨期权和看跌期权的执行价都是 K，远期合约的多头以价格 K 来获得标的股票的交割（即远期合约最初具有远期价格 $F_0=K$）。利用三种资产中的任何两种，我们都能复制第三种资产。换一种说法，就是我们能够创造出合成的看涨期权、看跌期权和远期合约。例如，图 10—4 演示了一个合成的看涨期权的多头。

合成的看涨期权多头

$$\underset{\{1,1\}}{\boxed{\text{远期多头}}}+\underset{\{-1,0\}}{\boxed{\text{看跌期权多头}}}=\underset{\{0,1\}}{\boxed{\text{看涨期权多头}}}$$

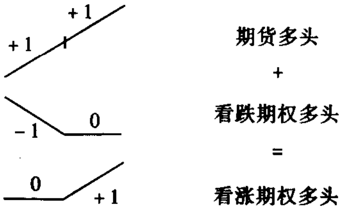


图 10—4　合成的看涨期权多头

其他简单的合成证券是合成的看跌期权空头（见图 10—5）和合成的远期多头（见图 10—6）。

合成的看跌期权空头

$$\underset{\{1,1\}}{\boxed{\text{远期多头}}}+\underset{\{0,-1\}}{\boxed{\text{看涨期权空头}}}=\underset{\{1,0\}}{\boxed{\text{看跌期权空头}}}$$

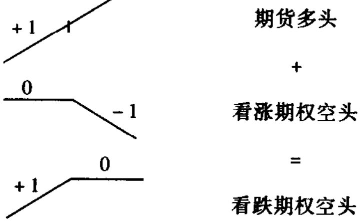


图 10—5　合成的看跌期权空头

合成的期货多头

$$\underset{\{1,0\}}{\boxed{\text{看跌期权空头}}}+\underset{\{0,1\}}{\boxed{\text{看涨期权多头}}}=\underset{\{1,1\}}{\boxed{\text{期货多头}}}$$

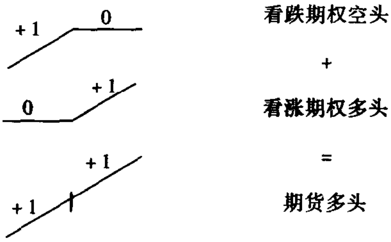


图 10—6　合成的远期多头

价差和跨式价差

利用一种以上的期权可以构造出很有趣的收益来，这被称为价差头寸。投资者使用价差是因为它们比没有保护的头寸风险更小，但这种风险的减小是以降低利润为成本的。价差涉及单纯的看涨期权，或是单纯的看跌期权，或者是两者的组合。价差的形式有好几种，我们着重介绍几种垂直（或货币）套利。

价差交易

垂直（或货币）价差：使用具有相同到期日但不同执行价的看涨期权或看跌期权。

跨式价差：同时使用看涨期权和看跌期权的一种特别形式的价差。

水平（或时间、日历）价差：使用执行价相同但到期日不同的期权。

对角价差：使用不同到期时间和不同执行价的期权。

“垂直价差”一词来源于报纸行情专栏的格式，因为报纸报价时，通常把不同执行价的报价列在同一列里。“水平价差”的来源是因为不同到期月的报价一般印在同一行上。对于 $t=0$ 时有净现金支付的策略，我们按照惯例把它叫做买入价差（即价差多头）。例如，我们以 C_1 的价格买入一个低执行价 $K_1=102$ 的看涨期权，同时以 C_2 的价格卖出一个高执行价 $K_2=105$ 的看涨期权（两者都是 4 月份到期）。因为 $C_1>C_2$，开始时将有一个净现金支付。这通常被称为购买 4 月份 102/105 看涨期权价差，其中数字 102 指买入的期权。而 4 月份 102/105 看跌期权价差将是卖出价差，因为购买 102 看跌期权的成本要小于卖出 105 看跌期权的收益。

如果我们考察的是只有一种执行价的时间价差，那么如果我们买入近期合约而卖出更远期的合约，我们的头寸将是空头。因此，4 月/7 月 102 看涨期权价差将是一个净的做空头寸（即卖出套利），因为投资者从出售 7 月份合约得到的收入要大于买入 4 月份合约的支出。

10.2　牛市和熊市价差

我们所考虑的第一类货币价差被称为牛市和熊市价差。如果投资者预测股票价格将向上移

动，但又希望实际股票价格大幅下跌时，能有一个保险来保证他不受损失，那么他可以采用牛市和熊市价差策略。

看涨期权的牛市价差

如果投资者预期股票价格上升，那么他可以通过以下方式获得利润：

- 今天买入股票（或远期合约）。
- 买入看涨期权。
- 卖出看跌期权。

买入股票成本比较高（有借款成本），并有下行风险。看涨期权和看跌期权的价格可能比较昂贵，而且当卖出看跌期权时，虽然会有期权金的收入，但如果股票价格随后下跌，会有很大的下行风险。如果不采用上述几种策略，我们可以采用牛市价差的方式，虽然损失了一些潜在的上行利润，但却减小了下行风险。这种策略的收益图绘于图 10—7 中，形式为 {0，+1，0}。牛市价差包含：

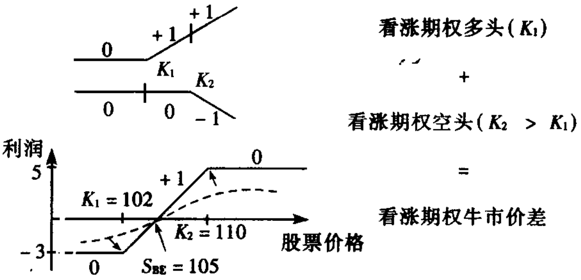


图 10—7　看涨期权的牛市价差

- 以较低的执行价 K_1 买入看涨期权；
- 以较高的执行价 K_2（$>K_1$）卖出具有相同到期日的看跌期权。

让我们更仔细地考察这一策略。考虑下面两个具有相同到期日的看涨期权：

$$C_1=5\quad K_1=102\quad C_2=2\quad K_2=110$$

注意，低执行价的看涨期权（$K_1=102$）价格要高，因此该策略的成本是 $C_1-C_2=3$。因为 $t=0$时付出了现金，你便购买了价差。到期的利润是

$$\begin{aligned}\Pi&=\max(0,S_T-K_1)-C_1-\max(0,S_T-K_2)+C_2\\&=C_2-C_1\quad\text{如果}\quad S_T\leqslant K_1\leqslant K_2\\&=S_T-K_1+(C_2-C_1)\quad\text{如果}\quad K_1<S_T\leqslant K_2\\&=(S_T-K_1-C_1)+(K_2-S_T+C_2)\quad\text{如果}\quad S_T>K_1>K_2\\&=K_2-K_1+(C_2-C_1)\end{aligned}\tag{10.1}$$

当股票价格 S_T 比 K_1 和 K_2 都小时，两个期权到期时都处于虚值，我们支出了期权金 $C_1=5$，得到了期权金 $C_2=2$，总的损失为 3，并与 S_T 比 K_1 低多少相独立。当 S_T 比 K_1 和 K_2 都大时，两个看涨期权都被执行，执行看涨期权得到的股票可以用来作为看跌期权的空头方支付，收益

将是

$$K_2-K_1+(C_2-C_1)=8-3=5 \tag{10.2}$$

该值也独立于 S_T。(收益始终都是正值，因为最大收益是 K_2-K_1，它总是超过投资的成本 C_2-C_1。) 对于中间的情况，收益要依赖于 S_T 的值，盈亏相抵的股票价格是

$$S_{\mathrm{BE}}=K_1+(C_1-C_2)=102+3=105 \tag{10.3}$$

在到期日 S_{BE} 必须至少比执行价 K_1 高出牛市价差的成本价 (C_1-C_2)。如果看涨期权空头有利可图，那么提前执行情况会如何呢（如果标的股票支付红利的话）? 如果看涨期权空头在 $t<T$ 时提前执行，那么 $S_t>K_2$，因此 S_t 也大于 K_1，这表明看涨期权的多头也会提前执行，净收入为 $(S_t-K_1)-(S_t-K_2)=K_2-K_1$。但等式右边是我们持有价差至到期日的最大可能收入，因此对于看涨期权的牛市价差多头来说，提前执行不会带来任何问题。

当牛市价差已存在一段时间以后，它的收益曲线会是什么样子呢?（比如牛市价差 10 月份到期，1 月份买入，持有到 3 月份。）这由图 10—7 中的曲线给出。请注意，箭头代表有利的时间特性。如果股票价格高于盈亏相抵点，那么牛市价差具有正的时间价值。这是因为卖出的看跌期权的时间特性对牛市价差的持有者有利，并且作用强于买入的看涨期权的负时间特性，这一点至少在股票价格很高时是成立的。股票价格低时，情况正好相反，牛市价差的时间特性对持有者不利。

看跌期权的牛市价差

我们也可以使用不同执行价的看跌期权来构成牛市价差 {0，+1，0}：

以 $K_2(>K_1)$的价格卖出看跌期权的收益	{+1，+1，0}
以 K_1 的价格买入看跌期权的收益	{−1，　0，0}
总收益与牛市价差相同	{　0，+1，0}

看涨期权的熊市价差

图 10—8 的收益曲线是牛市价差的镜像图，当投资者认为股票价格将要下跌，但又不想付出单纯购买看跌期权的成本时，可以采取此策略。此策略的收益为 {0，−1，0}，正好与牛市价差相反。它涉及：

- 卖出一个低执行价 K_1 的看涨期权；
- 买入一个高执行价 K_2 ($>K_1$) 的看涨期权。

看跌期权的熊市价差

熊市价差 {0，−1，0} 也可以通过不同执行价的看跌期权构成：

卖出执行价为 K_1 的看跌期权的收益	{+1，　0，0}

买入执行价 $K_2(>K_1)$的看跌期权的收益　　$\underline{\{-1,\ -1,\ 0\}}$
总收益与熊市价差相同　　$\{\ 0,\ -1,\ 0\}$

毫无疑问，卖出牛市价差将得到熊市价差。

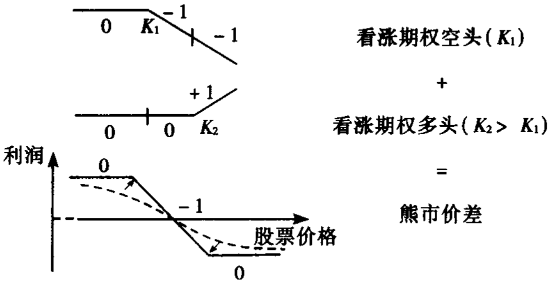
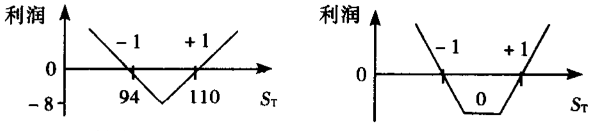


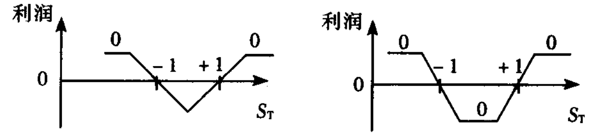
图 10—8　看涨期权的熊市价差

10.3　跨式价差、勒式价差、蝶式价差和鹰式价差

有时投资者认为股票价格将要发生很大变化，但是不确定变化的方向会怎样，这时就要考虑第二种货币价差（即一些具有不同执行价的期权）了，它们在这类情况下可以为结果提供一定的保险（限幅）。如果股票价格上升或下降到一定范围之外，投资者将获得利润，同时该策略也把投资者的损失控制在一定范围之内。这通常被称为**波动性策略**，下面我们考察其中典型的几种：**跨式价差**（straddle）、**勒式价差**（strangle）、**蝶式价差**（butterfly）和**鹰式价差**（condor）。在考虑如何构造这些合成证券之前，让我们看一下它们的收益图（见图 10—9）。



A. 做多(买入)跨式价差　　B. 做多(买入)勒式价差



C. 做空(卖出)蝶式价差　　D. 做空(卖出)鹰式价差

图 10—9　波动策略的收益

如果股票价格上升或下降很大幅度（在图 10—9A 是低于 94 或高于 110），那么跨式价差的多头会获得利润。如果股票价格变化幅度很小，最终位于 94 和 110 之间，那么会有一定范围的损失。比如，当一个军火商在等待一大宗政府合同的最终“签/不签”的结果时，我们可以对其股票期权建立跨式价差多头头寸。又如，当某公司与另一家公司兼并的消息悬而未决时，或是一家制药公司在等待一个新药品（比如伟哥）的政府执照时（股价会因为执照申请的结果有大幅上

升或下降），我们都可以采取跨式价差多头的策略。勒式价差（见图 10—9B）与跨式价差的收益曲线非常相似，但下行风险却更小，在图中表示为“平的底部”。蝶式价差的空头（见图 10—9C）和鹰式价差空头（见图 10—9D）都对潜在的上行利润做出了限制。如果股票价格大幅上升或下降，会有正的利润，但是利润达到某一点后，即使股票价格进一步变化，利润也不会上升。我们将会看到，这些策略的关键点是花在看涨期权和看跌期权的期权金上的成本，这可能是一笔相当大的支出，因此通常只有大的机构投资者或是场内交易者才会使用上面这些策略。

跨式价差

跨式价差多头要买入一个看涨期权 {0，1} 和一个执行价相同的看跌期权 {−1，0}，这样收益 {−1，1} 的曲线就如图 10—10 所示。多头方要同时支付看涨期权和看跌期权的期权金。我们假设看涨期权和看跌期权都在 10 月份到期，那么该策略的结果为

$$K=102 \quad P=3 \quad C=5 \quad \text{因此} \quad C+P=8$$

跨式价差多头的收益为（见图 10—9A）

$$\begin{aligned}\Pi &= \max(0,\ S_T-K)-C+\max(0,\ K-S_T)-P \qquad (10.4)\\ &= S_T-K-(C+P) \Rightarrow S_{BE}^{+}=K+(C+P)=102+8=110 \quad (S_T>K)\\ &= K-S_T-(C+P) \Rightarrow S_{BE}^{-}=K-(C+P)=102-8=94 \quad (S_T<K)\end{aligned}$$

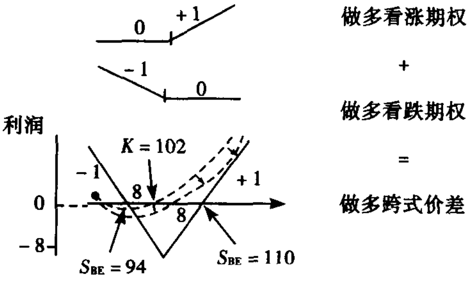


图 10—10　做多(买入)跨式价差

盈亏相抵的股票价格是在到期时使 $\Pi=0$ 的值。我们注意到盈亏相抵的股票价格是以执行价 $K=102$ 对称的。两个盈亏相抵股价的“缺口”是 $S_{BE}^{+}-S_{BE}^{-}=2(C+P)=16$，因此对于平价期权，股票价格必须移动大于 $+8$ 或小于 -8 的值跨式价差多头方才能获得利润。当 $S_T=K$ 时，损失最大，此时看涨期权和看跌期权都没有被行使，损失值等于两个期权的期权金之和 $C+P=8$。如果 S_T 比 K 大或小一点点，那么看涨期权或看跌期权就会被执行（在利润大于佣金的条件下）。

虽然 S_T 远离 K 时，Π 是对称上升的，但 $S_T>K$ 时，最大收益没有上限，而 $S_T<K$ 时，最大收益止于点 $S_T=0$，该点上 $\Pi_{\max}=K-(C+P)=94$。需要注意到，如果认为跨式价差能够盈利，投资者必须对股票的极端移动有一个不同于“平均”市场参与者的看法。这是因为如果市场作为一个整体预期股票价格有一个大的波动，那么这将反应在标的股票更大的波动率（σ）上，因此看涨期权和看跌期权的期权金都将更高。这意味着跨式价差多头两个盈亏相抵点的缺口变得“更宽”，因此只有投资者对股票价格变化的预期比市场预期更大时，他才会采取跨式价差策略。

当一个跨式价差的到期时间较长时，做多一个现存的跨式价差的利润由图 10—10 中的曲线给出。越接近到期日，曲线越往下，向“V”形折线移动。但跨式价差的一个有趣特性是直到到期日前一个月，曲线的移动都十分缓慢。因此，如果预期的市场移动并没有发生，跨式价差的多头可以在到期日前一个月把期权卖掉，他不会损失多少最初支付的看涨期权和做空期权的期权金。换句话说，当到期日还很远时，期权金的价值随时间的消失并不会发生多大损失，但是在它生命期的最后一个月，价值随时间的损失速度却快得惊人（这和真实的生命多么相似!）。

上面我们把波动性解释为股票价格的运动。现在，我们考虑如果隐含波动率 σ 增加（同时股票价格保持不变）时，跨式价差的多头价值会发生什么改变。因为跨式价差由看涨期权的多头和看跌期权的多头构成，当 σ 增加时，两者的价值都会增加。事实上，图 10—10 中的曲线会随着 σ 的上升（下降）而上移（下移）。为了显示股票价格和隐含波动率同时变化对跨式价差的影响，我们需要一个三维图形，后面我们将对此说明。

显然，由卖出看涨期权和看跌期权构成的跨式价差的空头在到期日的收益将是 $\{1, -1\}$，这是一个翻转过来的“V”字形。后面我们还要涉及很多“翻转头寸”，这里我们对此不进行深入讨论。如果在到期日股票价格接近于执行价，那么跨式价差空头的收益为正，约等于看涨期权和看跌期权的期权金之和。然而，如果股票价格上升或下降很多，那么空头方将会受到巨大损失。或许跨式价差的空头方最著名的损失来自于尼克·利森，他在期权和期货上的总损失额达到 14 亿美元，最终使得巴林银行（Barings Bank）破产（参见文章 10.1）。

文章 10.1　利森的跨式价差

到 1994 年底，利森已经出售了 35 000 个日经 225 指数的跨式价差合约，就是说他卖出了 35 000个看跌期权和 35 000 个具有相同到期时间和执行价的看涨期权。这些头寸是在几个月的时间内建立起来的，期权的执行价在 18 500 到 20 000 之间。他并没有向巴林银行汇报这些交易（因为银行规则不允许他卖出期权），而是把它们藏在他“88888 错误账户”里。这些指数期权标的的日经 225 的价值大约在 70 亿美元左右。在 1994 年底，日经指数在 19 000 到 20 000 之间，因此如果它始终停在这个区间，利森的跨式价差策略在到期日就能成功，从而获得跨式价差空头方翻转的“V”字形收益。此时他出售的看涨期权或是出售的看跌期权中的一个将处于虚值状态，来自期权金的收入将超出在到期日的支出。

到期日之前，如果日经指数移出 19 000 到 20 000 的范围，利森的跨式价差的空头价值将会下跌（见图 B10—1），利森作为空头方，将不得不支付增加的保证金。到期日之前的收益是图 B10—1 中的拱形线，x 轴代表日经指数的价值。拱形线假设日经指数的隐含波动率不变。

在 1995 年 1 月 17 日，日经指数位于 19 350 点，但这时发生了神户大地震，到周末时，日经指数已跌至大约 18 950 点，这时看跌期权的多头方已处于深实值状态。这样利森出售的看跌期权价值下跌，造成的损失引发了附加的保证金催付通知，到期日的这些损失已经超出了他来自于看涨期权和看跌期权的期权金的收入。

神户地震发生后，交易员们预期日经 225 的未来波率会变大，这立即提升了看涨期权和看跌期权的价格。于是利森所出售的看涨期权和看跌期权遭受了进一步的损失（见图 B10—1 的波动率轴）。这时利森不得不通过以更高价格买入看涨期权和看跌期权来冲销他出售的跨式价差，因

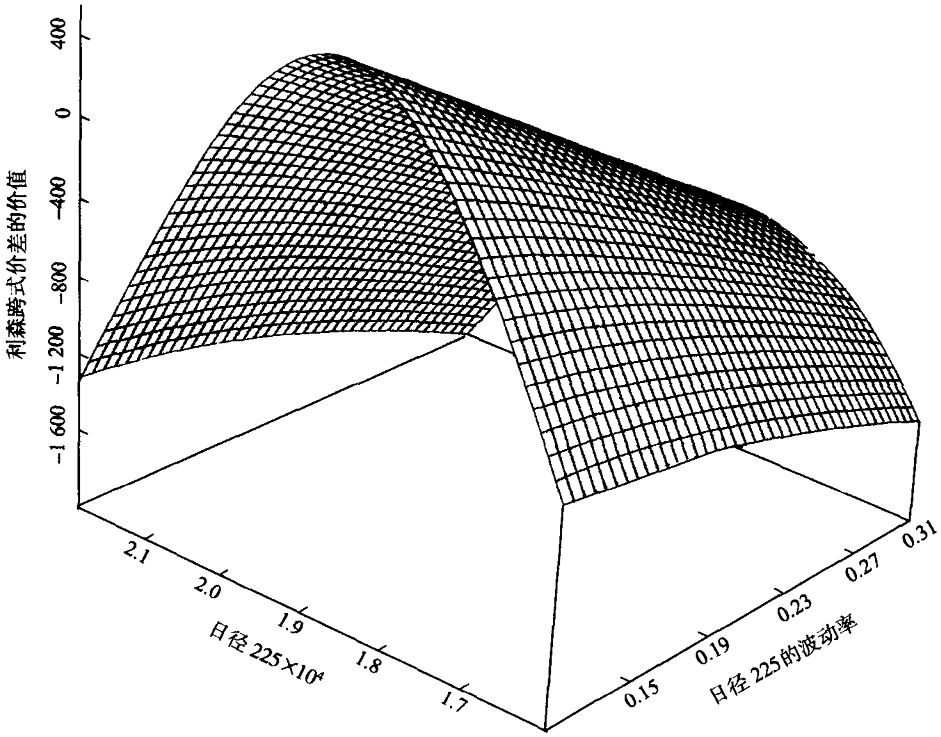


图 B10—1　利森的跨式价差

此造成了损失。这便是 vega 风险，因为它涉及期权价格和日经 225 波动率的变化。

如果把期权持有到期，那么利森可能受到的损失将非常大，因为看涨期权（$S_T>K$）或是看跌期权（$S_T<K$）的多头方将要履约。在到期日，利森的最大收益是看涨期权加上看跌期权的期权金 $C+P$（如果 $S_T=K$），在到期日之前，他的跨式价差的空头价值是

$$V=(-N)(P+C) \tag{B10.1}$$

其中，N= 出售的看涨期权和看跌期权的数量（即 35 000）。价值的变化是

$$\frac{\partial V}{\partial S}=-N(\Delta_p+\Delta_c) \tag{B10.2}$$

价值的变化依赖于 Δ_p 和 Δ_c，对于不支付红利股票的欧式期权，从看跌—看涨平价关系可以得到 $1+\Delta_p=\Delta_c$。例如，如果 $\Delta_c=0.4$，那么 $\Delta_p=-0.6$，因此 $\partial V/\partial S=+N(0.2)$，利森的头寸情况将随日经 225 的下跌而恶化。但要注意到，这只是对于损失的一阶近似。从图 B10—1 中可以看出，如果日经指数剧烈波动（事实就是如此），那么实际的损失将要高得多。这是使用“delta 近似”的危险。请注意方程（B10.2）忽略了早先描述的 vega 风险。

勒式价差多头（买入）

这个策略与跨式价差的多头非常相似，不同点在于买入的看涨期权和看跌期权具有不同的执行价，这使得 V 形的利润图变成了在两个执行价之间“平底”的利润图。如果 K_0 是跨式价差的执行价，那么做多勒式价差要买入执行价 $K_c > K_0$ 的看涨期权和买入 $K_p < K_0$ 的看跌期权。因为勒式价差中的看涨期权和看跌期权比跨式价差要处于更深的虚值状态，因此勒式价差的成本要比跨式价差的成本低得多。

如果一个具有较低执行价的看跌期权多头收益是 {−1，0，0}，同时如果一个具有较高执行价的看涨期权多头收益是 {0，0，+1}（见图 10—11），那么勒式价差的收益将是 {−1，0，+1}，这是一个“桶形图”。

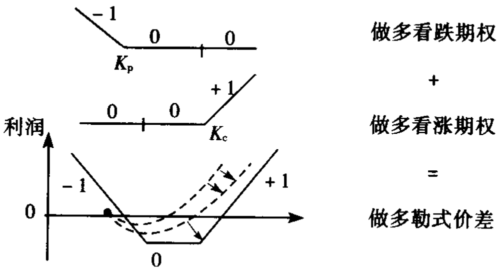


图 10—11 做多（买入）勒式价差

股票价格的盈亏相抵点是：

当 $S_T > K$ 时：$S_T - K_c - (C+P) = 0 \Rightarrow S_{\mathrm{BE}}^{+} = K_c + (C+P)$

当 $S_T < K_p$ 时：$K_p - S_T - (C+P) = 0 \Rightarrow S_{\mathrm{BE}}^{-} = K_p - (C+P)$

勒式价差的两个盈亏相抵点的距离是 $S_{\mathrm{BE}}^{+} - S_{\mathrm{BE}}^{-} = (K_c - K_p) + 2(C+P)$，可以证明它比跨式价差的两点间距离 $S_{\mathrm{BE}}^{+} - S_{\mathrm{BE}}^{-} = 2(C_0 + P_0)$ 要大，参见公式（10.4）。因此，虽然勒式价差比跨式价差的成本要小，但它如果要获利，要求股票价格有更大的移动。可以证明，当隐含波动率上升 σ 时，勒式价差与跨式价差上升同样的价值，但因为勒式价差的成本更小，因此如果你预测波动率上升，那么勒式价差是一个更好的选择。

蝶式价差

蝶式价差是跨式价差的又一变形，它在普通跨式价差的基础上增加了一对“翅膀”。**蝶式价差的空头**可以完全由看涨期权构造出来：卖出一个较低执行价的期权，买入两个中间执行价的期权，再卖出一个较高执行价的期权，总的收益就是 {0，−1，1，0}，如图 10—12A。它具有有限的上行风险和下行风险，但只有股票价格大幅上升或下降时才会盈利。因此它是一个波动性策略。做空蝶式价差需要：

- 卖出两个具有“外层执行价”的看涨期权（K_1，K_3）；

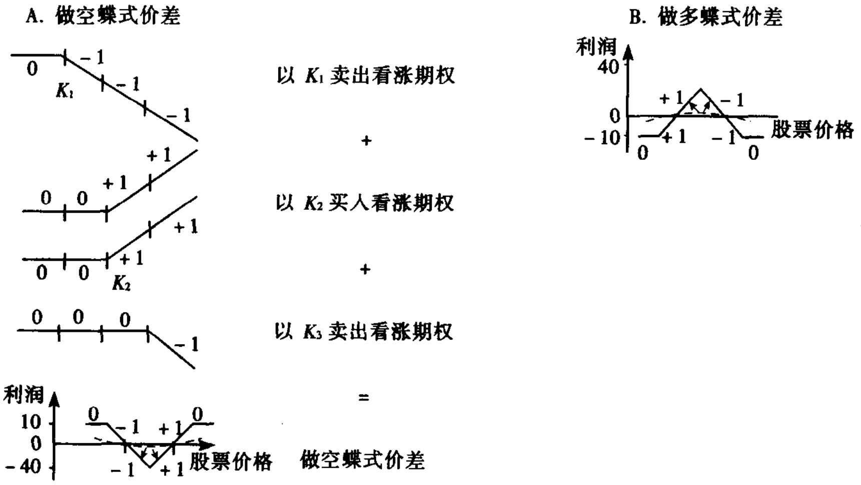


图 10—12

- 买入两个具有“内层执行价”的看涨期权（K_2）。

在到期日之前的收益图是图 10—12A 中几乎水平的曲线，它直到即将到期之前几乎并不移动，这与到期时的收益图差别极大。因此蝶式价差对于股票价格的变化几乎是没有风险的（除非已经非常临近到期日），这就是说蝶式价差的 delta 值接近于零。到期日之前的收益图几乎不随隐含波动率的变化而改变，这是因为对于长期的期权，vega 并不随股票价格有很大变化，买入的两个期权的正的 vega 几乎恰好被两个卖出期权的负的 vega 抵消。因此如果你投机于波动率 σ 的变化，你应该使用跨式价差或是勒式价差，而不是蝶式价差。

蝶式价差的空头也可以由看跌期权复制而成。我们卖出两个具有“外层执行价”的看跌期权，并买入两个具有“内层执行价”的看跌期权，那么我们有：

卖出一个执行价为 K_1 的看跌期权的收益	{+1，　0，　0，0}
卖出一个执行价为 K_3 的看跌期权的收益	{+1，+1，+1，0}
买进两个执行价为 K_2 的看跌期权的收益	{−2，−2，　0，0}
总收益与蝶式价差空头相同	{　0，−1，+1，0}

蝶式价差多头的收益图如图 10—12B 所示，它把以上述及的交易全部“翻转”过来。蝶式价差的多头也可以考虑如下：

看涨期权牛市价差多头＝买入 K_1 看涨期权卖出 K_2 看涨期权＝{0，+1，0，0}

+

看涨期权熊市差价多头＝买入 K_3 看涨期权卖出 K_2 看涨期权＝{0，0，−1，0}

＝

蝶式价差多头＝{0，+1，−1，0}

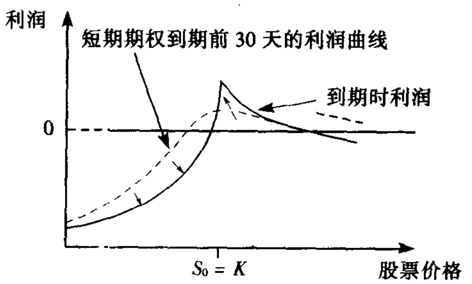
这是金融工程应用的另一实例。经常在临近到期日才会使用蝶式价差，如果你认为股票价格不会变化，那么你可以从蝶式价差的多头中获利；如果你认为股票价格会有剧烈变化，你则可以从空头中获利。

鹰式价差空头

该策略与做空蝶式价差类似（见图10—9），但是具有一个“平的底部”。它的收益图为{0，−1，0，+1}，实现方法是把蝶式价差中具有相同执行价的两个“中间期权”换成不同执行价K_{21}和K_{22}的两个期权，这样蝶式价差空头的V形底部就被拉平。这与跨式价差和勒式价差之间的关系非常相似。具体地说，一个鹰式空头策略包括：以最低执行价卖出一个期权，以高一些的执行价买入一个期权，再以更高一些的执行价买入另一个期权，并以最高的执行价卖出一个期权，这里使用看涨期权和看跌期权都可以。一个鹰式价差的成本与类似的蝶式价差相差不多，各自的盈亏相抵点的距离和最大可能收益也相当。鹰式价差的最大损失发生在两个中间执行价之间的范围（见图10—9D），而蝶式价差只发生在某一点。在到期日之前，鹰式价差的价值与上面说明的蝶式价差的价值也非常相似。

水平（时间、日历）价差

上面讲述的几种策略都是垂直价差，是由相同到期日但执行价不同的期权组合而成。**水平价差或时间价差**（horizontal spread or time spread）具有不同的到期日，因此我们不能使用“搭积木”的方式来建立组合。水平价差不能被持有到两个期权都到期为止，因为到期时间短的一个将先到期。“更远的期权”在第一个期权履约时仍有时间价值，水平（时间）价差的收益要取决于策略中使用了什么样的期权。这里并没有一般的规则。让我们来考虑一个简单的例子：买入一个长期期权（360天），卖出一个短期期权（180天），两个期权都是平价期权（即$K=S_0$）。短期期权的时间特性要强于长期期权，因此组合随着时间推移将会增值。在短期期权的到期日，长期期权还有180天（=360−180）才到期，因此该价差策略在到期日的收益如图10—13的实线所示。在短期期权到期前30天，长期期权仍然有210天才到期，该策略的收益如虚线所示。在一个相对静态的市场中（即$S_0=K$），价差策略会随着时间消失而获利，但如果股价向左右两个方向有大的移动，策略就会受到损失（见图10—13）。



水平价差：一个1年期期权多头+一个180天期权空头，两者均为平值。

图10—13　水平价差

10.4　股票期权

上面我们已经看到，投资者可以利用股票期权或股票指数期权来对股票价格的变化或预期波动率的变化进行投机。投资者也可以利用股票期权来对冲各类组合头寸的风险，比如某一公司的股票（如 50 000 股 AT&T 公司的股票），或者是某一行业（如石油业）的股票，或者是基于更广市场的股票。下面我们集中讨论对冲策略，我们首先讨论利用个别股票的期权进行对冲，然后讨论使用指数期权的做法。

单个股票期权

考虑一个包含某一个别公司（如 AT&T）股票的投资组合。利用股票期权能够减小甚至消除这只股票的特别风险。

静态对冲

静态对冲假设最初的期权头寸一直被持有至到期日。假设投资者是 AT&T 的股票多头，那么她可以通过出售看涨期权来抵消掉一些下行风险，这叫做**有保护的看涨期权策略**。投资者因为收到了看涨期权的期权金而减少了一些下行风险。

有保护的看涨期权：

股票多头	{+1，+1}
看涨期权空头	{　0，−1}
等于有保护的看涨期权	{+1，　0}

从图 10—14 可以看出，看涨期权的价格是 $C=3$ 美元，执行价 $K=25$ 美元，期初股票价格 $S_0=24$ 美元。因此利润为

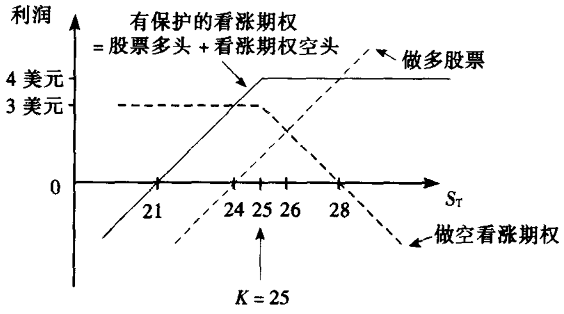


图 10—14　有保护的看涨期权

$$\begin{aligned}\Pi&=(S_T-S_0)+\max(0,\ K-S_T)+C \qquad (10.5)\\&=(S_T-S_0)+C \qquad (S_T\leqslant K)\\&=(S_T-S_0)+(K-S_T)+C \qquad (S_T>K)\end{aligned}$$

$$=K-S_0+C=4(\text{美元})$$

和

$$S_{BE}=S_0-C=24\text{ 美元}-3\text{ 美元}=21\text{ 美元}\quad (S_T\leqslant K)$$

在 $S_0=24$ 美元时，每股的下行风险因为看涨期权的 3 美元期权金而减少到盈亏相抵点的 21 美元。然而，潜在的上行利润也减小了许多，最大的利润值变成了 $K-S_0+C=4$ 美元。

保护性看跌期权

使用保护性看涨期权，投资者失去了很多上行利润。另一种保护策略使投资者在保护她股票多头头寸的同时，又不失上行利润带给她的好处，这种策略就是持有股票多头的同时，再买入看跌期权。这种对冲策略被称为**保护性看跌期权**（protective put）。到期日的收益曲线为：

股票多头	{+1，+1}
看跌期权多头	{−1，　0}
等于保护性看跌期权	{　0，+1}

保护性看跌期权的收益曲线与看涨期权多头是相同的。这也是金融工程的例子，能够得到此结果是由于看跌—看涨平价关系。假设 $S_0=24$ 美元，看跌期权的执行价是 25 美元，期权价格是 5 美元。来自这个保护性看跌期权的利润是：

$$\Pi=S_T-S_0-P\qquad (S_T\geqslant K)\tag{10.6}$$

和 $S_{BE}=S_0+P=29(\text{美元})$

$$\Pi=(S_T-S_0)+(K-S_T)-P\qquad (S_T<K)$$
$$=K-S_0-P=-4$$

由图 10—15 可以看出，在熊市时保护性看跌期权的下行损失有一个限幅，但是允许投资者获得大部分的上行利润。这个静态的对冲就像一个保险合同：支付期权金的好处是保证股票价值不会低于某个最小值（如果选择的期权 $K=S_0$，那么期权加股票的最小价值正好是股票现在的价格）。

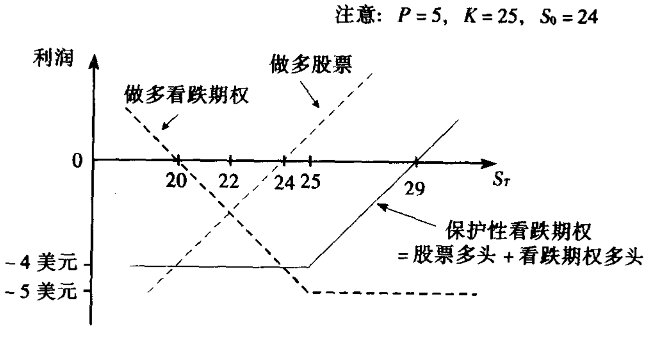


图 10—15　保护性看跌期权策略

使用看跌期权对股票头寸进行 DELTA 对冲

上面的静态股票—看跌期权对冲不保证这个组合的价值始终不变。它只是保证到期日时组合价值有一个下限。然而，通过使用期权进行 delta 对冲，我们可以连续性地维持组合的价值。这里我们使用看跌期权。我们需要使股票头寸价值的变化刚好被看跌期权价格的变化抵消掉。假设我们以 S_0 持有 N_s 股股票，那么股票的总价值是 $\mathrm{TVS}=N_sS_0$。一个包含 N_s 股股票加上 N_p 个看跌期权（$z=100$ 是每一份期权合约中的股票数）的组合在任意 $t>0$ 时的价值是

$$V=N_sS+N_p(zP) \tag{10.7}$$

股票和看跌期权的动态对冲策略要求

$$\frac{\partial V}{\partial S}=N_s+N_pz\Delta_p=0 \tag{10.8}$$

因为 $\Delta_p<0$，对冲组合中每持有一股股票，就要买入 N_p 个看跌期权：

$$\begin{aligned} N_p &= -\frac{N_s}{z\Delta_p} \\ &= -\frac{\mathrm{TVS}_0}{(zS_0)\Delta_p}=-\frac{\mathrm{TVS}_0}{(\mathrm{FVO})\Delta_p} \end{aligned} \tag{10.9}$$

其中，$\mathrm{FVO}=zS_0$ 为每一个（看跌）期权合约的“票面价值”。上面的公式保证了股票现价和看跌期权价格之间具有负相关关系。假如投资者是 $N_s=800$ 股股票的多头，$S_0=10$ 美元/股，那么 $\mathrm{TVS}_0=8\ 000$ 美元，如果 $\Delta_p=-0.4$，那么需要买入 $N_p=20$ 份看跌期权合约，以对标的股票价格的微小变动对冲。当然，当期权的 delta 随时间变化时（因为 S，r，σ 和 T 的变化），那么组合头寸需要调整。从理论上来说，对某只股票的动态对冲会消除这只股票的独特风险。因为 delta 对冲只适用于股票价格的微小变化，所以“股票＋看跌期权”组合的价值没有对冲掉股票价格大幅变化的风险（gamma 风险）和波动率变化带来的风险（vega 风险）。

比率价差

上面我们已经看到如何通过股票和（看跌）期权建立 delta 中性（即无风险）组合。与此类似，如果你已经持有了期权多头，那么你可以通过把两种（或更多种）期权组合起来而创造出合成的“delta 中性”（无风险）期权组合。后者引入了一种称为**比率价差**（ratio spread）的交易，交易员可以通过它尝试从期权的错误定价中赚取利润。

下面的分析同时适用于看涨期权和看跌期权，惟一的要求是我们知道期权的 delta 值。例如，两个股票期权因为不同的执行价和到期日而具有不同的 delta 值。期权合约的乘数是 z。一个包含 N_1 个期权 1 和 N_2 个期权 2 的组合的价值是

$$V=(N_1O_1+N_2O_2)z \tag{10.10}$$

其中，O_1 和 O_2 为看涨期权或看跌期权的价格。对于价值变化为零的组合：

$$\frac{\partial V}{\partial S}=O \Rightarrow N_1\Delta_1+N_2\Delta_2=O$$

因此

$$N_1=-\frac{\Delta_2}{\Delta_1}N_2 \tag{10.11}$$

假设我们已经持有一个裸露头寸，包括 $N_2=10$ 个“期权 2”。假设 $\Delta_2=0.5$，我们担心期权头寸会因股票价格微小变化而承受风险。那么，如果一个“看涨期权 1”的 $\Delta_1=0.25>0$，我们可以通过出售 $N_1=20$ 个期权 1 来构造出 delta 中性的期权组合。如果期权 1 是一个看跌期权（$\Delta_1=-0.25<0$），那么“无风险”的 delta 中性头寸将包括买入 $N_1=20$ 个看跌期权 1。

现在考虑一种情况，一个交易员认为 $\Delta_2=0.5$ 的期权 2 被低估价格。他可以通过持有 $N_2=10$ 个期权和卖空 $N_1=0.5(10)=5$ 股股票（记住标的股票的 delta 值为 1）来构造出 delta 中性组合。如果期权定价是正确的，那么这个（调整的）对冲头寸价值不会随 S 的上升或下降而改变。但如果期权价格被低估，我们会期望这个错误定价被很快纠正。然而，因为整个组合是 delta 中性的，交易员可以因为市场对错误定价的纠正而获得无风险利润。

为进行上述套利交易，需要卖空标的股票，这有时会因为“上移规则”（你只能在股票价格上升时进行卖空）而无法完成，而且这个交易因为高比例的卖空保证金（比如 50%）而很昂贵。不过我们还有其他办法。这个交易员可以买入 N_2 个被低估的期权 2，同时买入（或卖出）$N_1=-(\Delta_2/\Delta_1)N_2$ 个另一种期权 1。这被称为**比率价差**。如果期权定价正确，该组合是无风险的（如果我们忽略 gamma 和 vega 风险），当期权 2 价格最终上升到它的真实价值时，这个交易员就可以得到无风险的利润。

10.5 股票指数期权

股票指数期权（SIO）经常用来对冲一个分散化股票组合的系统（市场）风险。因此基金经理使用股票指数期权来对冲他的组合的市场风险，而让组合只受到个别风险的影响，当然这要基于他是一个好的“股票挑选者”，即他能从具有相同风险等级的股票中选中表现最好的一些。为了理解对冲的过程，需要先学习一些股票指数期权的合约细则，我们主要集中于 S&P100（美式）和 FTSE100（欧式）合约。S&P100 指数期权通常用它的交易符号 OEX 来表示，它是 CBOE 中交易最活跃的期权。

合约规范

股指期权由现金清算。如果现在指数是 S 点，每一个指数点的价值是 z 美元，那么一个指数期权合约（标的资产）的票面价值 $FVO=zS$ 美元。对于 S&P100 指数期权，$z=100$ 美元（见表 10—1），因此，如果指数 $S=200$，一份股指期权合约的票面价值是 $FVO=20\ 000$ 美元。换个说法，如果 $FVO=20\ 000$ 美元，那么标的于 S&P100 的一份股指期权合约和头寸比例与 S&P100 相同的 20 000 美元的标的股票相关联。

表 10—1　S&P100（美式，OEX）指数期权——CBOE

交易单位	100 美元×S&P100 指数
到期月	4 个近期月份（加上 3 月份循环的 1 个附加月）
最小价格变动	对于 3 之下的交易系列，最小刻度是 1/16；对于其他系列是 1/8
刻度规模（和价值）	1/16（6.25 美元）或是 1/8（12.5 美元）
执行	美式。可以在到期日之前任意交易日执行
交割日	根据执行日的收盘指数价值现金交割
最后交易日	到期日之前的交易日
交割	对于看涨期权多头，按照美元现金交割，(S_T-K) ×100 美元

资料来源：CBOE 网站。

股指期权合约通过现金清算，清算“价格”S_T 是收盘时的指数价值。如果到期日 $S_T=200$（指数点），看涨期权的执行价是 $K=210$（指数点），那么看跌期权的多头将收到：

$$\text{收益美元}=z(K-S_T)=100\text{ 美元}(210-200)=1\,000(\text{美元})\tag{10.12}$$

看涨期权和看跌期权的价格也都按指数点报价。对于 S&P100，Aug-760 看涨期权，报纸报价（指前一天的交易）是 $C=44$（指数点）意味着一个看涨期权价值 4 400 美元（=100 美元×44），见图 10—16。因此

$$\text{一份 S\&P100 看涨期权合约的票面价格}=C\times z\tag{10.13}$$

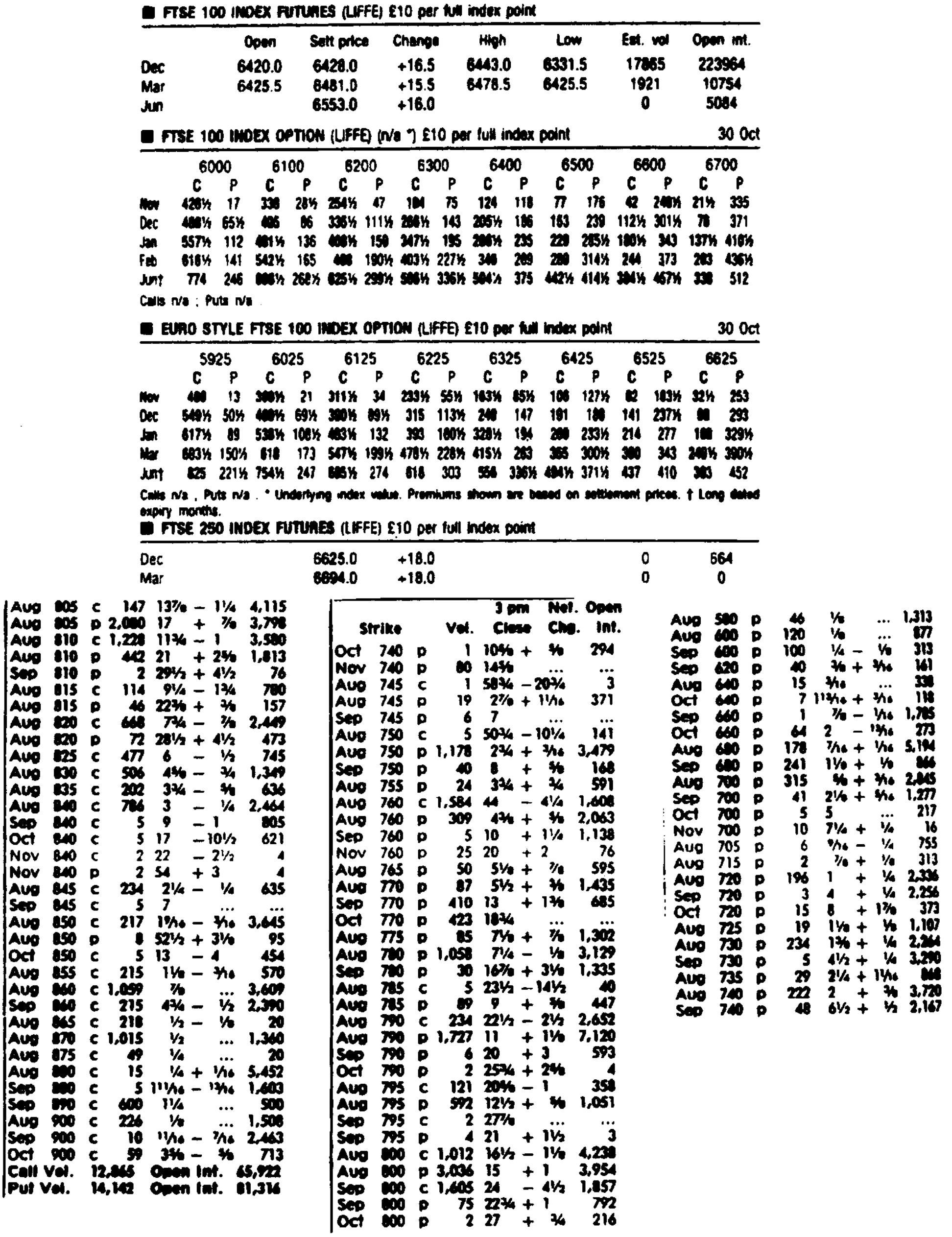
相应地 Aug-760 看跌期权的票面价格是 437.5 美元（$=4\frac{3}{8}\times100$ 美元）。其他的指数期权还包括：S&P500（CBOE 交易的欧式期权），主要市场指数（Major Market Index，交易于 AMEX），Value Line Index（在 PHLX 交易）和 NYSE 综合指数（NYSE Composite，在 NYSE 交易）。在美国还有各类行业指数交易（如石油、设备、计算机技术等行业）。

对于 FTSE100 指数期权（见表 10—2），一个指数点的价值是 10 英镑。因此，如果 FESE100 指数是 6 100，那么一份合约的票面价值是 FVO=61 000 英镑。报纸对于期权的报价（见图 10—16）是以指数点的方式。$P=28\frac{1}{2}$等价于票面价格 285 英镑（=10 英镑×28.5）。看跌期权价格较低，是因为 10 月 31 日指数点 $S=6\,388$，Nov-6 100 正处于虚值状态。

用股指期权进行对冲

假设你现在持有总价值为 $\text{TVS}_0=400\,000$ 美元的股票组合，它的组成与 S&P100 相同（即你的组合 $\beta=1$），你担心未来股票价格会下跌，那么你可以通过购买看跌期权来控制下行风险。这是一个**保护性看跌期权**。如果 S&P100 指数当前位于 $S_0=200$，那么总指数价值为 20 000 美元（$=zS_0=100$ 美元×200），因此一个**看跌期权合约的票面价值**是 $\text{FVO}=zS_0$。因此，你应该买入 $N_p=400\,000/20\,000=20$ 份看跌期权合约（假设所选的执行价 $K=200$，即平价看跌期权）。

因为期权是以指数点为单位报价的，解决本问题的另一个方法是使用指数点。注意到你的股



■ FTSE 100 INDEX FUTURES (LIFFE) £10 per full index point

	Open	Sett price	Change	High	Low	Est. vol	Open int.
Dec	6420.0	6428.0	+16.5	6443.0	6331.5	17865	223964
Mar	6425.5	6481.0	+15.5	6478.5	6425.5	1921	10754
Jun		6553.0	+16.0			0	5084

■ FTSE 100 INDEX OPTION (LIFFE) (n/a *) £10 per full index point 30 Oct

	6000		6100		6200		6300		6400		6500		6600		6700	
	C	P	C	P	C	P	C	P	C	P	C	P	C	P	C	P
Nov	428½	17	338	28½	254½	47	184	75	124	118	77	176	42	240½	21½	335
Dec	488½	65½	406	86	336½	111½	266½	143	205½	186	163	239	112½	301½	78	371
Jan	557½	112	481½	136	408½	159	347½	195	280½	235	220	285½	180½	343	137½	416½
Feb	616½	141	542½	165	468	190½	403½	227½	340	269	280	314½	244	373	203	436½
Jun†	774	246	686½	262½	625½	299½	566½	336½	504½	375	442½	414½	384½	467½	338	512

Calls n/a ; Puts n/a

■ EURO STYLE FTSE 100 INDEX OPTION (LIFFE) £10 per full index point 30 Oct

	5925		6025		6125		6225		6325		6425		6525		6625	
	C	P	C	P	C	P	C	P	C	P	C	P	C	P	C	P
Nov	488	13	388½	21	311½	34	233½	55½	163½	85½	108	127½	82	183½	32½	253
Dec	549½	50½	468½	69½	380½	89½	315	113½	248	147	191	188	141	237½	98	293
Jan	617½	89	538½	108½	463½	132	393	160½	328½	194	280	253½	214	277	188	329½
Mar	683½	150½	618	173	547½	199½	478½	228½	415½	263	365	300½	380	343	248½	390½
Jun†	825	221½	754½	247	685½	274	618	303	556	336½	484½	371½	437	410	383	452

Calls n/a , Puts n/a . * Underlying index value. Premiums shown are based on settlement prices. † Long dated expiry months.

■ FTSE 250 INDEX FUTURES (LIFFE) £10 per full index point

	Open	Sett price	Change	High	Low	Est. vol	Open int.
Dec		6625.0	+18.0			0	664
Mar		6694.0	+18.0			0	0

Aug	805	c	147	13 7/8	– 1 1/4	4,115
Aug	805	p	2,080	17	+ 7/8	3,798
Aug	810	c	1,228	11 3/4	– 1	3,580
Aug	810	p	442	21	+ 2 5/8	1,813
Sep	810	p	2	29 1/2	+ 4 1/2	76
Aug	815	c	114	9 1/4	– 1 3/4	780
Aug	815	p	46	22 3/8	+ 3/8	157
Aug	820	c	668	7 3/4	– 7/8	2,449
Aug	820	p	72	28 1/2	+ 4 1/2	473
Aug	825	c	477	6	– 1/2	745
Aug	830	c	506	4 5/8	– 3/4	1,349
Aug	835	c	202	3 3/4	– 5/8	636
Aug	840	c	786	3	– 1/4	2,464
Sep	840	c	5	9	– 1	805
Oct	840	c	5	17	– 10 1/2	621
Nov	840	c	2	22	– 2 1/2	4
Nov	840	p	2	54	+ 3	4
Aug	845	c	234	2 1/4	– 1/4	635
Sep	845	c	5	7	...	...
Aug	850	c	217	1 9/16	– 3/16	3,645
Aug	850	p	8	52 1/2	+ 3 1/8	95
Oct	850	c	5	13	– 4	454
Aug	855	c	215	1 1/8	– 3/16	570
Aug	860	c	1,059	7/8	...	3,609
Sep	860	c	215	4 3/4	– 1/2	2,390
Aug	865	c	218	1/2	– 1/8	20
Aug	870	c	1,015	1/2	...	1,360
Aug	875	c	49	1/4	...	20
Aug	880	c	15	1/4	+ 1/16	5,452
Sep	880	c	5	1 11/16	– 13/16	1,603
Sep	890	c	600	1 1/4	...	500
Aug	900	c	226	1/8	...	1,508
Sep	900	c	10	11/16	– 7/16	2,463
Oct	900	c	59	3 5/8	– 5/8	713
Call Vol.			12,865	Open Int.		65,922
Put Vol.			14,142	Open Int.		81,316

Strike			Vol.	3 pm Close	Net. Chg.	Open Int.
Oct	740	p	1	10 5/8	+ 5/8	294
Nov	740	p	80	14 5/8	...	...
Aug	745	c	1	58 3/4	– 20 3/4	3
Aug	745	p	19	2 7/8	+ 11/16	371
Sep	745	p	6	7	...	...
Aug	750	c	5	50 3/4	– 10 1/4	141
Aug	750	p	1,178	2 3/4	+ 3/16	3,479
Sep	750	p	40	8	+ 5/8	168
Aug	755	p	24	3 3/4	+ 3/4	591
Aug	760	c	1,584	44	– 4 1/4	1,608
Aug	760	p	309	4 3/8	+ 5/8	2,063
Sep	760	p	5	10	+ 1 1/4	1,138
Nov	760	p	25	20	+ 2	76
Aug	765	p	50	5 1/8	+ 7/8	595
Aug	770	p	87	5 1/2	+ 5/8	1,435
Sep	770	p	410	13	+ 1 3/8	685
Oct	770	p	423	18 3/4	...	...
Aug	775	p	85	7 1/8	+ 7/8	1,302
Aug	780	p	1,058	7 1/4	– 1/8	3,129
Sep	780	p	30	16 7/8	+ 3 1/8	1,335
Aug	785	c	5	23 1/2	– 14 1/2	40
Aug	785	p	89	9	+ 5/8	447
Aug	790	c	234	22 1/2	– 2 1/2	2,652
Aug	790	p	1,727	11	+ 1 1/8	7,120
Sep	790	p	6	20	+ 3	593
Oct	790	p	2	25 3/4	+ 2 5/8	4
Aug	795	c	121	20 5/8	– 1	358
Aug	795	p	592	12 1/2	+ 5/8	1,051
Sep	795	c	2	27 7/8	...	...
Sep	795	p	4	21	+ 1 1/2	3
Aug	800	c	1,012	16 1/2	– 1 1/8	4,238
Aug	800	p	3,036	15	+ 1	3,954
Sep	800	c	1,605	24	– 4 1/2	1,857
Sep	800	p	75	22 3/4	+ 1	792
Oct	800	p	2	27	+ 3/4	216

Aug	580	p	46	1/8	...	1,313
Aug	600	p	120	1/8	...	877
Sep	600	p	100	1/4	– 1/8	313
Sep	620	p	40	3/8	+ 3/16	161
Aug	640	p	15	3/16	...	338
Oct	640	p	7	1 13/16	+ 3/16	118
Sep	660	p	1	7/8	– 1/16	1,785
Oct	660	p	64	2	– 13/16	273
Aug	680	p	178	7/16	+ 1/16	5,194
Sep	680	p	241	1 1/8	+ 1/8	866
Aug	700	p	315	5/8	+ 3/16	2,845
Sep	700	p	41	2 1/8	+ 5/16	1,277
Oct	700	p	5	5	...	217
Nov	700	p	10	7 1/4	+ 1/4	16
Aug	705	p	6	9/16	– 1/4	755
Aug	715	p	2	7/8	+ 1/8	313
Aug	720	p	196	1	+ 1/4	2,336
Sep	720	p	3	4	+ 1/4	2,256
Oct	720	p	15	8	+ 1 7/8	373
Aug	725	p	19	1 1/8	+ 1/8	1,107
Aug	730	p	234	1 3/8	+ 1/4	2,264
Sep	730	p	5	4 1/2	+ 1/4	3,290
Aug	735	p	29	2 1/4	+ 1 1/16	868
Aug	740	p	222	2	+ 3/8	3,720
Sep	740	p	48	6 1/2	+ 1/2	2,167

图 10—16　指数期权（《金融时报》和《华尔街日报》）

经《金融时报》和《华尔街日报》允许后复制。

票组合价值 $N_{s,0}=\mathrm{TVS}_0/S_0=2000$ 指数点。这意味着如果 S 下跌一个指数点，股票组合的价值将下跌 2 000 美元。你应购买的看跌期权的数量也应代表 2 000 个指数点，因此 N_p^*（指数单位）$=N_{s,0}$。每一指数点价值 $z=100$ 美元，这表明 $N_p=\mathrm{TVS}_0/zS_0=20$ 份看跌期权合约，因此

$$N_p=\frac{\text{（现货）组合的总价值}}{\text{指数点的价值}\times S_0}=\frac{\mathrm{TVS}_0}{zS_0}=\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVO}}=20 \tag{10.14}$$

表 10—2　　FTSE100（欧式）指数期权

交易单位	每指数点 10 英镑
到期月	3 月、6 月、9 月、12 月（加上附加月份，因此最近的 3 个月总是可以进行交易）
最小价格变动	0.5（指数点）
刻度规模（和价值）	0.5（5 英镑）
执行	最后交易日的 18：00 止
交割日	到期日后的第 1 个交易日
最后交易日	到期月的第 3 个星期五的 10：30（伦敦时间）

资料来源：LIFFE 网站。

如果指数下跌 10%到 $S_T=180$，那么你的股票组合的价值下跌 40 000 美元。但是你执行看跌期权可以每份合约获利 20 个指数点，那么 20 份合约可以获得利润 40 000 美元（=20 份合约×20 个指数点×100 美元/点）。这样，股票组合的损失恰好由看跌期权的利润所补偿。然而，我们还需要考虑期权价格。假设期权价格是 $P=5$ 个指数点。20 份看跌期权合约的成本是 4 000 美元（=20×100 美元×5 个指数点）。没有看跌期权的保护，你将损失 40 000 美元，使用看跌期权，你只是损失了看跌期权的期权金 4 000 美元。

从数学上看，你的“保护性看跌期权”组合在到期日的价值是（忽略期权金）

$$V_T=N_{s,o}S_T+N_p^*(K-S_T)=N_{s,o}K=\frac{\mathrm{TVS}_0}{S_0}K \qquad S_T<K \tag{10.15}$$

其中，我们使用了 $N_p^*=N_{s,o}=\mathrm{TVS}_0/S_0$。因为我们选择了平价的看跌期权，最终价值是 TVS_0（不考虑期权金），因此我们对组合实现了“完全的保险”。当然，如果 S&P100 指数上升，那么看跌期权在到期日分文不值，但是股票的价值将会上升，我们的损失只限于看跌期权的期权金。这种情况是不需要我们“保险”的。

静态对冲

然而，假如你的股票组合与市场指数并不是一对一地移动，那么看跌期权合约的数目必须根据组合的 beta 进行调整。因此

$$N_p=\frac{\mathrm{TVS}_0}{\mathrm{FVO}_0}\beta \tag{10.16}$$

股票组合在到期日的价值是 $S_{p,T}$（不是 S&P×100 指数的价值 S_T），通过使用 $S_{p,T}$，我们得到上式的结果。比如，$\beta=1.5$ 表明当 S&P100 指数 S 下跌时，S_p 的跌幅是 S 跌幅的 1.5 倍。因此我们需要通过系数 1.5 提高看跌期权的数量，因为它们的价值是建立在 S 而不是 S_p 基础之上的。

这是一个静态股票—看跌期权对冲策略，因为我们假设期权合约被持有至到期。它使组合的价值有一个下限，但又允许它有潜在的上行利润。

动态 delta 中性对冲

看跌期权与股票指数的价格变化并不是一对一的关系，为了维持股票组合在每一时点上的价

值，我们需要一个动态的对冲策略。利用我们对 delta 对冲的分析：

$$N_p = -\frac{N_s}{z\Delta_p} = -\frac{\text{TVS}_0}{(zS_0)\Delta_p} = -\frac{\text{TVS}_0}{(\text{FVO})\Delta_p} \tag{10.17}$$

另一方面，如果股票组合也不与市场指数一对一地移动，那么公式变成

$$N_p = -\frac{\text{TVS}}{\text{FVO}}\left(\frac{\beta}{\Delta_p}\right) \tag{10.18}$$

因此，如果 $\Delta_p = -0.5$，那么相比静态对冲，我们需要两倍多的期权合约。因为期权价格比标的股票指数移动得小，我们利用 Δ_p 来“纠正” N_p。因为股票组合与股票指数不是一对一地移动，我们用 β 来“纠正” N_p。我们要注意到保护性看跌期权的成本是最初看跌期权的成本（$=N_pzP$）加上当期权的 delta 值变化时调整组合的交易成本。

表 10—3 中给出了一个例子来说明 3 个月期静态对冲（即保护性看跌期权策略）和动态对冲（即使用看跌期权进行 delta 对冲）。在静态对冲中，看跌期权合约的数量用系数 1.5 来增加，因为股票组合要比市场（FTSE100）指数移动更多（即组合的 beta 是 1.5）。静态对冲持有至期权到期日（6 月份），总的看跌期权成本是 348 795 英镑。保护性看跌期权把下行风险控制在执行价 $K=4\ 450$（为了简便，我们假设选择了执行价等于最初股票指数价格的期权）。因此，最小的保险后价值是股票组合的当前价值，因为如果 $S_T<K$，股票组合的损失 S_T-S_0 刚好被看跌期权的利润 $K-S_T$ 所补偿。然而，潜在的上行利润仍然存在（见图 10—15）。看跌期权的期权金成本可以通过购买执行价低于 $K=4\ 450$ 的看跌期权来减少（但同时也减少了下行保护）。

表 10—3 **静态和动态对冲**

数据： 1997 年 3 月 15 日：
股票组合的价值 TVS=10 000 000 英镑
组合的 beta 值 $\beta=1.5$
当前 FTSE100 指数 $S_0=4\ 450$
6 月 4 450 看跌期权报价 $P=103$
一个指数点价值=10 英镑
6 月 4 450 看跌期权的 delta 值 $\Delta=-0.5$
注意，为了使问题简化，我们选择了 $K=4\ 450$，它与初始股票价格 S_0 相同。

问题： （1）在静态对冲中，对冲者应该买入多少看跌合约，保险的成本是多少？
（2）对于动态对冲，重复上述过程，包括看跌期权的初始成本。

答案： （1）静态对冲：$N_p=\frac{\text{TVS}_0(\beta)}{\text{FVO}}=\frac{10\ 000\ 000\ \text{英镑}(1.5)}{4\ 450(10\ \text{英镑})}=337$(份合约)
6 月看跌合约的成本$=(103\frac{1}{2})(10\ \text{英镑})=1\ 035$(英镑)
337 份看跌合约的总成本$=337(1\ 035\ \text{英镑})=348\ 795$(英镑)
比例成本$=(348\ 795\ \text{英镑}/10\ 000\ 000\ \text{英镑})100=3.48\%$
（2）动态对冲：$N_p=\frac{\text{TVS}(\beta)}{S(10\ \text{英镑})}\frac{1}{\Delta_p}=\frac{337}{0.5}=674$(份合约)
看跌期权的初始比例成本$=6.97\%$
注意，动态对冲涉及重新调整，因此包含额外的交易成本。

因为看跌期权的 $\Delta_p = -0.5$，一个 delta 中性头寸需要购买两倍的 June-4 450 看跌期权，因此该策略的初始成本是静态对冲成本 6.97%（初始股票组合价值的百分比）的两倍。动态对冲还有附加成本，因为在此后的 3 个月里，它要不断地调整头寸。静态对冲和动态对冲的成本都相对较高。

实际上，delta 对冲策略也不是没有风险的，因为股票组合的 beta 可能被错误估计。同时，期权价格的变化可能因为 S 的大幅变化（gamma 风险）和波动性变化（vega 风险）而与 delta 所给出的不一致。对大多数投资者而言，利用股指期权进行 delta 对冲比用股指期货对冲更加昂贵。我们在第 13 章组合保险中将会看到，如果投资者希望对“股票＋看跌期权”组合每一天的价值变化进行保险，那么动态对冲会更有用，因为这样做保证了股票在到期日的最小价值。

想推导出方程（10.18）需要点小技巧。让 S^* 作为代表股票组合的指数，那么 $\mathrm{d}S^*/S_0^* = \beta \mathrm{d}S/S_0$，最初组合的价值可以用 S_0 或是 S_0^* 来表示，因为 $\mathrm{TVS}_0 = N_{s,o}S_0 = N_{s,o}^* S_0^*$。对于 delta 对冲，“股票＋看跌期权”组合价值的变化是 $\mathrm{d}V = N_{s,o}^* \mathrm{d}S_0^* + N_p z \Delta_p \mathrm{d}S = 0$。利用 $\mathrm{d}S^*/S_0^* = \beta \mathrm{d}S/S_0$ 把 $\mathrm{d}S^*$ 替换掉，再把 $N_{s,o}^* S_0^* = \mathrm{TVS}_0$ 代入 $\mathrm{d}V$ 的表达式，就得到了方程（10.18）。

10.6　本章摘要

- **金融工程**使用不同期权（和期货）的组合来构造**合成证券**，它们有许多种不同的收益结构。例如，使用股票（或期货）、看跌期权和看涨期权中的两种资产，我们能构造出一种合成证券，它的收益与第三种资产的收益相同。这是看跌—看涨平价关系，其中“股票＋看跌期权”的收益与“看涨期权＋期货”（或“看涨期权＋国债”）相同。
- **价差策略**（如牛市和熊市价差套利、跨式价差、勒式价差和蝶式价差）允许投资者对许多种可能结果进行投机。相比期权的无保护头寸，这些**价差头寸通常具有更小的风险**，但与此同时，也降低了潜在的收益。
- **比率价差**允许投资者或 delta 对冲已有的期权头寸，或者从期权的错误定价中获得利润。
- **期权**可以**标的于单只股票**（如 AT&T）、**一组股票**（如石油业股票）或涵盖范围更广的**市场指数**（如 S&P500，FTSE100）。
- **标的于单只股票的期权**允许投资者在对冲期间消除掉股票的**独特风险**（通过持有至到期的静态对冲或是短期的动态对冲）。**看跌指数期权**允许投资者对一个分散化股票组合的市场风险进行保险。
- **静态股票—看跌期权对冲**提供了一个最小价值底限，同时有可能获得上行利润。**动态的股票看跌期权 delta 对冲**可连续地维持标的股票组合的价值，但是需要频繁地调整头寸。

章末练习

1. 你预期股票市场在今后 3 个月上升。买入看涨期权或是牛市价差的优点和缺点各是什么？
2. 什么是“保护性看跌期权”？为什么它与购买对股票组合的保险相似？（使用 $P=6$ 美元，

$S=164$ 美元，$K=165$ 美元。)

3. 对于包含相等数量股票多头和看跌期权多头的组合，它的到期日收益曲线和盈亏相抵价格都是什么？如果看跌期权 $K=164$ 美元，$P=6$ 美元，$S_0=162$ 美元，那么 $S_T=163$ 美元时利润是多少？

4. 现在股票价格是 $S_0=100$ 美元，一个看跌期权的执行价 $K=98$ 美元，价格为 $P=4$ 美元。那么对于到期日时的各种股票价格，来自保护性看跌期权的收益会怎样？谁会使用保护性看跌期权？

5. 一个跨式价差多头与一个蝶式价差空头的区别是什么？

6. 一个看跌期权的执行价 $K_1=35$ 美元，$P_1=4$ 美元。另一个看跌期权的执行价 $K_2=40$ 美元，价格 $P_2=8$ 美元。你如何利用这两种期权构造出牛市价差？对于到期日的不同股价，该策略的收益各是多少？

7. 一个看涨期权执行价 $K=50$ 美元，价格 $C=2$ 美元。一个看跌期权执行价 $K=50$ 美元，价格 $P=4$ 美元。那么一个跨式价差空头的收益会怎样？

第11章

外汇期权

学习目标

- 考察外汇期权的合约规范和看涨期权与看跌期权的收益。
- 分析用期货或期权对冲不确定性外汇收入的优点和缺点。
- 建立对外汇期权定价的 **Garman-Kohlhagen** 公式。
- 介绍一些非标准（奇异）的外汇期权。

11.1 合约规范

表 11—1 描述的是一些在费城股票交易所（PHLX）交易的外汇期权的合约规范。图 11—1 是 2000 年 7 月 27 日星期四这一交易日的报纸报价。大多数合同以美元为基准货币，期权金以每单位外汇多少美分进行报价，惟一的例外是日元合约以 1%美分报价。

表 11—1 外汇期权（PHLX）

A. PHLX 的外汇期权：

相对于美元的货币	合约规模	执行价增长（美元）	最小价格变化（美元）
英镑	£ 31 250	0.025	0.000 1(1 点)=3.125
德国马克	DM 62 500	0.050	0.000 1=6.25
日元	Yen 6 250 000	0.050	0.000 001=6.25
加元	CD 50 000	0.050	0.000 1=5.00

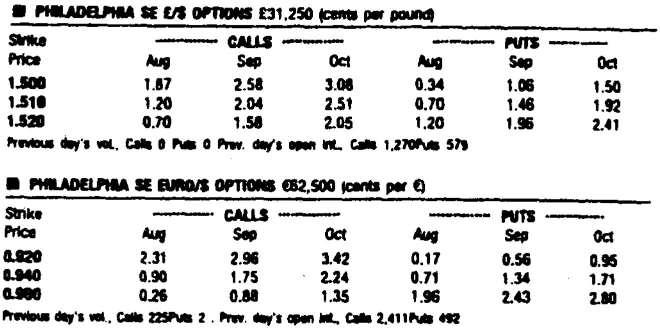
B. PHLX 的其他外汇期权：

货币	合约规模
美元/澳大利亚元	AUSD 50 000
美元/英镑	GBP 31 250
美元/加元	CND 50 000
美元/德国马克	DM 62 500
美元/欧元	Euro 62 500
美元/法国法郎	FF 250 000
美元/日元	Yen 6 250 000
美元/瑞士法郎	SFr 62 500
德国马克/日元	DM 62 500
英镑/德国马克	£ 32 500

注：(1) 有美式和欧式两种。

(2) 到期月是 3 月份循环加上最近两个月。

(3) 最后交易日是当月第 3 个星期三之前的星期五。



■ PHILADELPHIA SE £/$ OPTIONS £31,250 (cents per pound)

Strike Price	CALLS Aug	CALLS Sep	CALLS Oct	PUTS Aug	PUTS Sep	PUTS Oct
1.500	1.87	2.58	3.08	0.34	1.06	1.50
1.510	1.20	2.04	2.51	0.70	1.46	1.92
1.520	0.70	1.58	2.05	1.20	1.96	2.41

Previous day's vol., Calls 0 Puts 0 Prev. day's open int., Calls 1,270Puts 579

■ PHILADELPHIA SE EURO/$ OPTIONS €62,500 (cents per €)

Strike Price	CALLS Aug	CALLS Sep	CALLS Oct	PUTS Aug	PUTS Sep	PUTS Oct
0.920	2.31	2.96	3.42	0.17	0.56	0.95
0.940	0.90	1.75	2.24	0.71	1.34	1.71
0.960	0.26	0.88	1.35	1.96	2.43	2.80

Previous day's vol., Calls 225Puts 2 . Prev. day's open int., Calls 2,411Puts 492

图 11—1 合约规范《金融时报》

经《金融时报》同意后复制。

例如，英镑（GBP）的期权合约规模是 31 250 英镑，是以每英镑多少美分报价。7 月 26 日的现汇汇率为 1.5173 美元/英镑。图 11—1 第 1 列的报价分别是 1.500，1.510 和 1.520，但它们并不是所有可获得的执行价。对于一份 10 月—1.5200 美式看涨期权合约的报价是 2.05 美分/英

镑，因此每份合约的票面价值是 640.63 美元（31 250 英镑×0.020 5 美元/英镑）。

每种期权都有美式和欧式两种合约。一般说来，欧式期权合约都被注明，否则便是美式期权合约。在 PHLX，到期日是到期月的第 3 个星期三之前的星期六，有些合约在月底到期，被标以“EOM”。还有些外汇期权在几年后到期，有些（在美国股票交易所交易的期权）以外汇认股权的形式存在，大多数期权是以美元报价标的于英镑或日元的看跌期权。

在 PHLX 上有一些“标准化”的期权涉及交叉汇率。比如德国马克—日元期权，或是英镑—德国马克期权。除了标准化合约以外，PHLX 也有定制化的合约进行交易，它们可以由表 11—2 中任意两种货币组合而成（比如澳元—欧元）。除了交易所交易的期权，还有越来越多的场外交易外汇期权，客户可以购买具有不同到期日、规模和到期时间的期权合约，来对冲独特的外汇现金流。

表 11—2　　定制的外汇合约（PHLX）

货币	合约规模
澳大利亚元	AUSD 50 000
英镑	GBP 31 250
加元	CND 50 000
德国马克	DM 62 500
欧元	Euro 62 500
法国法郎	FF 250 000
意大利里拉	Lira 50 000 000
日元	Yen 6 250 000
墨西哥比索	Peso 250 000
西班牙比塞塔	Peseta 5 000 000
瑞士法郎	SFr 62 500
美元	$ 50 000

11.2　投机

看涨期权多头的利润

如同所有的期权一样，外汇期权可用来进行投机。多头具有有限的下行风险（期权金），然而提供了通过杠杆作用获得投机利润的可能性。下面我们对看涨期权或看跌期权多头的收益情况进行说明。如果持有至到期，看涨期权多头的利润是（见图 11—2）

$$\begin{aligned}\Pi &= \max(S_T-K,\ 0)-C \qquad (11.1)\\ &= -C \qquad \text{如果}\quad S_T\leqslant K\\ &= S_T-K-C \qquad \text{如果}\quad S_T>K\end{aligned}$$

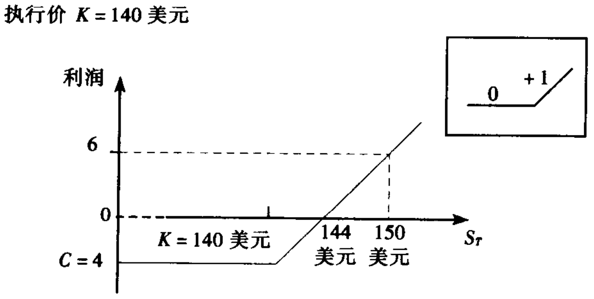


图 11—2　外汇看涨期权多头

相抵点的汇率是

$$S_{T,\mathrm{BE}}=K+C \tag{11.2}$$

英镑看涨期权的多头给予投资者以汇率 K 在到期日收到 $z_{\mathrm{op}}=31\ 250$ 英镑的权利。假设在 1 月份，标的于英镑的 3 月—140 看涨期权的价格是 $C=4.0$ 美分/英镑，即 0.04 美元/英镑。如果在 3 月到期时英镑的现价是 $S_T=1.50$ 美元/英镑（见图 11.2），那么：

$$\text{总利润}=(S_T-K)z_{\mathrm{op}}=(1.50\ \text{美元/英镑}-1.40\ \text{美元/英镑})31\ 250\ \text{英镑}=3\ 125(\text{美元}) \tag{11.3}$$

$$\text{每份合约的票面价格}=z_{\mathrm{op}}C=31\ 250\ \text{英镑}(0.04\ \text{美元/英镑})=1\ 250(\text{美元}) \tag{11.4}$$

每份合约的净利润是

$$\begin{aligned}\Pi&=(S_T-K-C)31\ 250\ \text{英镑}=(1.50-1.40-0.04)31\ 250\ \text{英镑}\\&=(0.06\ \text{美元/英镑})(31\ 250\ \text{英镑})=1\ 875(\text{美元})\end{aligned} \tag{11.5}$$

如果 $S_T<K$（$=1.40$ 美元/英镑），那么期权不会被执行，损失将是期权的期权金，更精确地说，就是每份合约的票面价格 1 250 美元。到期日的盈亏相抵汇率是

$$S_{T,\mathrm{BE}}=K+C=1.40+0.04=1.44(\text{美元/英镑})=144\ (\text{美分/英镑}) \tag{11.6}$$

很显然，正确的投机策略是：

> 如果你预期英镑升值，那么买入（看多）英镑看涨期权。

来自看跌期权多头的利润

一个英镑看跌期权多头给予投资者以执行价 K 美元/英镑卖出 31 250 英镑的权利。因此，如果英镑的现价在到期日贬值到 K 美元以下，投资者便从中获得利润（见图 11—3）。利润为

$$\begin{aligned}\Pi&=\max(K-S_T,\ 0)-P\\&=K-S_T-P &&\text{如果 } S_T<K\\&=-P &&\text{如果 } S_T\geq K\end{aligned} \tag{11.7}$$

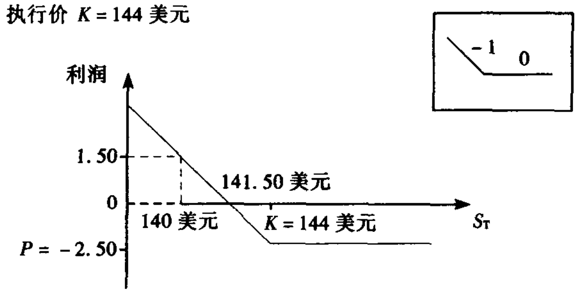


图 11—3　外汇看跌期权多头

盈亏相抵的即期汇率是（对于 $P=2.5$ 美分）：

$$S_{T,\mathrm{BE}}=K-P=1.44-0.025=1.44-0.025=1.415 \tag{11.8}$$

盈亏图如图 11—3 所示，对于 $K=1.44$ 美元/英镑，$S_T=1.40$ 美元/英镑，看跌期权的价格是 $P=0.025$ 美元（2.5 美分）：

$$\text{总利润}=(K-S_T)z_{\mathrm{op}}=(1.44-1.40)31\ 250\ \text{英镑}=1\ 250(\text{美元}) \tag{11.9}$$

$$\text{每份合约的票面价格}=P_{\mathrm{op}}=(0.025)31\ 250\ \text{英镑}=781.25(\text{美元}) \tag{11.10}$$

每份合约的净利润是

$$\begin{aligned}\Pi_T&=(K-S_T-P)31\ 250\ \text{英镑}=(1.44-1.40-0.025)31\ 250\ \text{英镑}\\&=0.015(31\ 250\ \text{英镑})=468.75(\text{美元})\end{aligned} \tag{11.11}$$

如果即期价格下降为零，那么最大利润是

$$\Pi_{\max}=K-P=1.44-0.025=1.415(\text{美元/英镑}) \tag{11.12}$$

每份合约的最大利润是 44 218.75 美元（=1.415 美元/英镑(31 250 英镑)）。因此正确的投机策略是：

如果你预期英镑贬值，那么买入（做多）英镑看跌期权。

当然，外汇看涨期权和看跌期权可以组合起来构成（到期时）更复杂的收益模式，比如前面章节所讨论过的跨式价差、勒式价差、蝶式价差、鹰式价差等。

11.3　对冲与外汇期权

在对冲中，外汇期权没有外汇期货应用广泛，但是当外汇的收入或支出不确定时，外汇期权确实是一种有用的对冲工具。

我们已经学习过，当投资者在（最近的）未来确定要收入或支出外汇时，外汇期货（或远期）是极其有用的。如果投资者可能在将来收到或者是需要支出外汇，但并不明确知道未来现金

流的头寸时，利用期权进行对冲是一个很好的选择。

例如，假设一个美国公司在进行一个项目投标，准备向英国提供坦克，但事先并不知道是否会中标，因此不确定将来是否能够收到英镑。又比如，一个美国投资者未来可能会收到外汇支付的外国股票红利，或是她可能在3个月后出售该股票得到外汇现金。对于可能收到的红利或是出售股票得到的收入，她都想在今天锁定一个确定的汇率。如果股票没有分红，或是她没有卖出股票，那么3个月后她并不需要这项外汇交易。

一家美国跨国公司正在就开拓国外市场的业务（比如直接投资）进行谈判，因此未来可能需要支出外汇，但是融资来自于美国的母公司。类似地，一个美国投资者考虑将来买入外国证券（股票或债券），这笔钱来自于预期的未来美元收入，她想锁定一个已知的汇率，如果美元收入确实如期而至，她会按计划进行，但如果这笔收入没有实现，她将放弃购买外国证券。以上各种情况下，都可以使用外汇期权，因为她给期权持有者以确定的汇率在未来进行汇兑的权利，但同时也允许持有者在不利情况下不履行期权合约。

我们考虑上面例子中投标坦克合同的美国公司。假设投标项目为1 250万英镑，现在的远期汇率是$F_0=1.62$美元/英镑，这相当于2 025万美元。为简化问题，假设这次投标成功，美国公司立即收到了$V=1\ 250$万英镑。现在考虑用远期、期权和期货等方法进行对冲。

使用远期进行对冲

如果我们忽略期货合同的基差风险和保证金的利息，使用远期和期货进行对冲会得到完全相同的结果，因此我们现在只考虑使用远期进行对冲的情况，在分析结束时，我们再考察期货的情况。如果这家美国公司通过在远期市场上以F_0出售英镑进行对冲，那么如果它投标失败，没有签下合同，就会出现问题。此时它有一个未保护的英镑远期合约空头，盈亏图是$\{-1,\ -1\}$。这家美国公司同意在远期市场上支付1 240万英镑来交换美元，如果英镑升值，那么$S_T>F_0$，它不得不从现货市场上以S_T的价格买入英镑，却只从远期合约中得到F_0（$<S_T$），因此这家公司可能因为这个远期空头而遭受巨大损失（$F_0-S_T<0$）。当然，如果竞标成功并且现货英镑贬值，这个远期空头会为公司带来利润，因为它可以从现货市场上以S_T的价格买入英镑，而从远期合约中收到F_0（$>S_T$），从而获得利润$F_0-S_T>0$。然而，关键是，如果竞标失败，这家美国公司在远期市场上有未平仓头寸，如果英镑现货升值，公司可能会遭受巨大损失。

使用看跌期权进行对冲

考虑另一种情况，公司利用期权进行对冲。我们考虑合约持有到期的静态对冲。如果竞标成功，公司将收到英镑。因此，他应该买入英镑的看跌期权，即以执行价K美元/英镑卖出英镑的权利。如果竞标成功，那么公司有“保护性看跌期权”，因为它的组合＝看跌期权空头＋英镑现货多头$=\{-1,0\}+\{1,1\}=\{0,1\}$，这相当于一手看涨期权。这样，公司可以得到上行利润，又对下行损失进行了保险。例如，如果竞标成功，英镑贬值，它可以执行期权，锁定执行价K。如果英镑升值，看跌期权可以不被执行，但是公司可以把来自合同收入的英镑以“高”现价S_T卖出。

然而，看跌期权的主要优点是竞标失败时，它限制了下行风险。如果竞标失败，公司有看跌

期权多头的裸露头寸，下行风险限制在看跌期权期权金之内，但是能在英镑贬值的情况获得利润。在最坏的情形下，竞标失败，英镑升值，看跌期权到期分文不值，公司所有的损失只是每手期权的期权金乘以所购期权的数量。但是，前面我们已经看到，如果公司使用远期合约空头对冲，英镑升值的话，它的潜在损失 F_0-S_T 可能非常大。

表 11—3 列出了没有对冲、使用远期对冲和使用看跌期权对冲几种策略在竞标成功/失败以及英镑升值/贬值等情况下的结果。期初的数据是：

表 11—3 **其他外汇对冲**

数据：
竞标价值$(V)=12\ 500\ 000$ 英镑　当前远期汇率$(F_0)=1.61$ 美元/英镑
初始即期汇率$(S_0)=1.60$ 美元/英镑
执行价格$(K)=1.60$ 美元/英镑　期权合约规模$(z_p)=31\ 250$ 英镑
看跌期权价格$(P)=0.025$ 美元/英镑　合约成本$(=z_pP)=781.25$ 美元
买入看跌合约的数量 $N_p=V/z_p=12\ 500\ 000$ 英镑$/31\ 250$ 英镑$=400$（份合约）
因此，注意到 $V=N_pz_p$
N_p 份看跌合约的成本$=N_p(z_pP)=VP=312\ 500$ 美元
即期价格的可能结果 $S_T=1.65$ 美元/英镑和 $S_T=1.50$ 美元/英镑

情景	(1) 没有对冲	(2) $F_0=1.61$ 的远期市场	(3) 看跌期权
A：竞标成功： （英镑升值） $S_T=1.65$	$\Pi=VS_T$ $=(12\ 500\ 000)1.65$ $=20\ 625\ 000$（美元）	$\Pi=VF_0$ $=(12\ 500\ 000)1.61$ $=20\ 125\ 000$（美元）	$S_T>K$，因此看跌期权没有执行，以 1.65 转换英镑： $VS_T=(12\ 500\ 000)1.65=20\ 625\ 000$（美元） 减去看跌期权的成本： $(N_pz_pP)=312\ 500$（美元） $\Pi=VS_T-N_p(z_pP)=V(S_T-P)$ $=12.5(1.65-0.025)$ $=20\ 312\ 500$（美元）
B：竞标成功： （英镑贬值） $S_T=1.50$	$\Pi=VS_T$ $=(12\ 500\ 000)1.50$ $=18\ 750\ 000$（美元）	$\Pi=VF_0$ $=(12\ 500\ 000)1.61$ $=20\ 125\ 000$（美元）	执行看跌期权： 看跌期权的收益＋标的即期利率 $=VS_T+(K-S_T)V=VK$ $=(12\ 500\ 000)1.60=20\ 000\ 000$（美元） 减去看跌期权成本： $N_p(z_pP)=VP=312\ 500$（美元） $\Pi=KV-N_p(z_pP)=V(K-P)$ $=19\ 687\ 500$（美元）
C：竞标不成功： （英镑升值） $S_T=1.65$	没有现金流。	以成本 $S_T=1.65$ 买入 12 500 000 英镑。 收到 $F_0=1.61$ $\Pi=(F_0-S_T)V$ $=(1.61-1.65)12\ 500\ 000$ $=-500\ 000$（美元）	看跌期权没有执行。 损失看跌期权的权利金： $\Pi=N_p(z_pP)=VP=312\ 500$（美元）

续前表

情景	(1) 没有对冲	(2) $F_0=1.61$ 的远期市场	(3) 看跌期权
D：竞标不成功： （英镑贬值） $S_T=1.50$	没有现金流。	以成本 $S_T=1.50$ 买入 12 500 000 英镑。 以 $F_0=1.61$ 收到 12 500 000 英镑 $\Pi=(F-S_T)V$ $=(1.61-1.50)12\ 500\ 000$ $=1\ 375\ 000$(美元)	以 $S_T=1.55$ 买入。 以 $K=1.60$ 执行看跌期权。 $\Pi=(K-S_T-P)V$ $=(1.60-1.50-0.025)12\ 500\ 000$ $=937\ 500$(美元)

竞标价值 $V=12\ 500\ 000$ 美元

当前远期汇率 $F_0=1.61$ 美元/英镑

当前即期汇率 $S_0=1.60$ 美元/英镑

执行价 $K=1.60$ 美元/英镑

合约规模（费城期权交易所）$z_p=31\ 250$ 英镑

看跌期权价格 $P=0.025$ 美元/英镑

每手看跌期权成本（$=z_pP$）$=781.25$ 美元

简单对冲比率＝现货市场头寸票面价值/合约规模

因此：

看跌期权数量 $N_p=(V/z_p)=(12\ 500\ 000$ 英镑$/31\ 250$ 英镑$)=400$(份合约)

N_p 手看跌期权成本$=N_p(z_pP)=VP=312\ 500$(美元)

其中，我们使用了 $V=N_pz_p$。对于即期价格 $S_T=1.65$ 美元/英镑或 $S_T=1.50$ 美元/英镑，下面我们考虑各种可能的结果。

没有对冲

显然，在“没有对冲”的情况下（见表 11—3 第 2 列），如果竞标成功，这家美国公司拥有英镑现货多头，如果英镑升值（贬值）它将获得利润（遭受损失）。收益将是 VS_T，当英镑升值为 $S_T=1.65$ 美元/英镑时，为 20 625 000 美元；当英镑贬值为 $S_T=1.50$ 美元/英镑时，为 18 750 000美元。如果竞标失败，将没有现金流入。

使用远期市场

以 $F_0=1.61$ 美元/英镑的价格在远期市场上出售英镑，意味着如果竞标成功，美元收入将是 $VF_0=12\ 500\ 000$ 英镑（1.62 美元/英镑）$=20\ 125\ 000$ 美元。如果竞标失败，这家美国公司是远期市场上的英镑空头。合约到期时，它必须在即期市场上以 S_T 的成本买入英镑，交割合约收到 F_0，它的收益是 $V(F_0-S_T)=12\ 500\ 000$ 英镑(1.61 美元/英镑-1.65 美元/英镑)$=-500\ 000$美元，是一笔损失。然而，如果竞标不成功，即期英镑贬值到 $S_T=1.50$ 美元/英镑，利润将是 $V(F_0-S_T)=12\ 500\ 000$ 英镑(1.61 美元/英镑-1.50 美元/英镑)$=1\ 375\ 000$ 美元。因此：

当竞标结果不确定时，使用远期（或期货）进行套期保值不能减小风险，因为你将有远期英镑的未平仓空头，你或是“赢”（当英镑贬值）或是“输”（当英镑升值）。

看跌期权多头（竞标成功）

现在考虑用看跌期权多头进行对冲的情况（见表 11—3 第 4 列）。如果竞标成功，你是看跌期权和英镑现货多头，这是一个保护性看跌期权（与看涨期权相似）。如果英镑升值，看跌期权到期分文不值，但是公司可以把它价值 $V=12\ 500\ 000$ 英镑的现金以“高”的即期汇率卖出，得到 $VS_T=20\ 625\ 000$ 美元，减去看跌期权成本 $N_p z_p P=VP=312\ 500$ 美元，最终利润是 $\Pi=V(S_T-P)=20\ 312\ 000$ 美元，这是保护性看跌期权的上行收益。当竞标成功，但是英镑贬值时，英镑收入 V（$=12\ 500\ 000$ 美元）的价值 VS_T 价值更少，但是看跌期权到期处于实值，收益为 $(K-S_T)z_pN_p=(K-S_T)V$，总收入为 $VS_T+(K-S_T)V=KV=1.60$ 美元/英镑(12 500 000 英镑)＝20 000 000 美元，独立于 S_T 的水平。净利润是 19 687 500 美元(＝20 000 000 美元减去看跌期权的成本 $N_p z_p P=VP=312\ 500$ 美元)。因此，当竞标成功时，英镑贬值后的利润是 $\Pi=V(K-P)=19\ 687\ 500$ 美元。

竞标成功：
如果 $S_T>K$，看跌期权价值为零：$\Pi=(VS_T)-N_p z_p P=V(S_T-P)$（上行收益）
如果 $S_T<K$，执行看跌期权：$\Pi=VS_T+(K-S_T)V-N_p z_p P=V(K-P)$（保险）

看跌期权多头（竞标失败）

考虑竞标失败时看跌期权多头的头寸情况。公司拥有裸露看跌期权的等价头寸。如果英镑升值，看跌期权没有被执行，但是公司的损失限于看跌期权的期权金，$\Pi=N_p z_p P=VP=312\ 500$ 美元。如果英镑贬值，看跌期权到期为实值，收入$(K-S_T-P)$美元/英镑 12 500 000 英镑＝(1.60 美元/英镑－1.50 美元/英镑－0.025 美元/英镑)12 500 000 英镑＝937 500 美元。注意，如果公司选择了比 162(等于远期汇率)更高执行价的看跌期权，这种策略将获得净利润$(K-S_T-P)$，可能比使用远期的情况还要高。然而，使用期权和期货进行对冲的关键区别是，即使在最坏的情况下（即竞标失败，英镑升值），使用看跌期权的最大损失也只限于期权金（乘以持有的看跌期权数量），这是在事先已知的。因此：

竞标失败：
如果 $S_T>K$，看跌期权价值为零：$\Pi=-N_p z_p P=-VP$（下行限幅）
如果 $S_T<K$，执行看跌期权：$\Pi=(K-S_T)V-N_p z_p P=V(K-S_T-P)$

无论竞标成功或失败，看跌期权多头限制了下行风险，同时允许获得上行收益。

使用期货

最后，为了完整地说明问题，我们考虑公司使用期货合约空头对冲的情况。如果持有期货合约到期，那么它与使用远期的结果相同。来自期货空头的利润是$(F_0-F_T)z_fN_f$ 美元，其中 z_f 是期货合约乘数(CME 的英镑期货是 62 500 英镑)。然而，为对冲头寸，期货合约空头的数量是$N_f=V/z_f$，因此，期货空头的利润是$(F_0-F_T)V$。进一步注意到，到期时 $F_T=S_T$，因此利润为(F_0-S_T)美元。如果竞标成功，那么净收入是 $VS_T+V(F_0-S_T)=VF_0$；如果竞标失败，净收入是$V(F_0-S_T)$，但这些结果和我们前面用远期得到的结果完全相同。

如果期货合同没有持有到期，而是在 $t=1$ 时平仓，那么情况就变得更加复杂了。期货空头的收益是：

竞标成功：$\Pi=VS_1+V(F_0-F_1)=V[F_0+(S_1-F_1)]$
竞标失败：$\Pi=V(F_0-F_1)$

如果基差风险$(=S_1-F_1)$很小，那么 VF_0 在第一个表达式中占优，利润接近 VF_0，它也是使用远期所得到的结果。如果竞标失败，期货空头的利润$=V(F_0-F_1)$将只在到期临近时(即 $F_1=F_T=S_T$) 才与我们使用远期所得结果$=V(F_0-F_T)$接近。然而，在实践中，为了减小基差风险，我们通常选择这样一份期货合约。

11.4 欧式外汇期权的估价

持有外汇就如同持有支付已知红利的股票。外汇的“股息”等于外汇的无风险利率 r_f。因为我们假设汇率 S 与股票具有相同的随机过程，我们可以把前文对看涨期权和看跌期权定价公式中的 q（股息收益）用 r_f 替换，因此

$$C=Se^{-r_fT}N(d_1)-Ke^{-r_dT}N(d_2) \tag{11.13}$$

和

$$P=Ke^{-r_dT}N(-d_2)-Se^{-r_fT}N(-d_1) \tag{11.14}$$

其中：

$$d_1=\frac{\ln(S/K)+(r_d-r_f+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2=\frac{\ln(S/K)+(r_d-r_f-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

即期汇率 S 是每单位外汇的美元数。例如，对于英镑的看涨期权，S 以美元/英镑（或美分/英镑）来衡量，这意味着 C 和 P 也都是美元/英镑。波动率（σ）是连续复利形式的汇率的年波动率 $\ln(S_t/S_{t-1})$。因为上述公式是 Black - Scholes 模型的扩展，它们只适用于欧式期权。美式期权有提前执行的可能，会比欧式期权价值更大，必须用数值方法来求解。上面的方程（Garman -

Kohlhagen，1983）可以进行一些简化，注意（与期权到期日相同的）远期汇率由下式给出：

$$F=Se^{(r_d-r_f)T} \tag{11.15}$$

其中，F 和 S 以每单位外汇的美元数来表示。这也可以被称为“每单位外汇的当前美元价格”。把公式(11.15)重新整理得

$$S=Fe^{-(r_d-r_f)T} \tag{11.16}$$

把公式(11.16)代入公式(11.13)和公式(11.14)，我们得到：

$$C=e^{-r_dT}[FN(d_1)-KN(d_2)] \tag{11.17}$$

$$P=e^{-r_dT}[KN(-d_2)-FN(-d_1)] \tag{11.18}$$

其中：

$$d_1=\frac{\ln(F/K)+(\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2=\frac{\ln(F/K)-(\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

上面关于 C 和 P 的公式非常容易使用（和编程序），表 11—4 给出了一个例子。找到看涨期权的价格以后，我们可以利用公式（11.18）直接求出看跌期权的价格，或者利用下边我们介绍的外汇期权的看跌—看涨平价关系求出看跌期权的价格。

表 11—4　　**对英镑看涨期权定价**

数据：

$S=142$ 美分/英镑　　$K=145$ 美分/英镑

$r_d=0.05$　　$r_f=0.09$

$\sigma=0.15$ （$\sigma^2=0.022\,5$）　　$T=0.137\,0$ （≈50 天）

问题： 英镑看涨期权的价格是多少？

答案：

$$d_1=\frac{\ln(142/145)+(0.05-0.09+0.022\,5/2)0.137\,0}{0.15\sqrt{0.137\,0}}=-0.447\,5$$

$d_2=d_1-0.15\sqrt{0.137\,0}=-0.447\,5-0.055\,5=-0.503\,0$

$N(d_1)=0.326\,4$

$N(d_2)=0.307\,4$

$C=142e^{-0.09(0.137\,0)}(0.326\,4)-145e^{-0.05(0.137\,0)}(0.307\,4)=45.780\,8-44.268\,7$

$=1.512\,1$ （美分/英镑）

看跌—看涨平价（欧式期权）

外汇期权的看跌—看涨平价关系可以与通过支付红利股票期权类似的方法得出。外汇利率等价于股票的红利。为得到看跌—看涨平价，首先建立两个组合，一个包含看涨期权，另一个包含看跌期权，它们到期时具有相同的收益。因为它们的收益相同，它们必须在今天具有相同的价

值。我们把美元作为本国货币，把英镑作为外汇，即期汇率为 S 美元/英镑。考虑组合 A：

组合 A：一手价格为 P 美元的看跌期权（执行价为 K）加上投资于外国债券的现金 $A=S_0e^{-r_fT}$ 美元。

如果 A 美元被转换成英镑（汇率为 S_0 美元/英镑），那么你得到 e^{-r_fT} 英镑，投资于支付 r_f 的零息票英镑债券，在 T 时刻将增值为 1 英镑。此时 1 英镑将价值 S_T 美元，S_T 是 T 时刻的汇率（见表 11—5）。现在考虑组合 B：

组合 B：一手价格为 C 美元的看涨期权（执行价为 K）加上面值为 K，现在价值为 Ke^{-r_dT} 的国内（美国）债券。

表 11—5　　看跌—看涨平价：货币期权

		当 $S_T>K$	当 $S_T<K$
组合 A⁽¹⁾：	现金	S_T	S_T
	看跌期权多头	0	$K-S_T$
	总和 A	S_T	K
组合 B⁽²⁾：	看涨期权多头	S_T-K	0
	美国国债（美元）Ke^{-r_dT}	K	K
	总和 B	S_T	K

注：(1) 组合 A=一手看跌多头加上 $S_0e^{-r_fT}$ 美元。

(2) 组合 B=一手看涨多头加上国内（美国）债券，今天价值 Ke^{-r_dT} 美元，S 以本国货币/外币衡量（美元/英镑）。

下面我们证明两个组合在到期日的收益相同，因此今天它们的价格也必然相同，这便得出了看跌—看涨平价条件：

$$P+S_0e^{-r_fT}=C+Ke^{-r_dT} \tag{11.19}$$

注意，在 T 时刻，投资于外国（英镑）债券的收益是 1 英镑或是 S_T 美元，国内（美国）债券的收益始终是 K。如果 $S_T>K$，那么看跌期权处于虚值，组合 A 收益是 S_T 美元。组合 B 的看涨期权收益是 S_T-K，加上来自国内债券的收益 K，总收益是 S_T，与组合 A 相同。相反，如果 $S_T\leqslant K$，那么组合 A 的看跌期权收益为 $K-S_T$，英镑债券收益为 1 英镑或是 S_T 美元，净收益是 K 美元。如果 $S_T<K$，组合 B 的看涨期权没有被执行，从国内债券得到收益 K 美元。因此组合 A 与组合 B 的收益相同。

11.5　其他货币期权

首先，我们应该知道关于某些货币的相当长期的期权在美国股票交易所交易，通常，它们被称为**货币认购权**（currency warrant）。货币衍生产品有许多种类，一些非常复杂的衍生产品叫做“奇异期权”。例如，如果利率在期权到期前任何时候上升到执行价以上，有些期权就会得到收益。还有的期权的收益是根据期权生命期中即期汇率的平均值（相对于执行价）进行计算的。这些期权被称为**亚式**（Asian）或**回顾期权**（lookback options）。

对于跨国公司来说，有一种期权非常有用，它包括很多国家的货币，被称为**一篮子期权**

(basket option)，这是一种场外期权。它的收益以美元相对于一篮子货币的总价值来表示。如果跨国公司有很多种货币的现金流入，它做空每种货币的期货或是买入每种货币的看跌期权会很昂贵。如果每种货币的波动并不完全相关，那么“一篮子”货币的波动率就要小于每种货币波动率的总和。一篮子期权的价格与它所包含的货币的波动率直接相关。因此，一篮子期权的成本比每一种汇率期权的成本之和要低。

如果跨国公司有两种货币收入，但可以用其中任一种货币支付债务，**可选择货币期权**（alternative currency option）就很有用了。例如，购买标的于德国马克和日元的可选择期权会获得美元收入，但是收益大小是根据表现更好或更差的货币。你可以购买标的于“更好”或“更差”结果的看涨期权或看跌期权。在到期日，如果德国马克的收益大于日元（或损失小于日元），那么标的于“更好”结果的看涨期权会支付美元/德国马克的汇率。如果跨国公司对持有德国马克和日元没有区别，那么它可以发行（卖出）“更好”结果的看涨期权，得到期权金。如果看涨期权被执行，跨国公司将交割德国马克，但可以用其他货币（如日元）支付债务。

11.6　本章摘要

- 所有主要货币都有相对于美元的**欧式或美式外汇期权**。同时有少量交叉利率期权存在（如德国马克—英镑，德国马克—日元）。货币期权的**场外交易非常活跃**，因为期权合约可以根据用户的需求进行合约规模、到期日、货币种类等的定制。
- 用做投机时，使用外汇期权可以获得**杠杆作用**。通常各种**金融工程**的结果（如跨式价差、勒式价差等）都可以通过使用不同期权组合得到。
- 当未来的外汇收入不确定时，外汇期权是最有用的**对冲**工具。与期货不同，外汇期权把损失控制在一定幅度之内（即保险），同时又不会消除所有的上行利润。
- 欧式期权的定价与支付红利股票的定价相似，由此我们得到 **Garman-Kohlhagen** 公式。

章末练习

1. 6 个月后，一家美国公司要为从德国进口的货物支付 200 万欧元或 300 万欧元（根据最终交割的是什么货物而定）。使用期货和期权进行对冲的优点和缺点各是什么？

2. 解释下面来自《华尔街日报》报价的关键条目。

费城期权交易所：

31 500 英镑—美分/每单位（8 月 19 日）

英镑	执行价	看涨期权（9 月）	看跌期权（9 月）
150.6	154	0.48	4.14

3. 你是一个美国的基金组合经理，2000 年时，你持有 25 家欧洲大公司价值 200 万欧元的股

票。你认为，由于新的欧洲中央银行含混不清的货币政策声明，未来 6 个月欧元将会下跌。你需要采取一种货币策略，如果你的预测正确，那么你会从中得益；如果预测错误，你也不会受到巨大损失。讨论使用期权和期货对于实现你的目标的相对优缺点。

4. 现在是 12 月 12 日，一家美国制造商预计获得芭比娃娃在德国的销售收入 50 万欧元，这笔收入将在 3 月份到账。3 月-102 欧元看跌期权价格是 6 美分/欧元，当前即期汇率是100 美分/欧元。合约规模是 62 500 欧元。对冲头寸是多少？

5. 瑞士法郎（CHF）1 月-62 欧式看涨期权和看跌期权都是 6 个月到期。当前即期汇率是 64，当前美元的无风险利率是每年 6%，瑞士法郎的是每年 3%。（所有的外汇报价均以美分/瑞士法郎给出）。USD—CHF 汇率的波动率是每年 20%。

(a) 计算（这些欧式期权）看涨期权和看跌期权的价格。

(b) 看涨期权的内涵价值和时间价值分别是多少？

(c) 看跌期权的内涵价值和时间价值分别是多少？

6. 9 月 26 日，费城股票交易所的英镑看涨期权和看跌期权的报价如下：

英镑	执行价格	看涨期权（12 月）	看跌期权（12 月）
144.0	140	5.10	—
144.0	145	—	2.5

所有报价按照美分/英镑给出。

当前即期汇率是 $S=144$。合约规模＝31 250 英镑。

(a) 分别画出看涨期权和看跌期权的盈亏图，注明到期日即期利率的盈亏相抵点。

(b) 假设你买入了英镑的一手看跌期权和一手看涨期权，请画出盈亏图（写清图中的关键元素是如何计算得来的）。如果到期的即期汇率是 150，此策略的利润是多少？

7. 一家美国公司向英国公司投标，提供价值 2 500 万英镑的芭比（和 Ken）娃娃。当前的即期（3 个月）和远期汇率是 $S=165$ 和 $F=162.4$ 美分/英镑。165-看跌期权现价是 $P=2.5$，160-看涨期权的现价是 $C=5.1$。两种期权都是 3 个月后到期，合约规模是 31 250 英镑，期权以美分/英镑报价。

如果竞标成功，这家美国公司 3 个月后将收到 2 500 万英镑。请说出当它竞标成功或失败时，在以下各种情况下的可能结果。3 个月后到期时即期价格可能为每英镑 168 美分或每英镑 150 美分。

(a) 没有对冲 ；

(b) 使用远期合约对冲；

(c) 使用期权对冲。

第12章

期货期权

学习目标

- 分析标的于期货合约的期权，或称为**期货期权**，包括报纸行情、交割和结算的程序。
- 考察期货期权的**收益**和**交易策略**以及**看跌—看涨平价**关系。
- 使用 **Black** 公式（Black's formula）对期货期权进行定价。
- 阐述标的于现货资产的期权和标的于期货合约的期权的相对优缺点。

期货期权的标的资产是期货合约。与标的于现货资产的期权相比，期货期权交割期货合约，而期货合约具有很好的流动性，可以用很低的成本进行平仓，因此期货期权有时比现货期权更有吸引力，特别是在对冲的时候。

12.1 市场惯例

一些最流行的期货期权标的于美国中长期的国债期货（CBOT）、欧洲美元期货（CME）和 EURIBOR 合约（LIFFE）。其他交易活跃的期货期权标的于日元（CME）、德国马克（CME）、加拿大元（CME）、原油和其他油制品（NYM）、黄金（CMX）、玉米（CBOT）和糖（CSCE）。图 12—1 是 2000 年 7 月 26 日星期三那天《华尔街日报》刊登的期货期权收盘价。

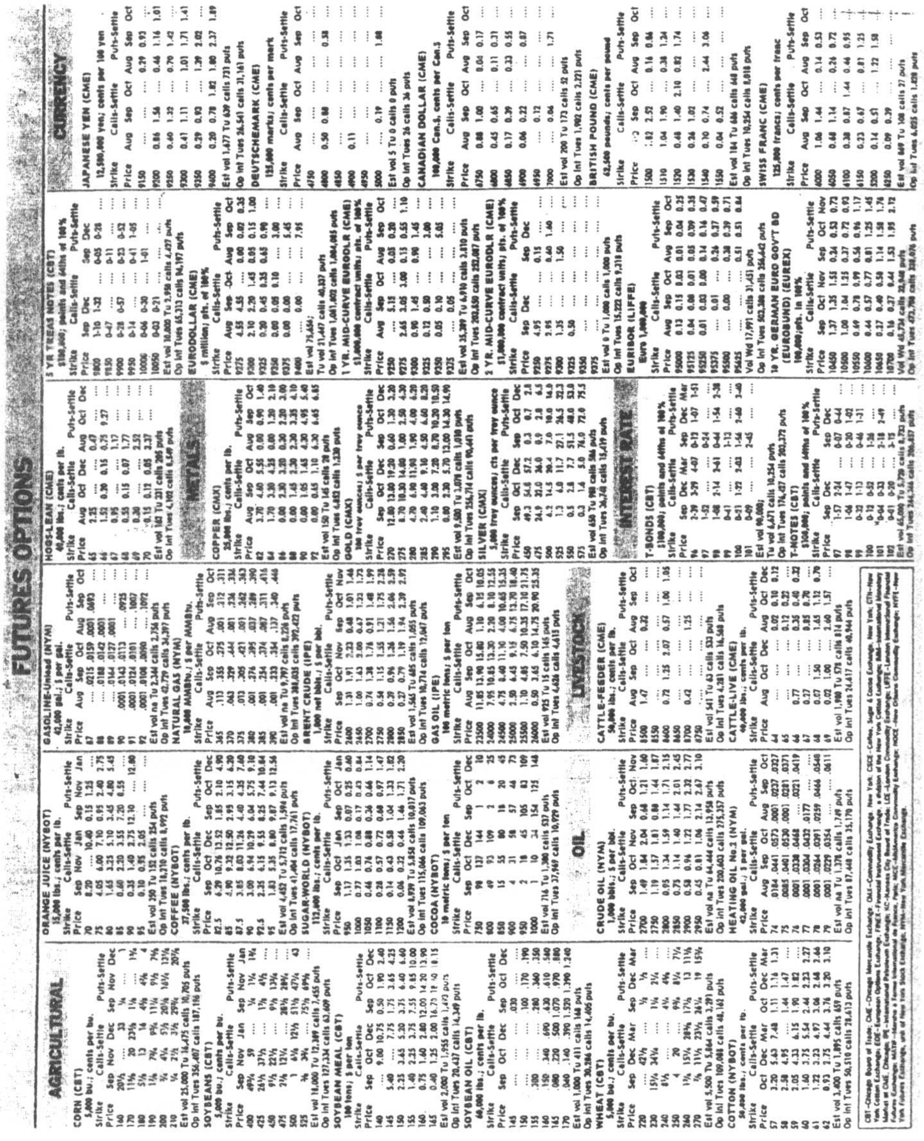

FUTURES OPTIONS
AGRICULTURAL
OIL
LIVESTOCK
METALS
INTEREST RATE
CURRENCY

图 12—1 期货期权《华尔街日报》

经《华尔街日报》允许后复制。

期货期权的到期日相当复杂，因为期权合约交割的是期货合约，它本身还有一个到期日。例如，**美国长期国债期货期权**（T-bond futures options）的到期日是“合约名称中月份”之前的月份。因此，10 月合约在 9 月到期，交割物是最近到期的期货合约。实际上，到期月恰好是期货合约到期月之前的那个月，到期日是月底之前的第 1 个星期五，到期日和月底之间必须有 5 个以上的工作日。另一方面，S&P500 期货期权在“合约名称中月份”到期。因此，10 月 S&P500 期货期权在 10 月到期，交割物是标的于 S&P500 的最近的期货合约（本例中是 12 月到期的期货)。图 12—1 中列出了具有不同执行价和到期月的期货期权收盘价。例如，9 月到期的**美国长期国债看涨期货期权**（CBOT）（见图 12—1 中“Interest rates：T-bonds”）的执行价是 $K=96$，期权报价是 2—39（“39”代表 39/64)。因此价格是每 100 名义美元 $C=2.609\ 375$。该期权到期时交割票面价值为100 000美元的期货，因此

长期国债期货期权的票面价格$=(2.609\ 375/100)100\ 000$ 美元$=2\ 609.38$(美元)

让我们看一下在到期日期货期权的情况。

> *如果看涨期权多头被执行，持有者获得标的期货合约（交割价为 K）的多头头寸加上数量为 F_T-K 的现金，其中 F_T 是期权到期时的期货价格。*
>
> *如果看跌期权多头被执行，持有者获得标的期货合约（交割价为 K）的空头头寸加上数量为 $K-F_T$ 的现金。*

例如，对于 9 月-100 看涨期货期权（见图 12—1），如果期货价格上涨到 $F_T=103$，那么到 9 月：

> *9 月-100 长期国债期货的看涨期权多头收到：*
>
> *以 $K=100$ 的价格得到一份长期国债期货合约和3 000美元的现金$=(103-100)(100\ 000$ 美元$)/100$。*

投资者需要支付期货多头的初始保证金，或者是把期货合约卖掉。到期时，这个看涨期权的出售者的保证金账户被减去3 000美元，而且还要满足期货本身的保证金需求，因为她也“继承”了价格为 $K=100$ 的国债期货的空头。如果到期时 $F_T<K$，那么看涨期权不被执行，出售者保留了期权的期权金。

当 $K>F_T$ 时，看跌期权将被执行。例如，执行 9 月-100 将使看跌期权的持有者成为价格为 100（=100 000美元）的国债期货的空头（加上数量为 $K-F_T$ 的现金)。同时，期货马上被盯市，如果要求的保证金没有到达账户，期货头寸将立即被平仓。看跌期权的出售者在到期日“继承”了价格为 100（100 000美元）的期货的多头，头寸也立即被盯市。

看涨期权和看跌期权的购买者都立即支付全额期权金。期权出售者要支付期权的保证金（就如现货期权一样)，保证金账户要逐日盯市。大多数期货期权是美式期权，因此可以提前执行。然而，对相似的欧式期权定价要相对容易一些。实际上，美式期权通常没有解析式的定价（封闭式)。

12.2 期权收益

标的于期货的美式看涨期权的最小价值是它的**内涵价值**（intrinsic value）：

$$C_a \geqslant \max[0, F-K] \tag{12.1}$$

如果看涨期权的价格 $C_a < F-K$，那么你可以以 C_a 的价格买入看涨期权，以 K 的价格立即执行，并把期货头寸以价格 F 立即平仓，你将得到净利润 $F-K-C_a>0$。类似地，美式看跌期权的最小价值是

$$P_a \geqslant \max[0, K-F] \tag{12.2}$$

当然，通常来说，因为正的“时间价值”，看涨期权和看跌期权的价格要大于这些最小价值。建立**欧式期货期权**（European futures options）的最小价格下限的最简单方法是利用标的于现货的欧式期权的下限

$$C_e(S) \geqslant S-K\mathrm{e}^{-rT} \tag{12.3a}$$

和

$$P_e(S) \geqslant K\mathrm{e}^{-rT}-S \tag{12.3b}$$

其中，$C(S)$表明我们处理的是标的于现货的期权。我们把底层的现货资产认为是股票，当然这个分析可以应用于股票指数、货币商品。例如，如果 $C_e(S) < S-K\mathrm{e}^{-rT}$，你可以“买低卖高”获得无风险利润。步骤是今天以 C 的价格买入看涨期权，并以 S 卖空股票。今天的净收益 $(S-C)$在 $t=T$ 时会增加到$(S-C)\mathrm{e}^{rT}$。那时，你可以执行期权，支付 K，把获得的股票还给经纪人。在 $t=T$ 时，净收益是$(S-C)\mathrm{e}^{rT}-K$，这与今天的$(S-C)-K\mathrm{e}^{-rT}$相等。根据我们的初始假设，后者要大于零。对于不支付红利的股票，我们有

$$F=S\mathrm{e}^{rT} \tag{12.4}$$

因此，欧式期货期权的下限是

$$C_e(F) \geqslant \max[0, (F-K)\mathrm{e}^{-rT}] \tag{12.5a}$$

和

$$P_e(F) \geqslant \max[0, (K-F)\mathrm{e}^{-rT}] \tag{12.5b}$$

当然，期货期权在到期日获得的收益是：

$$\text{来自看涨期权的收益} = \max[0, F_T-K] \tag{12.6a}$$

和

$$\text{来自看跌期权的收益} = \max[0, K-F_T] \tag{12.6b}$$

欧式期货期权的看跌—看涨平价

为了建立看跌—看涨平价，我们建立两个组合，它们在到期时回报相同，因此今天的价值也必然相同。这两个组合是：

组合 A：期货多头＋看跌期权多头

$$\{+1,+1\}+\{-1,0\}=\{0,+1\}$$

组合 B：看涨期权多头＋债券

$$\{0,+1\}+\{0,0\}=\{0,+1\}$$

两个组合的收益结构都是 $\{0,\ +1\}$。更具体地说，组合 B 中的零息票债券的面值是 $K-F$，因此今天的价值为 $(K-F)\ \mathrm{e}^{-rT}$。如果 $K>F$，那么这是债券的多头。如果 $K<F$，这是债券的空头（即我们发行面值为 $F-K$ 的债券，因此借到了现金）。两种情况下，到期时现金流是 $K-F$。到期日的收益如表 12—1 所示，两个组合的到期日收益相同。

表 12—1　　**看跌—看涨平价：期货期权**

组合	当前价值	在 T 时刻的收益	
		$F_T<K$	$F_T>K$
A：**期货多头**	0	F_T-F	F_T-F
看跌期权多头	P_e	$K-F_T$	0
期货多头＋看跌期权多头		$K-F$	F_T-F
B：**看涨期权多头**	C_e	0	F_T-K
债券	$(K-F)^{-rT}$	$K-F$	$K-F$
看涨期权多头＋债券		$K-F$	F_T-F

期货多头的收益是(F_T-F)，看跌期权的收益是 $\max[0, K-F_T]$。因此，组合 A 的收益是 F_T-F 或是 $K-F$。另一方面，$t=T$ 时，组合 B 中债券的面值为 $K-F$，而看涨期权多头的收益是 $\max[0,\ F_T-K]$。组合 B 的总收益是 F_T-F（当 $F_T>K$）或者 $K-F$（当 $F_T<K$），与组合 A 相同。两个组合在 T 时收益相同，那么今天的价值也必然相同。注意，合约开始时，期货多头的价值为零，因此

$$P_e=C_e+(K-F)\mathrm{e}^{-rT} \tag{12.7}$$

快速得出公式（12.7）的方法是利用底层资产 S 的看跌—看涨平价，即 $P+S=C+K\mathrm{e}^{-rT}$，并利用不支付红利的股票期货的价格 $F=S\mathrm{e}^{rT}$ 进行替换，便得出公式（12.7）。

12.3　期货期权的定价

对欧式期货期权的定价与利用 Black - Scholes 公式对欧式现货期权的定价非常相似，它们通过期货—现货的关系联系在一起（其中 T 是到期时间）：

$$F=S\mathrm{e}^{\alpha T} \tag{12.8}$$

参数 α 由持有成本决定。对于没有红利的股票期权，$\alpha=r$，对于支付连续红利的股票期权，$\alpha=r-\delta$，对于商品，$\alpha=r+$存储费用（每单位时间百分比）－便利收入百分比。可以用伊藤引理证明，如果 α 是时间的函数（但不是 S 或 r 的函数），S 的波动率是个常数，因此 $\sigma_F=\sigma_s=\sigma$。期货的价格可以被视为以速率 $q=r$ 支付连续红利的证券。因此，我们把支付连续红利股票的 Black -Scholes 公式中的 q 替换成 r，S 替换成 F，得到期货期权的 Black 公式（1976）：

$$C=[FN(d_1)-KN(d_2)]\mathrm{e}^{-rT} \tag{12.9a}$$

和

$$P=[KN(-d_2)-FN(-d_1)]\mathrm{e}^{-rT} \tag{12.9b}$$

其中：

$$d_1=\frac{\ln(F/K)+(\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\qquad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

很容易看出，公式(12.9a)和公式(12.9b)与支付红利股票的 Black - Scholes 公式一致，如果把 $F=Se^{(r-\delta)T}$对上面公式进行替换，就能得到底层资产的 Black - Scholes 公式。

利用 Black 公式对股票指数或货币的期货期权进行定价是比较合理的，但是，对于标的于利率相关证券的期货期权（如国债期货合约的期权），Black 公式中恒定利率（和波动率）的假设就站不住脚了（虽然许多情况下人们仍然应用 Black 公式）。

在第 9 章，我们利用 Black - Scholes 公式推导出了很多希腊字母，为了由此推出期货期权的希腊字母，我们只需把这些公式中的 S 都替换成 $F\mathrm{e}^{-rT}$。（当然，delta 和 gamma 都被定义为相对于期货价格 F 的变化，而不是相对于底层资产的价格变化。）

BOPM

我们知道如何应用 BOPM 对价格为 S 的底层资产的期权进行定价。现在，我们只需把这个分析再应用于期货价格，为便于说明问题，我们使用只有一个时期的期货期权。假设 $F_0=100$，$U=1.15$，$D=0.9$，那么期货价格的网格给出 $F_u=115$，$F_d=90$。执行价为 K 的期货看涨期权多头收益是 $C_u=\max[F_u-K,0]=15$，$C_d=\max[F_d-K,0]=0$。假设你在 $t=0$ 时以（未知的）价格 C 买入一个看涨期货期权，为建立无风险组合，你做空期货合约，因为 F 上升时，你可能从期货空头中受到损失，但是从看涨期权多头中获得利润。对每一个看涨期权，如果你做空 h 份期货合约，那么在 $t=1$ 时，收益将是

$$V_u=C_u-h(F_u-F_0)\tag{12.10a}$$

和

$$V_d=C_d-h(F_d-F_0)\tag{12.10b}$$

我们选择对冲比率 h 使得两个收益相等：

$$h=\frac{(C_u-C_d)}{(F_u-F_d)}=\frac{(15-0)}{(115-90)}=0.6\tag{12.11}$$

这个对冲组合在 $t=0$ 时的成本是看涨期权的价格 C，因为 $t=0$ 时，进入期货市场不需要任何成本。换一种说法，即持有一份期货合约的成本是零。因为这个由一个看涨期权多头和 h 份期货合约空头组成的组合是无风险的，那么我们必须获得无风险利率 $r=10\%$（连续复利），因此：

$$C\mathrm{e}^{rT}=V_u=C_u-h(F_u-F_0)\tag{12.12}$$

$$C\mathrm{e}^{0.10(1)}=15-0.6(115-100)$$

则 $C=5.428$。

我们可以把公式（12.11）中的 h 代入公式（12.12）中，整理后得到

$$C=\mathrm{e}^{-rT}[q^*C_u+(1-q^*)C_d]\tag{12.13}$$

其中：

$$q^*=\frac{(1-U)}{(U-D)}\qquad C_u=\max[0,F_u-K]\qquad C_d=\max[0,F_d-K]$$

公式（12.13）与现货期权的 BOPM 公式非常相似，惟一的区别在于风险中性概率 q^* 的定

义。在第 8 章，我们发现对于支付红利的股票期权，$q=(\mathrm{e}^{(r-\delta)T}-D)/(U-D)$。对于期货期权，我们知道期货的持有成本是零，可以让风险中性概率 q 的定义中 $\delta=r$。我们看到，如我们期望的一样，q 变成 q^*。因此，期货期权的 BOPM 定价公式可以通过底层资产的期权定价公式得到，只需令 $\delta=r$，用 F 代替 S。

我们可以把上述方法扩展到 n 时期的情况，对于欧式期货期权，这个过程非常简单，我们只需从 $t=n$ 沿着二叉树向 $t=0$ 递推。那么对于有提前执行可能的美式期货期权，应该怎样定价呢？考虑有两个时期的美式看涨期权。如果在节点 U，内涵价值 $\max[0,F_u-K]>C_u$，那么期权会被提前执行(C_u 是利用递推公式计算得到的看涨期权价格)，$C_u=\mathrm{e}^{-r}(q^*C_{uu}+(1-q^*)C_{ud})$。如果这种情况发生，我们把网格中的 C_u 替换成 F_u-K。上述计算也应用于节点 D，然后递推公式给出 $C=\mathrm{e}^{-r}(q^*Z_u+(1-q^*)Z_d)$，其中，$Z_u=\max[C_u,F_u-K]$，$Z_d=\max[C_d,F_d-K]$。这和第 8 章中用 BOPM 计算美式股票期权的价格的方法相同。

期货期权的 delta，gamma，vega 等希腊字母的计算方法与底层资产的期权计算的相应方法相同（细节见第 15 章和第 18 章）。BOPM 也可以用来对利率的期货期权进行定价，但这要求我们认识到利率在期权生命期内并不为常数。因此，利率期货期权有其他的问题需要解决，我们将在第 18 章中进一步说明。

期货期权与现货期权

如果期货期权是欧式的，与期货到期日相同，那么 $F_T=S_T$，欧式“现货期权”与期货期权是等价的。美式期权有提前执行的可能。对于不付红利的股票，$F=S\mathrm{e}^{rT}$，$F>S$，因此，美式看涨期货期权的价格要比同样的现货期权价格更高，即 $C_a(F)>C_a(S)$。同样道理，美式看跌期权的价格要比现货期权价格更低，即 $P_a(F)<P_a(S)$。当然，F 并不总是大于 S（例如，货币期货、支付红利的股票指数期货等），因此，我们不能把 $C_a(F)$和 $C_a(S)$之间的关系一般化。

12.4　交易策略

期货期权之所以流行，是因为：

- 期货市场的流动性要强于现货市场。
- 使用股票指数期货期权进行保险（对冲）的成本要低于使用股票指数期权。这一点对于农产品和金属的期货也成立，因为这些期权到期时交割的是期货合约，投资者可以以很低的成本对其平仓。相反，现货期权要交割标的资产，这样成本较高，也不方便。
- 在 CBOT 交易的现货期权的标的资产往往是在其他地方（比如对于股票和股票指数是在 NYSE）交易的。因此，在期货交易所拥有会员资格的个人不得不通过 CBOT 的经纪人来交易“现货期权”。但是期货期权的交易池一般与期货的交易池相邻，这就大大方便了期货期权和底层期货合约的交易。不过由于大多数市场转向电子化的交易模式，这一点已经越来越不重要了。

因为期货和现货一起移动，期货看涨期权的多头将构成投机（未平仓）头寸，这时投资

者预期牛市将要到来。如果投机者预期熊市将要到来，她将通过成为看跌期权的多头来获取利润。下面我们分别考虑几种情况。注意，期货期权的收益曲线与现货期权的收益曲线类似。

看涨期权多头

到期日的收益是

$$\begin{aligned}\Pi &= \max[0, F_T - K] - C \\ &= -C \qquad \text{如果 } F_T \leqslant K \\ &= F_T - K - C \quad \text{如果 } F_T > K\end{aligned} \tag{12.14}$$

期货价格的盈亏相抵点是 $F_{BE}=K+C$。如果期货和期权同时到期，回报将和现货期权完全相同。对于 S&P500 期货的看涨期权，合约乘数是 $z=250$ 美元，图 12—2 给出了 $K=475$ 的结果。

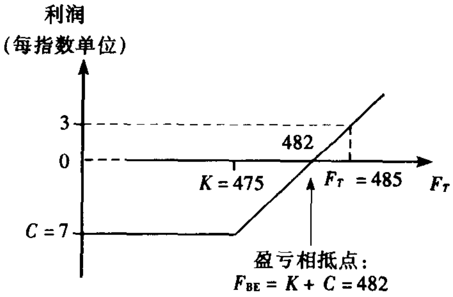


图 12—2　期货的看涨期权（S&P500，$K=475$）

看涨期权的价格是 $C=7$ 美元，一份合约的票面价格是 1 750 美元（$=250C$ 美元）。盈亏相抵点是 $F_{BE}=K+C=475+7=482$。如果到期时 $F_T=485(>K=475)$，那么每份合约的净利润是

$$\Pi=(F_T-K-C)250 \text{ 美元}=(485-475)250 \text{ 美元}=750(\text{美元}) \tag{12.15}$$

如果 $F_T<K=475$，那么看涨期权到期时价值为零，成本是看跌期权的价格 $C=7$，或者是每份合约的成本1 750美元（$=250C$ 美元）。

看跌期权多头

到期日的回报是

$$\begin{aligned}\Pi &= \max[0, K - F_T] - P \\ &= K - F_T - P \qquad \text{如果 } F_T < K \\ &= -P \qquad \text{如果 } F_T \geqslant K\end{aligned} \tag{12.16}$$

盈亏相抵点的期货价格是 $F_{BE}=K-P$。如果 $P=5$，那么票面价格是 $zP=1\ 250$美元。图 12—3 给出了到期时的收益曲线。如果 $F_T=462$ 美元，$K=475$ 美元，那么收益将是$(K-F_T-P)250=8(250)=2\ 000$美元。

有保护的看涨期权

如果期货价格下跌，持有期货多头是非常危险的。如果你同时出售了看涨期权，你可以通过

收取的期权金来减小一些损失。但是，如果期货价格下跌，你并没有完全消除下行的损失。考虑一个有保护的看涨期权，它的底层期货合约标的于 S&P500 指数。底层是期货多头的有保护看涨期权涉及：

有保护的看涨期权＝期货多头＋出售看涨期货期权

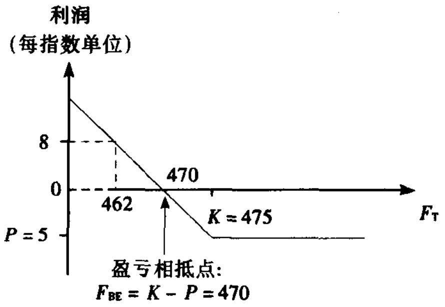


图 12—3 期货的看跌期权 (S&P500, K=475)

收益曲线是 {＋1，＋1} 加上 {0，－1}，最终的收益曲线是 {＋1，0}（见图 12—4)。如果期货价格上升，此策略并没有带来潜在的上行利润，因为此时看涨期权多头处于实值，因此出售的看涨期权造成了损失。如果期货价格下跌，看涨期权到期价值为零，因此期货多头的损失由于收取的（固定的）期权金而减小了一些。这样，下行损失就比单纯持有期货多头要小。期货多头与看涨期货期权空头的利润是

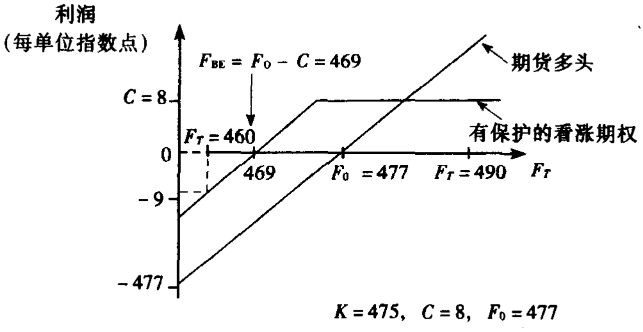


图 12—4 有保护的看涨期货期权

$$\Pi_f = F_T - F_0 \tag{12.17a}$$

和

$$\Pi_c = -\max[0, F_T - K] + C \tag{12.17b}$$

因此组合成的有保护看涨期权的收益是（图 12—4）

$$\begin{aligned}\Pi &= (F_T - F_0) - \max[0, F_T - K] + C \\ &= K - F_0 + C \qquad \text{如果 } F_T > K \\ &= F_T - F_0 + C \qquad \text{如果 } F_T \leqslant K\end{aligned} \tag{12.18}$$

注意，$F_T < K$ 时，F_T 才会影响到收益曲线。期权价格的盈亏相抵点是 $F_{BE} = F_0 - C$。图

12—4 给出了有以下数据的有保护看涨期权的收益：

$F_0=477$	$K=475$	$C=8$
期权到期时，期货价格或是 $F_T=490$ 或是 $F_T=460$。		

盈亏相抵的期货价格是

$$F_{BE}=F_0-C=477-8=469 \tag{12.19}$$

当 $F_T=490$（$>K=475$）时，看涨期权被执行，期权的出售者成为期货合约的空头方，净利润为

$$\Pi=K-F_0+C=(475-477)+8=6(\text{每份合约}) \tag{12.20}$$

对于标的于 S&P500 的期货期权，总利润是 1 500 美元（=250 美元×6）。如果 $F_T=460$（$<K=475$），看涨期权没有被执行，期权的出售者收到期权金 $C=8$ 美元。但是，期货多头的损失是$F_T-F_0=460-477=-17$，因此净利润是$\Pi=(F_T-F_0+C)=460-477+8=-9$(即损失)。

我们以前讨论过的所有现货期权的策略（如价差、跨式价差等）都可以应用于期货期权。例如，构造 delta 中性组合、动态对冲和组合保险。

12.5 本章摘要

- 标的于**期货的期权**或**期货期权**的标的资产是期货合约，买入（卖出）期货合约的权利是看涨期权（看跌期权）。期货期权的交易成本很低，因为它们不涉及标的资产的交割，在高流动性的市场上，期货合约很容易平仓。
- 最流行的**期货期权**标的于美国中长期的国债期货（CBOT）、欧洲美元期货（IMM）和 euro-LIBOR 合约（LIFFE）。其他交易活跃的期货期权标的于日元（IMM）、加拿大元（IMM）、原油和其他油制品（NYM）、黄金（CMX）、玉米（CBOT）和糖（CSCE）。
- **欧式期货期权**可以通过 Black - Scholes 公式的变形 Black 公式（1976）进行定价。后者可以用来定价股票指数、商品和货币的期货期权，但是对一些利率期货期权，它可能并不准确（因为 Black 公式假设恒定的利率和波动率）。我们可以从 Black 公式推导出希腊字母的表达式，它们可以用来对 F 和波动率的变化进行对冲。
- 我们可以使用 **BOPM** 对标的于股指期货、货币期货、农产品和金属制品期货的**欧式期权和美式期权**进行定价，这与我们利用 BOPM 对股票期权的定价十分相似。另外，我们可以通过二叉树网格计算出“希腊字母”，也可以通过网格计算出**利率期货期权**的价格，但这要求我们放松恒定利率的假设，我们将在第 18 章讨论此问题。

章末练习

1. 你对未来购买燃油进行对冲时，为什么使用燃油期货的看涨期权，而不是燃油的看涨

期权？

2. 从直观上看，原始的 Black - Scholes 期权定价公式（标的于以连续速率 δ 支付红利的股票 S）和期货期权的 Black 定价公式有什么联系？

习题 3 和习题 4 的数据：

美式期货期权还有 6 个月到期，执行价 $K=100$，期货现价 $F=98$，无风险利率 $r=12\%$，波动率 $\sigma=20\%$。

3. 利用 Black 公式计算看涨期权和看跌期权的价格。

4. 证明习题 3 中得到的（欧式）看涨期权和看跌期权的价格满足看跌—看涨平价关系。

习题 5、习题 6 和习题 7 的数据：

你持有期货合约看跌期权的多头。期货的现价是 $F_0=100$，未来的期货价格可能是 $F_u=115$ 或 $F_d=90$。期货期权的执行价是 $K=100$，到期时间 $T=1$，无风险利率是 10%（连续复利）。

5. 创建包含一个看跌期权和期货合约多头的无风险组合，从而利用 BOPM 计算看跌期权的价格。

6. 利用 BOPM 公式，计算欧式看涨期货期权的价格。

7. 证明上述看涨期权和看跌期权的价格满足看跌—看涨平价。

第13章

组合保险

学习目标

- 演示静态股票—看跌期权保险（static stock - put insurance）如何使股票组合的价值具有一个下限，却同时保持潜在的上行收益。
- 证明静态股票—看跌期权保险与包含看涨期权和短期国债的**复制组合**等价，这是看跌—看涨平价的实例。
- 分析**“股票＋看跌期权”**组合的每日价格波动如何通过**“股票＋期货”**组合或**“股票＋短期国债”**组合进行复制。这些复制组合头寸需要连续调整，因此这是**动态对冲**（dynamic hedge）。在复制组合的成本低于“股票＋看跌期权”组合的成本时，投资者会使用复制组合。
- 从直观上解释连续时间的动态组合保险的机制。

组合保险这个名词是指一些对冲策略，这些策略使组合的价值始终保持在某一水平之上，同时又保留向上升值的潜力。我们已经讨论过股票—

看跌期权保险的静态对冲策略，这一策略使组合在到期日的最低价值与看跌期权的执行价相等。此策略仍然保留了潜在的上行利润，这是因为如果到期日的现价大于执行价，那么看跌期权的价值为零，而对冲者却可以从股票的增值（减去固定的期权金）中获得利润。然而，实际操作中，股票—看跌期权保险有一些缺点：

- 养老基金和开放基金经理需要的对冲期有时很长，使用股票指数期权对冲就不得不采用向前滚动的策略，这样成本就会很高。
- 市场上大多数股票指数期权是美式的，期权金里包含了提前执行权利的溢价。具有固定对冲期的组合经理不愿担负这部分成本。
- 清算所的头寸限制使组合经理们无法使用股票指数看跌期权建立最优对冲头寸。

因为上述问题的存在，投资者往往使用其他方法来复制股票—看跌期权保险。这些合成的股票—看跌期权头寸可以通过等价的复制组合构成。这些组合保险方法的最初提出者是 Leland 和 Rubinstein（Leland，1980；Rubinstein，1985；Rubinstein 和 Leland，1981）。

采用组合保险的一个关键问题是，头寸是被持有至到期日，还是被动态地调整。前者被称为**静态对冲**（static hedge），后者被称为**动态对冲**（dynamic hedge）。从看跌—看涨平价中，我们知道“股票＋看跌期权”组合等价于“看涨期权＋短期国债（即零息票债券）”组合。因此，我们可以使用看涨期权和短期国债的复制组合（replication portfolio）来进行股票—看跌期权保险。我们将会看到，股票—看跌期权组合（在到期前）的价格变化可以用“股票＋短期国债”或“股票＋期货”进行复制，这通常被称为**动态组合保险**（dynamic portfolio insurance）。在 1987 年股市崩溃之前，这样的策略非常流行，因为改变“股票＋期货”复制组合头寸的成本要小于改变真正的股票—看跌期权头寸的成本。但是，在 1987 年的股市崩溃中，使用股票—期货组合保险的投资者不能进行足够快的交易来复制股票—看跌期权的头寸，因此现在这种方法已经不那么流行了。

13.1　静态对冲

股票—看跌期权（保护性看跌期权）

这里我们只关心“股票＋看跌期权”组合在到期日的价值。从看跌—看涨平价式中我们已经知道，“股票＋看跌期权”组合的收益等价于“看涨期权＋短期国债”组合，它有固定的收益下限，但如果股票价格大幅上升，又允许获得潜在的利润。这一点可以通过方向向量看出来，“股票＋看跌期权”的向量是 {＋1，＋1} 加上 {－1，0}，结果与看涨期权多头（加上短期国债）收益相同，都是 {0，＋1}。

假设你的组合类似于 S&P500，价值 $V_0=560\ 000$美元。股票指数期权的价格以指数单位进行报价，每单位有一个（任意给定的）“美元乘数”。比如，假设现在是 9 月，S&P500 位于 $S_0=280$，12 月-280S&P500 的看跌期权价格 $P_0=2.97$（指数单位）。为简单起见，我们在这里假设每指数单位的价值 $z_p=500$ 美元，因此：

$$每个看跌期权的成本=票面价格=z_pP=500(2.97)=1\ 485(美元)$$

看跌期权标的股票当前价值$=z_pS=500(280)=140\ 000$(美元)

因此，成本是1 250美元的看跌期权具有出售140 000美元指数的权利。看跌期权的价格是合约标的股票价值的0.89%$(=P_0/S_0)$。P_0/S_0的值很小，我们以后会利用这一点简化某些数学表达式。

把股票和看跌期权都用指数单位来表示会非常方便。比如，如果所有的最初财富$V_0=560\ 000$美元都以股票的形式持有，那么指数单位的数量将是

$$N_0^*=V_0/S_0=2\ 000(\text{即 }2\ 000\text{ 美元/指数单位}) \tag{13.1}$$

持有2 000指数单位意味着S每单位的变化将导致模仿指数成分的股票组合2 000美元的价值变化。如果我们忽略看跌期权的成本，投资者也可以持有N_0^*指数单位的看跌期权。然而实际上，最初的财富V_0必然有一部分要用于看跌期权，因此在股票—看跌期权保险中，我们选择持有相同数量N_0（指数单位）的股票和看跌期权：

$$V_0=N_0(S_0+P_0) \tag{13.2}$$

因此，我们最初持有的股票和看跌期权数量是

$$N_0=\frac{V_0}{S_0+P_0}=\frac{560\ 000\text{ 美元}}{280+2.97}=1\ 979\text{（指数单位）} \tag{13.3}$$

其中，N_0是持有的股票和看跌期权的指数单位的数量，并对所有的t都固定。注意：

$$N_0=\frac{V_0}{S_0+P_0}=\frac{V_0}{S_0}\frac{1}{(1+P_0/S_0)}=N_0^*\ \frac{1}{(1+P_0/S_0)} \tag{13.4}$$

因此，对于$P_0/S_0\ll 1$，N_0大约等于N_0^*。当然，实际购买的看跌期权合约数量是

$$N_{p,0}=\frac{N_0}{z_p}=\frac{1\ 979}{500}=3.96(=4\text{ 份合约}) \tag{13.5}$$

到期时，股票—看跌期权组合的价值是

$$V_T=N_0S_T \qquad \text{如果 } S_T\geqslant K \qquad \text{（上行潜力）} \tag{13.6a}$$

和

$$V_T=N_0S_T+N_0(K-S_T)=N_0K \qquad \text{如果 } S_T<K \qquad \text{（保险水平）} \tag{13.6b}$$

每种情况下，净利润是$V_T-N_0P_0$。股票—看跌期权组合在到期日被保险的最低价值是N_0K。我们可以定义$V_{\min}$为：

$$V_{\min}=N_0K=1\ 979(280)=554\ 120(\text{美元}) \tag{13.7}$$

注意，为了简单起见，我们使$S_0=K=280$，但实际上，我们可以选择S_0附近的各种执行价的期权。因此，静态股票—看跌期权策略保证组合在到期日的最小价值是554 120美元（减去看跌期权的成本$4\times 1\ 250=5\ 000$美元），但是当$S_T>K$时，该策略可以获得上行利润（同样要减去看跌期权的成本）。例如，如果$S_T=310$（$>K=280$），那么看跌期权将不被执行：

被保险组合的价值$=V_T=N_0S_T=1\ 979(310)=614\ 490$(美元)

没有被保险组合的价值$=N_0^*\ S_T=2\ 000(310)=620\ 000$(美元)

因此，对于$S_T=310$，**上行收入**(upside capture)是98.95%$(=614\ 513/620\ 000=1\ 979/2\ 000)$。用代数表示，上行利润是$N_0/N_0^*\ (=1/(1+P_0/S_0))$，它依赖于看跌期权相对于股票的价格，通常要大于95%。

看涨期权+短期国债（信托看涨期权）

从看跌—看涨平价关系中，我们知道“股票+看跌期权=看涨期权+短期国债”，因此，“股票+看跌期权”组合的回报可以通过使用“看涨期权+短期国债”进行复制。我们的任务就是选择看涨期权和短期国债的数量，使得它们能够复制股票—看跌期权组合在到期日的最小收益，$V_{\min}=N_0K$。这个策略有时被称为**信托看涨期权**（fiduciary call）。包含 N_c 个看涨期权和 N_b 个债券的组合价值是

$$V_{c,b}=N_cC+N_bB \tag{13.8}$$

如果 B 是面值为 $M=100$ 美元的短期国债的市场价格，那么（通过连续复利）

$$B=Me^{-rT} \tag{13.9}$$

在静态对冲中，我们持有国债至到期日，因此我们主要关心债券到期日的价值 M。到期时，我们有

$$V_T=N_bM \qquad 如果\ S_T<K \tag{13.10a}$$

和

$$V_T=N_c(S_T-K)+N_bM \qquad 如果\ S_T\geqslant K \tag{13.10b}$$

最坏的结果是当看涨期权到期时，看涨期权处于虚值，因此

$$V_{\min}^{c,b}=N_bM \tag{13.11}$$

现在我们令 $V_{\min}^{c,b}$ 等于股票—看跌期权的最小价值 $V_{\min}^{s,p}$，因为这是我们试图在到期日复制的结果，因此，债券的数量是

$$N_b=\frac{V_{\min}^{s,p}}{M}=\frac{N_0K}{M}=\frac{554\ 120}{100}=5\ 541.2(短期国债) \tag{13.12}$$

固定 N_b 时，看涨期权的数量由公式（13.8）决定：

$$N_c=\frac{V_0-N_bB}{C} \tag{13.13}$$

通过对公式（13.12）中 N_b 和公式（13.10）中 M 的替换，并利用看跌—看涨平价（$C=P+S-Ke^{-rT}$），我们可以证明持有的看涨期权的股票指数单位与我们最初的“股票+看跌期权”组合中的数量相等：

$$N_c=\left(\frac{V_0}{S_0+P_0}\right)=N_0=1\ 979\ 个指数单位(=1\ 979/500=3.96\ 份合约) \tag{13.14}$$

实践中，静态“股票+看跌期权”和“看涨期权+短期国债”对冲的问题在于，投资者很难找到具有策略所需要的成熟期和执行价的可交易期权。投资者可以到场外市场寻找所需要的期权，但这样会非常昂贵。另一个办法是对“股票+看跌期权”每一天的收益进行复制，这个策略可以通过使用“股票+股票指数期货”或“股票+短期国债”进行。这两个复制组合的价格行为在每个时期都是“股票+看跌期权”的镜像，到期日临近时，复制组合保证组合的最小价值是 N_0K，等于实际的“股票+看跌期权”的最小收益。

13.2 动态组合保险的数学

我们的目标之一是利用股票加指数期货来复制股票加看跌期权的每一天价格的变化。我们将使用下述符号：

S=股票（指数）的价格

z_f=每一指数点的价值（为了简单，我们假设 $z=500$ 美元）

F=期货价格

P=看跌期权价格（每一指数点）

r=无风险利率（连续复利）

V=组合价值

T=衍生证券合约的到期时间（年）

t=时间（=今天）

$T-t$=（期货和期权）距离到期日的时间

为简化问题，我们假设期货和期权的到期时间相同，期权处于平价状态。这些假设很容易改变，且并不影响我们要说明的原理。另外，对冲期一般比衍生产品的生命期要短，我们在这里假设对冲期是无限小的一段时间。

股票—看跌期权组合

我们有 V_0 美元，假设投资于股票—看跌期权组合，这个组合由 N_0 指数单位的股票和同样数量的看跌期权组成：

$$N_0=\left(\frac{V_0}{S_0+P_0}\right) \tag{13.15}$$

注意，N_0 在整个对冲期是固定不变的。在 $t>0$ 时，“股票＋看跌期权”组合的价值是

$$V_{s,p}=N_0(S+P) \tag{13.16}$$

因此在一小段时间内（$\Delta t\to 0$）：

$$\frac{\partial V_{s,p}}{\partial S}=N_0\left(1+\frac{\partial P}{\partial S}\right)=N_0(1+\Delta_p) \tag{13.17}$$

其中，$\Delta_p=\partial P/\partial S$ 为看跌期权的 delta 值。

股票＋期货组合

我们现在假设股票—看跌期权保险成本太高，或是得不到合适的看跌期权，因此，我们用 N_0^* 股股票和 N_f 份期货合约构成的组合来复制它的“价格行为”。期货合约的最初价值是零，所以股票的指数单位数量是

$$N_0^*=\frac{V_0}{S_0} \tag{13.18}$$

N_0^* 在对冲期内也是恒定不变的。“股票＋期货”组合在 $t>0$ 时的价值是

$$V_{s,f}=N_0^* S+N_f(Fz_f) \tag{13.19}$$

其中，z_f 为期货合约的指数点价值。我们的任务是找到合适的 N_f 值来复制“股票＋看跌期权”组合。“股票＋期货”组合的价值变化是

$$\frac{\partial V_{s,f}}{\partial S}=N_0^* +z_f N_f\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right) \tag{13.20}$$

令“股票＋看跌期权”组合即公式（13.17）和“股票＋期货”组合即公式（13.20）的 $\partial V/\partial S$ 值相等，得到

$$N_0\left(1+\frac{\partial P}{\partial S}\right)=N_0^* +z_f N_f\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right) \tag{13.21}$$

解方程得到 N_f（我们加上了下标“t”来表示 N_f 在每个时期都发生变化）：

$$N_{ft}=\frac{[N_0(1+\Delta_p)_t-N_0^*]}{(\partial F/\partial S)_t z_f} \tag{13.22}$$

（为了简单起见）如果我们考虑不支付红利股票（指数）的期货合约

$$F=Se^{r(T-t)} \tag{13.23}$$

和

$$\frac{\partial F}{\partial S}=e^{r(T-t)} \tag{13.24}$$

则公式（13.22）变成

$$N_{ft}=[N_0(1+\Delta_p)_t-N_0^*]\frac{e^{-r(T-t)}}{z_f} \tag{13.25}$$

我们可以利用看跌—看涨平价关系进一步简化这个表达式，$(1+\Delta_p)=\Delta_c$，对于 Black - Scholes 模型 $\Delta_c=N(d_1)$。从公式(13.25)中我们可以看出，因为$(1+\Delta_p)=\Delta_c$ 位于0—1 之间，N_f 是负值，因此方括号中的值为负。因此，复制的组合意味着期货合约的空头。从直观上说，股票价格下跌 1 美元，看跌期权价值的上升要小于 1，因此“1 股股票＋1 个看跌期权”的组合价值将减小。“股票＋期货”复制组合的下跌也要小于 1，由于期货空头的利润要补偿一部分股票 1 美元的损失。由于看跌期权的 deltaΔ_p 随股票价格变化，复制组合中的期货合约的数量 N_f 要进行连续调整。

股票＋短期国债组合

我们从看跌—看涨平价关系中知道，“看涨期权＋短期国债”是“股票＋看跌期权”的复制。现在我们让“股票＋看跌期权”组合在每一段时间上的价格运动等于复制组合的价格运动。假设我们的组合中有 N_s 指数单位的股票和 N_b 单位的国债，那么

$$V_{s,b}=N_s S+N_b B \tag{13.26}$$

和

$$\frac{\partial V_{s,b}}{\partial S}=N_s \tag{13.27}$$

让上式等于“股票＋看跌期权”组合的 $\partial V/\partial S$（加上下标“t”）：

$$(N_s)_t = N_0(1+\Delta_p)_t = N_0(\Delta_c)_t \tag{13.28}$$

从公式（13.28）中可以得到 N_s，为了确定债券的数量，我们使“股票＋国债”组合的价值 $V_{b,s}$ 等于“股票＋看跌期权”的价值 $V_{s,p}$，因此

$$N_{bt} = \frac{(V_{s,p})_t - (N_s)_t S_t}{B_t} \tag{13.29}$$

持有的短期国债的价值（$N_b B$）$_t$ 随时间而变化，表明复制组合必须连续进行调整。

数值实例

表 13—1 至表 13—4 给出了一个简单的数值实例，来演示用以上两种组合来复制“股票＋看跌期权”组合的价格变化。“股票＋看跌期权”组合的股票和看跌期权都为指数单位：

$$N_0 = \left(\frac{V_0}{S_0+P_0}\right) = 1\ 979(\text{个指数单位}) \tag{13.30}$$

表 13—1　　组合保险（对冲头寸）

数据：	股票组合的价值	$V_0 = 560\ 000$ 美元
	S&P500 指数	$S_0 = 280$
	衍生品的成熟期	$T-t=0.10$(36.5 天)
	无风险利率	$r=0.10$(10%)
	复利/折现因子	$e^{r(T-t)}=1.010[e^{-r(T-t)}=0.99]$
	S&P 的标准差	$\sigma=0.12$
	初始看跌期权价格	$P_0=2.97$(个指数单位)
	执行价格	$K=280$
	初始看跌期权 delta	$\Delta_p=-0.388\ 8$
	(看涨期权 delta)	$(\Delta_c=1+\Delta_p=0.611\ 2)$
	期货价格($t=0$)	$F_0=S_0 e^{r(T-t)}=282.814$
	期货价格($t=1$)	$F_1=S_1 e^{r(T-t)}=281.804$
	短期国债的价格	$B=Me^{-rT}=99.00$

对冲头寸： 所持有股票的指数单位数量：

$N_0^* = V_0/S_0 = 2\ 000$(个指数单位)

股票—看跌期权保险：

$N_0 - V_0/(S_0+P_0) = 1\ 979$(个指数单位)

股票—期货保险：

$$(N_f)_t = [N_0(\Delta_c)_t - N_0^*]\frac{e^{-r(T-t)}}{z_f}$$

$$= [(1\ 979)(0.611\ 2) - 2\ 000](0.99/500)$$

$$= -1.56(\text{期货合约空头})$$

股票＋短期国债保险：

$$(N_s)_t = \frac{V_0}{(S_0+P_0)}(\Delta_c)_t = 1\ 979(0.611\ 2) = 1\ 209.6(\text{个指数单位})$$

$$N_b = \frac{V_{s,p} - (N_0\Delta_c)S}{B} = 2\ 235.3(\text{国债})$$

表 13—2　**组合保险(对冲结果)**

情景： 指数降低 1 点，$\Delta S=-1$，因此 $S_1=280-1=279$。	
新的衍生品价格：	
看跌期权价格 $P=3.377$	(使用 Black - Scholes)
期货 $F_1=S_1e^{r(T-t)}=279(1.010)=281.804$	
看跌期权价格变化 $\Delta P=\Delta_p(\Delta S)=-0.3888$	(通过看跌期权 delta 近似)
期货价格的变化 $\Delta F=281.804-282.814=-1.01$	
(1) 股票+看跌期权组合：	
股票收入$=N_0\Delta S=1979(-1)$	$=-1979$
看跌期权收入 $N_0\Delta_p\Delta S=1979(-0.3888)(-1)$	$=+769.4$
净收入	$=-1209.6$(初始组合价值的 0.2%)
(2) 股票+期货：	
股票收入$=N_{s,0}\Delta S=2000(-1)$	$=-2000$
期货收入$=N_f(\Delta F)z_f=(-1.565)(-1.01)500$ 美元	$=+790.3$
净收入	$=-1209.6$
(3) 股票+短期国债：	
股票收入$=N_s\Delta S=1209.6(-1)$	$=-1209.6$
国债收入	$=0$(国债价格没有变化)
净收入	$=-1209.6$

复制组合的损失等于股票—看跌期权组合(在极小的对冲期间 $dt\approx 0$)。

"股票+期货"复制组合有 N_0^* 个指数单位的股票和 N_f 份期货合约空头(这里 $z_f=500$ 美元)：

$$N_0^*=\frac{V_0}{S_0}=2\,000(\text{个指数单位}) \tag{13.31}$$

$$N_f=[N_0(1+\Delta_p)_t-N_0^*]\frac{e^{-r(T-t)}}{z_f}=-1.56\ (\text{即在 } t=0 \text{ 时的期货合约空头}) \tag{13.32}$$

最后，"股票+国债"复制组合在 $t=0$ 时有 N_s 个指数单位的股票和 N_b 数量的债券：

$$N_s=N_0(\Delta_c)_t=1\,209.6\ (\text{个指数单位}) \tag{13.33}$$

$$N_b=\frac{V_{s,p}-(N_0\Delta_c)S}{B}=2\,235.3 \tag{13.34}$$

表 13—2 中给出了股票价格小幅下跌 ($\Delta S=-1$) 的对冲结果。两个复制组合的价值变化等于"股票+看跌期权"组合的价值变化。表 13—3 和表 13—4 中期权的 delta 值在每个时期根据 Black - Scholes 公式计算得出。这使我们可以用 $N_0\Delta_p(\Delta S)$ 来近似看跌期权的价值变化(EXCEL 文件可以从网上得到)。"股票+看跌期权"组合的变化表示成"$dV(S+P)$"$=N_0(1+\Delta_p)(\Delta S)=-1\,209.6$。期权的 delta 可以用来计算每一时期的 N_f，见公式(13.32)。Excel 文件的最后一列给出了"股票+期货"复制组合的 delta 变化，它与"股票+看跌期权"的 delta 变化相等 ($=-1\,209.6$)。实际的看跌期权价格由 Black - Scholes 公式给出，$P=P(S,K,\sigma,r,T-t)$，"股票+看跌期权"组合的真实变化实际上是 $-1\,173.58$ (见表 13—3)，而不是近似的 delta 变化 $-1\,209.6$。因此，实践中，使用"股票+期货"复制组合会有对冲误差。

表 13—3　组合保险("股票+期货"复制组合)

初始股票价格 S	280	
执行价格 K	280	这是一个平值看跌期权。
初始看跌期权价格 P	2.970 1	
初始期货价格 F	282.814 0	
年利率 r	0.1	
年波动率	0.12	
股票漂移率	0.15	只有你想生成服从 GBM 的股票价格时才使用。
δ("分红"速率)	0	
到期时间(年)	0.1	期货和期权合约的到期时间。
时间步长	0.01	
V_0(股票)	5 600 000	股票组合的初始美元价值。
z_f	500	乘以股票指数期货合约(这里假设为 500 美元)。
M	100	国债的到期/票面价值。
对冲头寸		
N_0^*	2 000	"股票+期货"复制组合中的股票数量。
N_0	1 979.007 851	"股票+看跌期权"组合中的股票数量。

时间 t	剩余时间 $T-t$	资产价格 S	d_1	d_2	看涨期权的 delta	看跌期权的 delta	看涨期权的价格 C	看跌期权的价格 P
0	0.1	280.000 0	0.282 5	0.244 5	0.611 2	−0.388 8	5.756 1	2.970 1
0.01	0.1	279.000 0	0.188 2	0.150 3	0.574 6	−0.425 4	5.163 1	3.377 1
0.02	0.1	278.800 0	0.169 3	0.131 4	0.567 2	−0.432 8	5.048 9	3.462 9
0.03	0.1	278.500 0	0.140 9	0.103 0	0.556 0	−0.444 0	4.880 4	3.594 4
0.04	0.1	278.000 0	0.093 6	0.055 6	0.537 3	−0.462 7	4.607 1	3.821 0
0.05	0.1	277.500 0	0.046 2	0.008 2	0.518 4	−0.481 6	4.343 2	4.057 1
0.06	0.1	277.000 0	−0.001 4	−0.039 3	0.499 5	−0.500 5	4.088 7	4.302 7
0.07	0.1	276.500 0	−0.049 0	−0.086 9	0.480 5	−0.519 5	3.843 7	4.557 7
0.08	0.1	276.000 0	−0.096 7	−0.134 6	0.461 5	−0.538 5	3.608 2	4.822 2
0.09	0.1	275.500 0	−0.144 5	−0.182 4	0.442 6	−0.557 4	3.382 2	5.096 2
0.1	0.1	275.000 0	−0.192 3	−0.230 3	0.423 7	−0.576 3	3.165 6	5.379 6

股票+看跌期权组合			股票+看跌期权组合			股票+期货组合				
Delta 股票 dV(S)	看跌期权价值的变化 dV(P)	股票+看跌期权价值的变化 dV(S+P)	真实价值 V(S+P)	价值的真实变化 dV(S+P)	期货合约的数量 N_f	期货价格 F	期货价格的变化 dF	股票的价值 $N_0^* \times S$	股票价值的变化	股票+期货的价值的 delta 变化 dV(S+F)
			560 000		−1.565 057 9	282.814	560 000			
−1 979.01	769.401 4	−1 209.61	558 826.4	−1 173.58	−1.708 376 1	281.804	−1.010 050 2	558 000	−2 000	−1 209.606 5
−395.802	168.356 1	−227.445	558 600.4	−225.978	−1.737 449 7	281.602	−0.202 01	557 600	−400	−227.445 44
−593.702	256.939 1	−336.763	558 267	−333.445	−1.781 271	281.299	−0.303 015 1	557.000	−600	−336.763 3
−989.504	439.297 2	−550.207	557 726.1	−540.924	−1.854 785 2	280.793 9	−0.505 025 1	556 000	−1 000	−550.206 74
−989.504	457.860 4	−531.643	557 203.8	−522.282	−1.928 759 1	280.288 9	−0.505 025 1	555 000	−1 000	−531.643 48
−989.504	476.539 8	−512.964	556 700.2	−503.585	−2.003 029 2	279.783 9	−0.505 025 1	554 000	−1 000	−512.964 13
−989.504	495.293 9	−494.21	556 215.4	−484.851	−2.077 428 5	279.278 9	−0.505 025 1	553 000	−1 000	−494.210 01
−89.504	514.080 7	−475.423	555 749.3	−466.046	−2.151 788 3	278.773 8	−0.505 025 1	552 000	−1 000	−475.423 26
−989.504	532.857 4	−456.646	555 302	−447.281	−2.225 939 7	278.268 8	−0.505 025 1	551 000	−1 000	−456.646 48
−989.504	551.581 6	−437.922	554 873.4	−428.594	−2.299 714 4	277.763 8	−0.505 025 1	550 000	−1 000	−437.922 3

表 13—4　组合保险("股票+债券"复制组合)

初始股票价格 S	280
执行价格 K	280
初始看跌期权价格 P	2.970 1
年利率 r	0.1
年波动率	0.12
股票漂移率	0.15
δ("分红"速率)	0
到期时间(年)	0.1
时间步长	0.01
V_0(股票)	5 600 000　股票组合的初始美元价值。
z_f	500　期货乘以股票指数期货合约(这里假设为 500 美元)。
M	100　国债的到期/票面价值。
对冲头寸	
N_0^*	2 000　"股票+期货"复制组合中的股票数量。
N_0	1 979.007 851　"股票+看跌期权"组合中的股票数量。

时间 t	剩余时间 $T-t$	资产价格 S	d_1	d_2	看涨期权的 delta	看跌期权的 delta	看涨期权的价格 C	看跌期权的价格 P
0	0.1	280.000 0	0.282 5	0.244 5	0.611 2	−0.388 8	5.756 1	2.970 1
0.01	0.1	279.000 0	0.188 2	0.150 3	0.574 6	−0.425 4	5.163 1	3.377 1
0.02	0.1	278.800 0	0.169 3	0.131 4	0.567 2	−0.432 8	5.048 9	3.462 9
0.03	0.1	278.500 0	0.140 9	0.103 0	0.556 0	−0.444 0	4.880 4	3.594 4
0.04	0.1	278.000 0	0.093 6	0.055 6	0.537 3	−0.462 7	4.607 1	3.821 0
0.05	0.1	277.500 0	0.046 2	0.008 2	0.518 4	−0.481 6	4.343 2	4.057 1
0.06	0.1	277.000 0	−0.001 4	−0.039 3	0.499 5	−0.500 5	4.088 7	4.302 7
0.07	0.1	276.500 0	−0.049 0	−0.086 9	0.480 5	−0.519 5	3.843 7	4.557 7
0.08	0.1	276.000 0	−0.096 7	−0.134 6	0.461 5	−0.538 5	3.608 2	4.822 2
0.09	0.1	275.500 0	−0.144 5	−0.182 4	0.442 6	−0.557 4	3.382 2	5.096 2
0.1	0.1	275.000 0	−0.192 3	−0.230 3	0.423 7	−0.576 3	3.165 6	5.379 6

股票+看跌期权组合			股票+看跌期权组合		股票+债券组合			股票+债券组合		
Delta 股票 $dV(S)$	看跌期权价值的变化 $dV(P)$	股票+看跌期权价值的变化 $dV(S+P)$	真实价值 $V(S+P)$	价值的真实变化 $dV(S+P)$	股票的数量(dS)	股票价值的变化 N_S	股票+债券的 delta 变化 $dV(S+B)$	债券的数量 N_B	债券价格 B	债券的价值 $N_b \times B$
			560 000		1 209.606			2 235.344	99.004 98	221 310.2
−1 979.01	769.401 4	−1 209.61	558 826.42	−1 173.583	1 137.227	−1 209.61	−1 209.61	2 439.675	99.004 98	241 540
−395.802	168.356 1	−227.445	558 600.44	−225.978 4	1 122.544	−227.445	−227.445	2 481.038	99.004 98	245 635.1
−593.702	256.939 1	−336.763	558 266.99	−333.444 8	1 100.413	−336.763	−336.763	2 543.325	99.004 98	251 801.8
−989.504	439.297 2	−550.207	557 726.07	−540.924 3	1 063.287	−550.207	−550.207	2 647.668	99.004 98	262 132.3
−989.504	457.860 4	−531.643	557 203.79	−522.282	1 025.928	−531.643	−531.643	2 752.475	99.004 98	272 508.7
−989.504	476.539 8	−512.964	556 700.2	−503.585 3	988.42	−512.964	−512.964	2 857.511	99.004 98	282 907.9
−989.504	495.293 9	−494.21	556 215.35	−484.850 6	950.846 5	−494.21	−494.21	2 962.541	99.004 98	293 306.3
−89.504	514.080 7	−475.423	555 749.31	−466.046 4	913.293	−475.423	−475.423	3 067.325	99.004 98	303 680.5
−989.504	532.857 4	−456.646	555 302.02	−447.280 9	875.844 6	−456.646	456.646	3 171.627	99.004 98	314 006.8
−989.504	551.581 6	−437.922	554 873.43	−428.594 5	838.586 6	−437.922	−437.922	3 275.21	99.004 98	324 262.1

注：组合的"股票+债券 delta 变化"(第 8 列)与"股票价值的变化"(前一列)相同。

表 13—4 重复了“股票＋看跌期权”的计算，然后计算出了“股票＋国债”的复制组合。两个 Excel 文件都使到期时间为 0.1 年，以便具有一致性。

实践中，复制组合的价格变化不会与“股票＋看跌期权”组合的价格变化完全相同，因为：

- 用来计算最优复制组合头寸的期权 delta 值只对于股票价格的很小变化才有效。不同组合的交易成本有差别。
- 在真实世界里，期权 delta 值没有考虑由于时间的推移、利率和波动率的变化造成的期权价格的变化。
- 实际操作中，由于买卖的都是整数单位的期权合约，会造成四舍五入误差。

在 1987 年股票市场的大崩溃中，上述问题表现得特别明显。与上面的理论结果相比，当时由动态组合保险提供的“下限”变得非常昂贵而没有效率。文章 13.1 详细讨论了此问题。

文章 13.1 制造保险?

保险无处不在。你可以为你的房子保火险，为你的物品保盗险，为你的汽车保事故险。你也可以对健康保险，为你的工作保险，甚至为你身体的某一部分保险（比如足球运动员会为腿的骨折保险，钢琴家会为手可能受到的伤害保险）。当然，你保险时，需要支付一定的保险金，通常是支付你可能受到损失的 $x\%$（即保险条款中的“免赔额”或“超出部分”）。保险金是可能受到损失的一小部分，这是因为大家的风险共同承担。比如，大多数情况下，房子不会在同一年失火，因为这样的事件往往相互独立。

现在假设你想对你的股票组合保险，以避免未来股价下跌造成的损失，但同时，你又想从股票价格上升中获得利润。这里的问题是，当股市下跌时，所有拥有股票的人都会受到损失，这时并不存在共同承担风险从而减小个人风险的问题。然而，买入看跌期权可以提供所需的保险。如果现在的股票价格为 S_t，你的看跌期权的执行价 $K<S_t$，那么 $K-S_t$ 是你的保险条款中“免赔额”或“超出”的部分，因为当 S 跌至 K 时，你个人要承受这么多的损失。但是，一旦 S 下跌到 K 以下，那么保险就会起作用，你会每股固定收到 K 美元。你所支付的看跌期权的期权费就相当于普通保险中的保险费。当看跌期权的价格越低，执行价 K 相对于当前的股票价格也越低，就是说看跌期权保险合约中可减部分越大。

1974 年股票市场崩溃以后，组合保险问题一直是美国加州大学伯克利分校的学者海恩·利兰（Hayne Leland）和他的同事马克·鲁宾斯坦（Mark Rubinstein）所思考的问题。1974 年，股票指数看跌期权并没有问世，但是利兰意识到，根据 Black 和 Scholes 的思想，可以利用“股票＋国债（相当于现金）”来“制造”或“复制”出“股票＋看跌期权”组合的收益。给定一个组合价值的下限（在看跌期权中等价于执行价），你可以在股价下跌时卖出股票，投资于债券。如果股票价格继续下跌，那么你继续卖出股票，直到 $S=K$ 时，你卖出所有的股票，百分之百地投资于债券之上（因此对股票的进一步下跌提供了保险）。

另一方面，当股票价格上升时，你向上远离底限 K，那么你减持债券，买入股票。你将获得更多的上行利润。股票组合的最初价值和下限价值之间的差，就是保险中的免赔额。这个策略的成本隐藏在这样一个事实的背后：由于组合保险，你在市场上升时买入股票，市场下跌时卖出股票，于是会造成一定的损失。（这个成本等于期权的价格，这又是复制期权的一个例子。）对于学者们来说，最关键的问题是找到持有股票和债券（现金）之间的比例，从而模仿“股票＋看跌期权”的结果。因为看跌期权的价格不仅因为股票价格的变化而变化，还会因为股票波动率的变化

而变化，所以问题就变得更加复杂。如果波动率下降，看跌期权的价格也下降，那么“股票＋债券”复制组合必须考虑到这一因素。

利兰-鲁宾斯坦（Leland - Rubinstein）公司推向市场的第一个组合保险承诺，可以对市场指数 5 个 5%的变化进行保险，除非这 5 个变化都发生了，这个组合保险将始终具有可操作性。但因为组合保险的复杂性，利兰和鲁宾斯坦 1979 年在投资银行界的第一次“推销”收获甚微。因此他们雇用了一位市场经理约翰·奥布赖恩（John O’Brien），他的名字也加入到咨询公司的名字当中。大家开始对此感兴趣，但是基金经理们（即股票挑选者）仍然不喜欢由别人来告诉自己何时该买或卖他们组合中的股票。1983 年，股票指数期货的出现解决了这个问题，因为复制组合现在可以通过“股票＋期货”制造出来。20 世纪 80 年代早期，组合保险的生意开始兴旺起来。

1987 年股市崩溃到来了。对于看跌期权多头，如果期权被执行，期权出售者不得不以价格 K 买入股票。对于组合保险，你不得不在下跌的市场上卖出股票或股票期货。从理论上讲，市场参与者应该认识到，“组合保险者”们卖出股票并不是因为他们得到了关于股票的坏消息，而只是因为他们要保护现有的组合。因此，应该有一些买家乐于以当前的市场价格买入股票。

1987 年 10 月 16 日，星期五，道·琼斯指数下跌 10%，约 40%的卖单来自组合保险者。19 日，星期一，大批卖单等待处理，许多股票当天停止交易，道·琼斯指数一天里下跌了创记录的 23%。于是你不能执行你组合保险里的“卖出指令”。但是糟糕的事情并没有到此为止。期货市场和现货市场的套利联系也被打破。“公平”的指数期货价值是在 280 左右，但是期货合约的开盘价是 260 左右，折扣率为 7.5%。因为不能在股票市场上卖出，人们开始卖出期货。套利者应该介入，买进期货（买低）同时卖出股票（卖高）。但是他们无法进行后者的交易，因此期货市场和现货市场“脱节”了。贝迪（Brady）委员会指责组合保险者造成了股市的崩溃。但实际上，一部分下跌无疑是因为投资者们的止损指令机制造成的，这种指令要求价格下跌到某一点便要卖出股票。

一般来说，组合保险能使组合价值保持在最小水平之上。但是市场缺乏流动性时，它的成本要远大于理论模型所能得到的结果。因此，在股市崩溃之后，人们认为组合保险恰恰在最需要它的时候反而失败了。1987 年事件之后，组合保险明显不那么流行了，但是后来它又受到了一些欢迎。

这个故事告诉我们，如果你预期会发生真正的崩溃，那么就要买“真的东西”，即看跌期权，因为出售者每股必须向你支付 K 美元（保证金制度能确保“出售者”完成他们的义务）。否则，如果你决定使用组合保险，那你一定要谨慎地考虑到，在危机时刻市场会失去流动性。

一切尽在 delta 中

动态对冲非常复杂，但我们需要做的一切就是让复制组合的 delta 值和“股票＋看跌期权”的 delta 值相等。对于 N_0 个指数单位的股票和看跌期权，组合价值的变化是

$$\Delta V_{s,p} = N_0(1+\Delta_p)(\Delta S) = N_0\Delta_c(\Delta S) \tag{13.35}$$

其中，我们使用了看跌—看涨平价关系$(1+\Delta_p)=\Delta_c$。股票的 delta 值是 1。因此对于 ΔS 的单位变化，N_0 股股票和 N_0 个看跌期权构成的“股票＋看跌期权”组合的变化是 $N_0(1+\Delta_p)$。下一步考虑“看涨期权＋债券”复制组合。债券的 delta 是零（即债券的价格与股票价格独立），因此“看

涨期权＋债券”复制组合的价值变化是：

$$\Delta V_{c,b}=N_c(\Delta C)=N_c\Delta_c(\Delta S) \tag{13.36}$$

因此，只要 $N_c=N_0$，即看涨期权多头的数量等于看跌期权多头的数量，那么，“看涨期权＋债券”组合的变化，即公式（13.36），将等于“股票＋看跌期权”组合的变化，即公式（13.35）。现在考虑“股票＋期货”复制组合，$N_0^*=V_0/S_0$：

$$\Delta V_{s,f}=N_0^*\,\Delta S+N_f z_f\Delta F=(N_0^*+N_f z_f e^{r(T-t)})\Delta S \tag{13.37}$$

其中，$\Delta F=\Delta S e^{r(T-t)}$。“股票＋看跌期权”组合的价值变化是

$$\Delta V_{s,p}=N_0(1+\Delta_p)(\Delta S)=N_0\Delta_c(\Delta S) \tag{13.38}$$

我们选择 N_f，使得两式相等，这样包括 N_0^* 股股票和 N_f 份期货合约的“股票＋期货”组合的 delta 将等于 N_0（$1+\Delta_p$）。最后，考虑“股票＋债券”复制组合：

$$\Delta V_{s,b}=N_s(\Delta S) \tag{13.39}$$

比较公式（13.35）和公式（13.39），对于 $\Delta V_{s,p}=\Delta V_{s,b}$，我们必须使 $N_s=N_0(1+\Delta_p)=N_0\Delta_c$。这样对于 $\Delta S=1$，N_0 手看跌期权和股票的价值变化是 $N_0(1+\Delta_p)$。“股票＋债券”组合的变化是 $N_s\times 1$，但如果 N_s 等于 $N_0(1+\Delta_p)$，那么 $\Delta V_{s,b}=(N_s\times 1)=N_0(1+\Delta_p)$，这等于“股票＋看跌期权”组合的价值变化。

在以上所有的分析中，为了简化问题，我们都玩了一个小小的花样（几乎所有的入门教材都是这样做的，但它们并不总是告诉你它们这么做了！）我们假设对冲期非常短，股票价格在这段时间发生了变化，但是到期时间（$T-t$）却是不变的。在 Excel 文件中我们也这样假设，因此数字与文中给出的一致。然而，你可以很容易地对 Excel 文件进行一些修改，来考虑进 $T-t$ 也随着 S 发生变化的事实。（不过，为了进行这个更为复杂的对冲，你需要做一些进一步的计算。因为 $dV=(\partial V/\partial S)dS+(\partial V/\partial t)dt$，其中 V＝期权价值或是期货的价值，所以在所有的解中，都要多出一项 $(\partial V/\partial t)dt$。这作为练习留给读者。）

13.3 本章摘要

组合保险技术使投资者的组合有确定的最小价值，同时股票价格上升时，又能获得上行利润。有几种方法可以对组合进行保险，主要的问题归纳如下：

- 买入 N_0 个看跌期权，持有至到期日，可以保证股票组合的最小价值为 $V_{\min}=N_0K$，其中 K 是执行价。这是**静态组合保险**。股票—看跌期权保险的成本可能较高，具有保险所需的执行价，到期日的期权或许不能得到。
- 由**看跌—看涨平价**，我们知道“股票＋看跌期权”组合可以用“看涨期权＋短期国债”进行复制。然而，这种复制不一定成本更低，或是比“股票＋看跌期权”组合具有更好的灵活性。
- 虽然“股票＋看跌期权”组合在到期日有一个最小的被保险价值，在到期日之前，它的价值随股票价格和看跌期权价格的变化而变化。每一时期上，“股票＋看跌期权”组合的**动态价格运动**和它在到期日的最小被保险价值，都可以通过更具流动性、成本更低的其他组合进行复制。这被称为使用**复制组合的动态对冲**。

- 股票多头加上股票指数期货空头是复制“股票＋看跌期权”组合价格变化的一个成本较低的方法。然而，当股票价格和看跌期权 delta 变化时，期货的空头数量必须也发生变化，换句话说，**组合需要频繁地调整头寸**。
- **“股票＋短期国债”**组合可以复制“股票＋看跌期权”组合的价格变化，但也需要动态地调整头寸。
- 期权的 delta 只能近似地说明期权价值的变化，因此，只有股票价格变化很小时，**使用复制组合进行动态对冲才会成功**（或者说，要不断地进行头寸调整），同时，底层资产的波动率和无风险利率要保持不变，这两者都会影响期权的价格。

章末练习

1. 为什么“股票多头＋看跌期权多头”的组合被称为“有保护的看涨期权”？

2. 当看跌期权可以获得时，为什么要采用动态组合保险？而这时你可以用“真东西”来保护你的组合。

3. 当市场涨跌很快时，为什么组合保险要求快速买入和卖出股票、国债和期货？

4. 你用分散化的组合跟踪 S&P500 指数，这时指数位于1 500点，组合价值是675 000美元。一个指数点的价值是 250 美元。你想买入看跌期权来保护你的组合，使最小的价值为600 000美元。

(a) 看跌期权的执行价是多少？

(b) 如果 $P=16$，那么看跌期权的总成本是多少？

5. 你持有的投资组合有 N 个 S&P500 指数单位的股票和 N 个指数单位的看跌期权。你如何使这个“股票＋看跌期权”组合的价值变化（对于股票价格 S 的一个微小变化）等于“看涨期权＋短期国债”组合的价值变化？（提示：用看跌—看涨平价关系。）

6. 你持有一个模仿 S&P500 的组合，现价为9 750 000美元。当前（6 月 1 日）S&P500 位于1 500点（每一指数点价值是 250 美元）。你想对组合保险到 12 月 1 日（6 个月），准备使用价格为 31 的1 400指数看跌期权。假设你通过卖出一些股票来买入这些期权。

(a) 你将持有多少股票和看跌期权，最小的保险后价值是多少？

(b) 如果在 9 月 1 日，S&P500 位于1 300或1 600，组合的价值分别是多少？

(c) 如果 $S_t=1\ 600$，上行利润会是多少？保险的成本是多少？

7. 根据习题 6 中的信息，利用股票指数期货建立动态对冲，以跟踪包含 N_0 股票和看跌期权的组合的价格变化。其他信息如下：

指数期权乘数 $z_f=250$ 美元

$F_0=1\ 538$

$\Delta_c=0.77$

$r=5.0$（连续复利）

期货和期权的到期时间是 $T=1/2$ 年。

对于 $dS=+1$，比较“股票＋看跌期权”和“股票＋期货”组合的价值变化。

第14章

互　换

学习目标

- 考察使用**“普通香草型”**（plain vanilla）利率和货币互换的原因。
- 说明**比较优势**（comparative advantage）是互换双方共同获得收益的根源。
- 介绍**互换交易者**的作用、**结算程序**和**定价步骤**。
- 演示如何通过建立包含**债券**或**一系列远期合约**的**复制组合**来对利率和货币互换定价。
- 阐述**更复杂的互换协议**（如基差互换、异质利率互换和过山车互换）的主要特点。

互换是合约双方自行达成的协定（即场外证券），交易双方同意根据预定的公式交换未来的现金流。互换合约产生于 1981 年。目前最大的互换市场是利率互换，但货币互换的交易也相当活跃。

最常见的利率互换类型是**普通香草型或固定—浮动利率互换**（fixedfor-floating rate swap)。合约一方同意支付固定的利息给另一方，并收到一系列基于浮动利率的支付。这些利息基于双方协商好的名义本金，但是只有利息才被交换。利息支付的日期和所使用的浮动利率（如 LIBOR）都是事先商定好的。在普通香草型互换中，固定利率支付者确切知道将在什么日期支付多少利息，但是浮动利率支付者对此却不确定。一些读者现在会意识到，利率互换实际上就是一系列远期利率协议（FRA，见 Cuthbertson 和 Nitzsche，2001）。我们将会看到，一种对互换定价的方法就是使用“隐含远期—远期”利率来计算不确定利率的未来现金流的当前价值。虽然互换等价于一系列远期利率协议（或远期合约），但互换的成本要低于一系列远期利率协议。而且，如果在借方市场中存在寡头垄断因素，那么直接借债的信用价差会相对很高，互换便提供了一种避开这个问题的途径，它让互换双方都得到净收益（假设双方都不违约）。

互换交易的中介通常是银行，它们担当互换交易者的角色，一般是国际互换及衍生品协会（International Swaps and Derivatives Association，ISDA）的成员。这个组织通过它的主互换协议（master swap agreement）来提供互换协议中的一些标准，这个协议只需经过一些修改就能满足大部分顾客的需求了。交易者通过买卖价差获取利润，有时也收取少量的中介费。如果交易者成为互换的一方，但不能找到交易对手，那么他们就有了未平仓头寸（固定或浮动利率的净支出或收入）。通常，他们使用期货（有时是期权）来对冲这个头寸；直到他们找到合适的交易对手。

14.1　利率互换

互换可以把一系列浮动利率支出（或收入）转换成固定利率支出（或收入）。考虑一家公司，它发行了浮动利率债券，利率为 LIBOR＋0.5％(见图 14—1，顶部)。如果它使用互换，收到 LIBOR，支付 6％的固定利率，那么它的净支出是固定的 6％＋0.5％＝6.5％。它把浮动利率债务变成了固定利率债务。图 14—1 底部显示了发行固定利率 6.2％的债券加上“收到固定的 6％，支付浮动 LIBOR”形成 LIBOR＋0.2％的浮动利率债务。

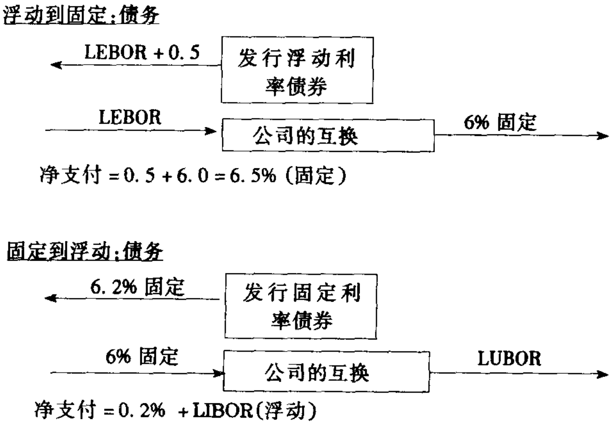


图 14—1　债务：使用互换

类似地，如果公司（或金融机构）持有 5.7％固定利率债券（见图 14—2 底部），进行“支付 6％固定利率，收到 LIBOR 浮动利率”的互换，那么净结果是一项支付 LIBOR－0.3％浮动利率

的资产。最后，如果金融机构持有支付 LIBOR－0.5%浮动利率债券（见图 14—2 顶部），进行“接受 LIBOR 浮动利率，支付 6%固定利率”的互换，那么净结果是接受 5.5%的固定利率。

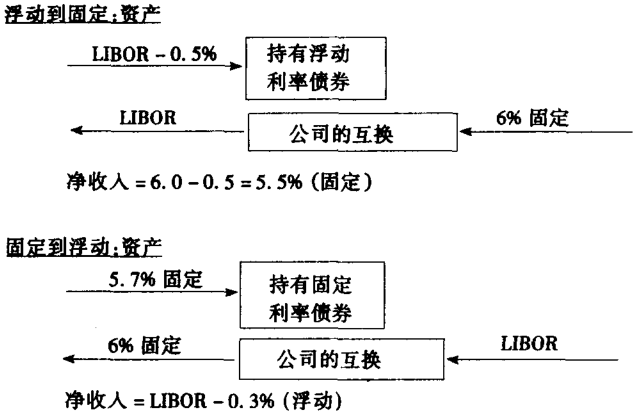


图 14—2　资产：使用互换

现在我们来看金融机构是如何利用互换来减小利率风险的。公司正常经营活动一般都意味着承担一定的利率风险。一家商业银行或是储蓄贷款机构，即美国的 S&L 和英国的储蓄贷款协会，都有以贷款和住房抵押贷款形式存在的固定利率收入（比如 12%），但是它们的融资却是通过短期储蓄存款的方式得到的（比如 LIBOR－1%，见图 14—3）。如果 LIBOR 现在等于 11%，银行可以获得每年 2%的价差利润。但是，如果 LIBOR 的上涨超过 2%，金融机构将遭受损失。因此，金融机构面临着利率风险。如果它进入互换合约，接受 LIBOR，支付 11%的固定利率，那么它可以保护自己免受利率上涨带来的损失，因为不管浮动利率将来如何变化，现在它都固定地收到 2%的利息。

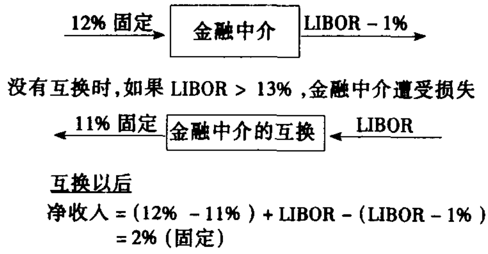

12% 固定
金融中介
LIBOR - 1%
没有互换时,如果 LIBOR > 13% ,金融中介遭受损失
11% 固定
金融中介的互换
LIBOR
互换以后
净收入 = (12% - 11%) + LIBOR - (LIBOR - 1%)
= 2% (固定)

图 14—3　金融中介：使用互换

公司进行互换的另一个原因是，一些公司可以在固定利率市场或浮动利率市场更便宜地借到钱。假设公司 A 发现它能在固定利率市场相对便宜地借款，但是它最终想以浮动利率借款（为了与浮动利率收入相匹配）。因为浮动利率相对昂贵，公司 A 不直接到浮动利率市场上借款。相反，它以固定利率借款，然后签订互换条约，支付浮动利率，接受固定利率，其“节约的成本”归因于互换的比较优势。下面我们考虑一个例子。

假设现在是 3 月 15 日，两家公司面临如下情况：

> 公司 A 以固定利率借入了 10 000 万美元，但是希望支付浮动利率。
> 公司 B 以浮动利率借入了 10 000 万美元，但是希望支付固定利率。

为了实现各自的最佳借款方式，两家公司可以达成利率互换协议。互换中（见图 14—4），一方在未来确定的日期收到确定数量的利息，并支付在 $t=0$ 达成协议时并不确定数量的浮动利息（除了第一次支付外，见下文）。

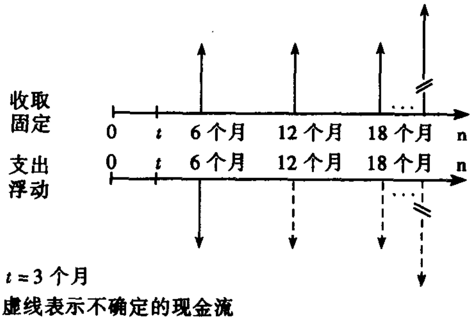


图 14—4　互换中的现金流(收取固定,支付浮动)

假设浮动利息的参考利率是 6 月期 LIBOR，3 月 15 日，公司 A 进入“支付浮动，收取固定”的为期 1 年的互换协议。那么公司 A 同意在 9 月 15 日和下一年 3 月 15 日支付 LIBOR 给公司 B，并从公司 B 收取固定利率。因此，互换中：

> **普通香草互换：**
> 公司 A 是浮动利率支付者，固定利率收取者。
> 公司 B 是浮动利率收取者，固定利率支付者。

公司 A 最初以固定利率借款，但现在收到互换中的固定利率，支出互换中的浮动利率，因此公司 A 现在实际上支付的是浮动利率。类似地，公司 B 最初以浮动利率借款，但现在收到互换中的浮动利率，支出互换中的固定利率，它最终实际上支付固定利率。

支付的浮动利率在每个参考期（6 个月）初由 LIBOR 决定（见图 14—5），因此，3 月 15 日已知的 11%的 LIBOR 可以决定 9 月 15 日的浮动利息的金额，而 9 月 15 日 LIBOR 的值又将决定下一年 3 月 15 日的浮动利息金额。同时，3 月 15 日，公司 B 同意在每个参考期以利率 r_X（比如 10%）支付给公司 A 固定利息。注意，这里并没有发生本金的互换，双方交换的只有利息。计日惯例会有差别，但我们为了简单起见，假设 6 个月等于 180 天，1 年等于 360 天。

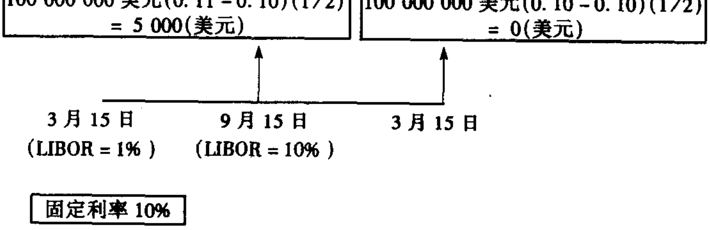


图 14—5　公司 B：浮动利率收取者（固定利率支付者）

在互换中，公司 B 是 LIBOR 浮动利率的收取者，同时是 10%固定利率的支付者。每个付息日，公司 B 收到的现金流是：

> 公司 B 是浮动利率收取者，固定利率支付者。
> 公司 B 的收入＝100(LIBOR－0.10)(180/360)美元。

我们注意到，互换收入的决定方式与远期利率协议中的方式非常相似。显然，如果 LIBOR 高于固定利率，公司 B 将有净现金流入。在 3 月 15 日，互换合约第一次签署时，9 月 15 日的净现金流是已知的（因为 LIBOR 在 3 月 15 日是已知的）。但是，互换双方都不知道 1 年后净支付会是多少，因为这要由 9 月 15 日的 LIBOR 实际值决定。

图 14—5 描绘了一种可能的结果。3 月 15 日，公司 B 知道它将收到 10 000 万美元名义本金的浮动利率（11%）和固定利率（10%）的息差，因此公司 B 在 9 月 15 日从公司 A 收到5 000美元。如果 9 月 15 日 LIBOR 等于 10%，刚好是固定利率，那么在第 2 年 3 月 15 日双方都没有任何现金支付。这样，公司 B 总共获得收益5 000美元，公司 A 支出了5 000美元。当然，如果 LIBOR在 9 月 15 日高于 10%，那么公司 A 要支付现金给公司 B。

普通香草互换

利率互换可以使互换双方减小借款成本。互换交易者也有可能从中获取一部分利润。假设：

> 公司 A 希望最终以浮动利率借入 5 年期 1 000 万美元。
> 公司 B 希望最终以固定利率借入 5 年期 1 000 万美元。

公司 A 和公司 B 所面临的借款利率列于表 14—1 中。公司 A 在两个市场上都有**绝对优势**，因为它能以比公司 B 低的利率借入固定利率和浮动利率（可能因为公司 B 在两个市场上的信用等级都更低）。然而，如果它们进行互换，那么双方都会获益，这一点可以从下面看出来：

(1) 公司 A 和公司 B 都直接以它们“偏好”的形式借款：

总成本$=B_X+A_f=11.2\%+(L+0.3\%)=\mathbf{L+11.5\%}$

(2) 如果公司 A 和公司 B 都以“不偏好”的形式借款：

总成本$=A_X+B_f=10\%+(L+1\%)=\mathbf{L+11\%}$

因此，如果它们都以不偏好的形式借款，成本会更低：

公司 A 和公司 B 的总收益$=(B_X+A_f)-(A_X+B_f)=\mathbf{0.5\%}$

虽然使用方法（2）会使总成本降低，但现在有一个很大的问题，即公司 A 和公司 B 都不能以各自希望的形式借款。这时，互换便提供了能使双方同时降低成本并取得偏好形式借款的一种机制。现在我们换个角度来看表 14—1 中的总收益。最关键之处是，公司 B 在浮动利率市场有比较优势，公司 A 在固定利率市场有比较优势。（比较优势是国际贸易理论中的名词，可以解释为什么英国会向法国出口葡萄酒，即使法国的绝对制造成本比英国更低。）

表 14—1 A 和 B 的借入利率

	固定	浮动
公司 A	10.00（A_X）	LIBOR+0.3%（A_f）
公司 B	11.20（B_X）	LIBOR+1.0%（B_f）
绝对差异（B−A）	Δ（固定）=1.2	Δ（浮动）=0.7
净比较优势或质量差幅差异	NCA=Δ（固定）−Δ（浮动）=0.5	
B 在浮动利率借款上具有比较优势，因此 B 以浮动利率借款		

公司 B 在固定利率市场比公司 A 多支付 1.2%，而在浮动利率市场只多支付 0.7%，因此公司 B 在浮动利率市场具有比较优势。（要是你喜欢，你可以说公司 B 在浮动利率市场比固定利率市场支付的“更少更多”。）因此公司 B 最初借入浮动利率，公司 A 借入固定利率。然后它们达成互换协议，公司 B 同意支付给公司 A 固定利率，公司 A 支付给公司 B 浮动利率，这样它们最终都实现了理想的借款方式（即公司 B 支付固定利率，公司 A 支付浮动利率）。净比较优势或质量差幅差异（quality spread differential）是：

净比较优势或质量差幅差异

$$\text{NCA} = \text{固定利率差} - \text{浮动利率差}$$
$$= (B_X - A_X) - (B_f - A_f) = (11.2 - 10) - [(\text{LIBOR}+1) - (\text{LIBOR}+0.3)]$$
$$= 1.2\% - 0.7\% = 0.5\%$$

正如前面所说明的，这是互换的总成本。

情况 1：公司 A 与公司 B 直接协商

我们假设 0.5% 的收益在公司 A 和公司 B 之间平均分配（真实的分配要取决于两个公司的谈判能力）。公司 B 在浮动利率市场具有比较优势，因此它发行 1 000 万美元的浮动利率债券，利率为 LIBOR+1%。公司 A 发行固定利率债券，利率为 10%（见图 14—6）。

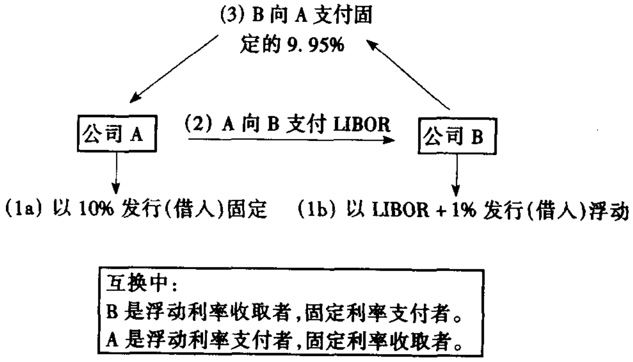

(3) B 向 A 支付固定的 9.95%
公司 A
(2) A 向 B 支付 LIBOR
公司 B
(1a) 以 10% 发行(借入)固定
(1b) 以 LIBOR + 1% 发行(借入)浮动
互换中：
B 是浮动利率收取者，固定利率支付者。
A 是浮动利率支付者，固定利率收取者。

图 14—6 利率互换（A 和 B）

下面是我们如何实现如图所示的互换。我们最初从公司 B 的角度考虑互换，它想最终借入浮动利率，并期望 0.25% 的收益（这也保证了公司 A 的收益为 0.25%）。下面是公司 B 的行动：

(1) 公司 B 最初以 **LIBOR+1%** 直接借款（在具有净比较优势的浮动利率市场上）。

(2) 假设“分支 1”中公司 B 同意收到 **LIBOR**。

(3) 公司 B 的净支出是 1%（固定）。

(4) 但是公司 B 最终必须有收益 0.25%，因此公司 B 的总固定利率支出是“借入固定利率的直接成本－互换收益”＝11.2%－0.25%＝10.95%。

(5) 因此在互换的“分支 2”中，公司 B 必须支付 10.95%－1%＝9.95%。

公司 B 的现金流：

最初发行浮动利率债券，在互换中收到浮动，支付固定。

- 支付 LIBOR+1%；
- 从公司 A 收到 LIBOR；
- 向公司 A 支付固定的 9.95%。

因此虽然公司 B 最初发行了浮息债券，但最终支付 10.95%（1%＋9.95%）的固定利率，这要比它直接从固定利率市场借入成本减少了 0.25%。上面的方法是否也能让公司 A 获得 0.25%的收益呢？公司 A 的现金流是：

公司 A 的现金流：

最初发行固定利率债券，在互换中收到固定，支付浮动。

- 支付 10%固定利率；
- 从公司 B 收到 9.95%固定利率；
- 向公司 B 支付 LIBOR。

因此公司 A 最终支付 LIBOR＋0.05%(＝LIBOR＋10%－9.95%)。公司 A 把它所发行债券的固定利息转换成了纯粹的浮动利率。公司 A 所支付的浮动利率也比它直接从浮动利率市场上借入要低 0.25%，在那里它要支付 LIBOR＋0.3%（见表 14—1）。

因此在互换协议中，公司 A 同意向公司 B 支付 LIBOR，公司 B 同意向公司 A 支付固定利率 9.95%（见图 14—6）。总的收入和支出是：

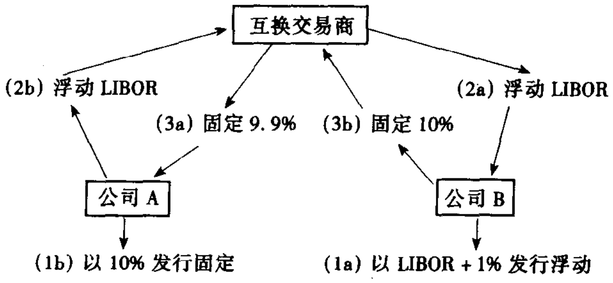
- 公司 B 以 LIBOR＋1%发行浮动利率债券；
- 公司 A 以 10%发行固定利率债券；
- 公司 A 同意向公司 B 支付 LIBOR，名义本金为 1 000 万美元；
- 公司 B 同意向公司 A 支付固定利率 10%，名义本金为 1 000 万美元。

从以上分析我们可以看出，0.5%的比较优势被公司 A 和公司 B 平均分配（当然实际上不一定如此）。相对于直接以各自偏好的形式借款，公司 A 和公司 B 通过互换各自得到了 0.25%的

收益。

情况 2：互换交易者作为金融中介

假设互换交易者获得由比较优势造成的总利润 5%中的一部分。在图 14—7 中，我们假设互换交易者在浮动利率分支盈亏相抵（她支付和收取的都是 LIBOR）。在固定利率分支，互换交易者收取 10%，但是只支付 9.9%，因此得到总收益 0.1%。



注意： 假设互换交易商得到 0.1,公司 A 和公司 B 各自得到 0.2。
互换交易商在浮动利率分支没有获利。

图 14—7 互换交易者

公司 A 的现金流：

最初发行固定利率债务，互换中收取固定，支付浮动。

- 支付 10%固定（同上）；
- 从银行收到 9.9%固定（小于前面的 9.95%）；
- 向银行支付 LIBOR（同上）。

净效果是公司 A 支付 LIBOR+0.1%（仍然比直接从浮动利率市场借款少 0.2%）。从图 14—6 可以很容易得到公司 B 的头寸。

公司 B 的现金流：

最初发行浮动利率债务，互换中收取浮动，支付固定。

- 支付 LIBOR+1%（同上）；
- 从银行收取 LIBOR（同上）；
- 向银行支付 10%固定（大于上文的 9.95%）。

净效果是公司 B 支付 11%固定（比直接从固定利率市场借款要好 0.2%）。互换交易者在固定利率交易上获得收入与支出之间的差额利润 0.1%。注意，互换交易者承受潜在的违约风险，因为公司 A 和公司 B 可能会违约，然而银行必须遵守它的承诺。另外，上例中无论 LIBOR 为何值，互换交易都值得去做。

互换交易者

即使互换交易者无法立即找到一个交易对手，她通常也会成为互换的一方。这被称为“持仓”(warehousing)。如果交易者持仓了一个互换，她就暴露于利率风险，她一般会用一系列利率期货合约去对冲。通常使用欧洲美元期货，一系列的欧洲美元期货被称为欧洲美元带。例如，考虑图14—7。如果互换交易者最初只和公司A签订互换，那么她收到LIBOR，支付9.9%固定。如果在她找到另外一个交易对手之前，LIBOR跌至9.9%以下，那么她将遭受损失。(这通常被称为“不匹配风险”。) 通过做多（买入）到期日与那个特别的支付日相近的短期利率期货，她可以对冲任何与公司A的单一互换支付。如果利率下跌，期货价格将会上涨，期货的利润抵消了互换中浮动分支的损失。

实践中，互换交易者把她与所有客户的头寸加总，从而决定在每个支付日她应该在浮动利率分支净买入还是净卖出。对于每个支付日，她可以进行欧洲美元期货对冲。在上面的例子中，一旦互换交易者找到交易对手，即公司B，那么她就实现了完全对冲，并有确定的净收入0.1%(即消除了不匹配风险)。然而，需要注意的是，交易者很难找到像公司B这样一个需求与公司A完全“相反”的公司。例如，如果公司A的互换到期时间是5年，但是公司B只进行3年的互换，那么互换交易者在第4年和第5年将是净浮动利率的收取者，将承受最后两年的利率风险。她可以最初使用（流动性相当差的）4年期和5年期欧洲美元期货合约进行对冲，然后继续寻找这些支付的另一个交易对手。

结算和报价

结算的程序与远期利率协议非常相似。双方只交换利息，而不交换本金。假设在互换Q中，参考期是6个月，名义本金是1 000万美元。在每个参考期初，LIBOR都是已知的，但利息支付发生在参考期末。假设在第1个参考期结束时，6个月期LIBOR是$L_{t-1}=11\%$，那么在第12个月结束时，支付的利息将是（见图14—7）：

公司A向银行支付：$Q(L_{t-1}-r_{x,A})0.5=(0.11-0.099)(10\ 000\ 000)0.5=55\ 000$(美元)

银行向公司B支付：$Q(L_{t-1}-r_{x,B})0.5=(0.11-0.10)(10\ 000\ 000)0.5=50\ 000$(美元)

考虑一个美国互换交易者的例子，她想用6月期的LIBOR作为5年期互换的浮动利率（见表14—2)，她将有一个指示性的定价时间表（indicative pricing schedule）（对进行交易的那一天)，其中，固定利率基于当前5年期的国债加上价差。(实际上，这通常是平价债券收益。) 如果互换交易者同意支付固定，收取浮动，那么她的报价将是8.46%(＝固定利率＋46个基点的互换价差)并收取6月期的LIBOR。互换价差反映了交易者承受的“正常”利率风险。注意，表14—2中没有计划的浮动利率，这时，通常都被理解为浮动利率是6月期的LIBOR。这里需要考

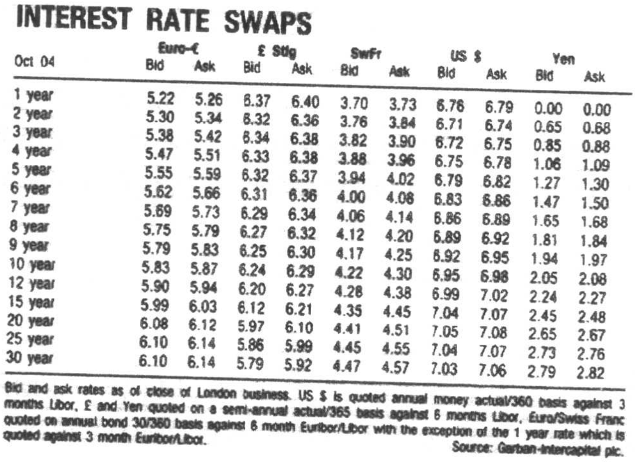
虑一个问题，LIBOR 是以 360 天作为 1 年进行报价，但美国国债虽然也是半年付息，却是以 365 天作为 1 年。因此，LIBOR 必须乘以（365/360）才能得到与国债相同标准的利率：

与国债等价的利率(对于 LIBOR 报价)＝LIBOR×(365/360)

表 14—2　　互换中指示性的定价时间表

到期时间	当前国债利率	银行支付固定	银行收取固定
4 年	7.95	4 年期国债＋ 40 个基点	4 年期国债＋ 50 个基点
5 年	8.00	5 年期国债＋ 46 个基点	5 年期国债＋ 56 个基点
6 年	8.05	6 年期国债＋ 58 个基点	6 年期国债＋ 68 个基点

交易者希望最终能匹配合约的固定利率，收取 8.56%的固定利率(＝8%＋56 个基点)，从而获得 10 个基点的买卖价差利润。买卖价差受到几个因素的影响，比如交易者之间的竞争，（暂时）持有未平仓头寸的风险，交易者在所有互换中的总净头寸情况等。图 14—8 给出了几种货币利率互换中的买卖利率，所有的固定利率相对于合适的 LIBOR 利率报价（通常是 3 个月或 6 个月）。可以看出，买卖价差非常小，这表明市场具有高度的流动性和竞争性。



INTEREST RATE SWAPS

Oct 04	Euro-€		£ Stlg		SwFr		US $		Yen	
	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask
1 year	5.22	5.26	6.37	6.40	3.70	3.73	6.76	6.79	0.00	0.00
2 year	5.30	5.34	6.32	6.36	3.76	3.84	6.71	6.74	0.65	0.68
3 year	5.38	5.42	6.34	6.38	3.82	3.90	6.72	6.75	0.85	0.88
4 year	5.47	5.51	6.33	6.38	3.88	3.96	6.75	6.78	1.06	1.09
5 year	5.55	5.59	6.32	6.37	3.94	4.02	6.79	6.82	1.27	1.30
6 year	5.62	5.66	6.31	6.36	4.00	4.08	6.83	6.86	1.47	1.50
7 year	5.69	5.73	6.29	6.34	4.06	4.14	6.86	6.89	1.65	1.68
8 year	5.75	5.79	6.27	6.32	4.12	4.20	6.89	6.92	1.81	1.84
9 year	5.79	5.83	6.25	6.30	4.17	4.25	6.92	6.95	1.94	1.97
10 year	5.83	5.87	6.24	6.29	4.22	4.30	6.95	6.98	2.05	2.08
12 year	5.90	5.94	6.20	6.27	4.28	4.38	6.99	7.02	2.24	2.27
15 year	5.99	6.03	6.12	6.21	4.35	4.45	7.04	7.07	2.45	2.48
20 year	6.08	6.12	5.97	6.10	4.41	4.51	7.05	7.08	2.65	2.67
25 year	6.10	6.14	5.86	5.99	4.45	4.55	7.04	7.07	2.73	2.76
30 year	6.10	6.14	5.79	5.92	4.47	4.57	7.03	7.06	2.79	2.82

Bid and ask rates as of close of London business. US $ is quoted annual money actual/360 basis against 3 months Libor, £ and Yen quoted on a semi-annual actual/365 basis against 6 months Libor, Euro/Swiss Franc quoted on annual bond 30/360 basis against 6 month Euribor/Libor with the exception of the 1 year rate which is quoted against 3 month Euribor/Libor.

Source: Garban-Intercapital plc.

图 14—8　利率互换（《金融时报》）

经《金融时报》同意后复制。

对互换交易者来说，对冲互换账户的市场风险和信用风险是非常关键的问题。在市场风险方面，她要时刻监视她的互换账户对于利率小幅和大幅变化的敏感度，并要考虑到使用期货和期权进行的抵偿性对冲。对冲一般通过欧洲美元期货进行。使用期权也是可能的，但这就需要频繁调整头寸，并决定对冲全部还是部分风险（如 delta，gamma 和 vega 对冲）。在后面的章节中，我们会看到，“在险价值”（Value at Risk）是衡量资产组合（包括互换、期货、期权等）的常用概念。它说明在一个给定时间内（如 1 天），在一个给定的概率下（如 95%），一个组合的最大损失会是多少。在一个互换协议中，任一时刻，交易者和公司 A 只会有一方面临破产风险（虽然两者会交换位置）。这是因为，在 $t>0$ 时，如果利率发生变化，互换对于交易者来说价值 $V_D>0$，那么 V_A 必然小于 0。这时只有公司 A 破产，交易者才会受到影响。如果交易者破产，那么公司 A 不会受到损失，它只需违约，停止向交易者支付就可以了（实际上，它一般不会违约）。

在固定—浮动互换（或其他远期和期权的场外交易）中，信用风险难以估计，通常的办法是通过信用增强（credit enhancements）来抵消总体违约风险的一部分，限制信用风险的最常见方式是某种形式的抵押（collateral），比如银行信用或是被信用机构持有的证券。当互换的市场价值发生变化时，所需抵押品的价值也随之变化。比如，如果互换一方被标准普尔或穆迪公司调低信用等级，那么它就要增加抵押品的数量。另一种办法是盯市，每隔一段时间，要重新评估互换的价值，根据评估值，互换一方对另一方进行相应的支付。互换的固定利率重新设置为使互换的价值为零的值，或者双方中止合约。很显然，这种方法与期货合约的保证金制度非常类似，不过这里没有清算所的介入。

净额结算（netting）是一种相当简单的信用增强方式。如果 $t>0$ 时，交易者和公司 A 的互换头寸是正的 500 万美元，它和另外一家公司的头寸是负的 400 万美元，那么它们可以达成协议，认为总的净头寸是 100 万美元。这样，如果公司 A 破产，那么交易者只面临 100 万美元的信用风险，而不是最初的 500 万美元。但需要指出的是，如果公司 A 破产，破产法庭不一定会确认这项协议具有法定效力。在英国，上议院认为地方当局签订互换合约是一种“越权行为”，它们介入互换合约便使得这些合约无效，失去价值。到目前为止，英国互换合约的信用损失中，有一半是因为这项司法制度的裁决造成的。互换违约造成的总损失历来很低（少于本金价值的 0.5%），这主要是因为互换合约通常涉及大型、资本充足的机构，它们的信用评级较高，具有遵守合约的“声誉”。

衡量（与抵消相对）场外证券（包括互换）的信用风险的新方法之一是所谓的 CreditMetrics 方法，它使用标准普尔等评级机构给出的信用等级的变化，来对交易对手的信用风险进行衡量。我们将在第 25 章对它和其他几个信用风险模型详细讨论，同时我们也将学习用信用衍生品来对冲互换的信用风险。

中止互换

假设一个互换协议已经存在了一段时间，协议中，公司 B 收到 LIBOR，支付固定，这个互换对于公司 B 的价值是100 000美元。公司 B 可以通过出售（sale）或指派（assignment）中止互换。这家公司只需找到愿意支付固定利率并收取浮动利率的第三方，就可以以100 000美元的价格出售这个互换，但第三方必须经互换交易者（即公司 B 的交易对手）的认可。另一种是采用逆合约（reversal）的方式，公司 B 签订一项新的互换协议，现金流正好与最初的互换相反。最后一种方法是购回（buyback），由公司 B 的交易对手支付100 000美元给公司 B，互换合约便中止了。

很多公司使用互换进行投机。如果它们认为利率将要上升，它们会签订支付固定，收取浮动的互换。虽然期货和远期利率协议也具有类似特色，但互换的交易费用却更低。

14.2 利率互换定价

为了给互换定价，我们可以把互换看做是合成的债券组合或是一系列远期合约。当然，两种

方法会得出同样的结果。这又是金融工程的一个实例，即互换等价于另外两个由债券或期货合约构成的组合。当互换开始签订时，它对互换双方的价值都是零。但随着时间的推移，利率会发生变化，互换规定支付的现值也会变化，于是它对于某一方可能具有正的价值，而对另一方，价值则为负。不过有一点让人迷惑的是，虽然支付的浮动利息（息票）发生了变化，但浮动利息的现值却基本保持不变。因为互换中的浮动利率支付等价于**浮动利率票据**（floating rate note, FRN），我们应该首先知道如何对后者定价。想了解细节的读者，可以阅读附录14.1，这里我们只进行说明性的讲解，得到远期利率票据的关键定价结果后，我们就转向互换的定价。

对初始的互换合约定价

浮动利率债券（票据）所支付的利息随现行的市场利率而调整，它由前一个付息日的利率决定。假设名义本金是 Q 美元，$t=0$ 时，LIBOR 是 L_0，那么 $t=0$ 时，我们已知 $t=1$ 时的浮动利息是 $C_1=L_0Q$。其后的浮动息票要根据未来的 LIBOR 进行调整，这在 $t=0$ 时是未知的。然而，我们在附录14.1中证明了，即使这些未来利息支付并不确定，我们仍有下面的结论：

> (1) 开始时，所有浮动利率债券收入的总价值与名义本金或面值 Q 相等。
> (2) 在每一个浮动利息支付后的时刻，它的价值也等于面值 Q。

如果息票支付是随着利率变化连续调整的，那么“浮息债券”的价格将始终等于它的面值。在两个付息日中间，利率通常不会剧烈变化，因此“浮息债券”的价格不会偏离它的面值 Q 太远。这个简化使得我们可以对互换合约进行定价。

为了在开始时对互换定价，需要找到互换中固定利率的值，使得互换最初价值为零。比如，假设你是一个互换交易者，你要决定一个名义本金为2 500万美元的“新的”固定—浮动（LIBOR）互换中的固定利率值。互换为期两年，每180天交换一次利息。LIBOR的期限结构为：6月期年利率12%，1年期年利率12.25%，18个月年利率12.75%，2年期年利率13.02%（所有利率为连续复利，每年为360天）。$t=0$ 时，浮动利率分支的价值等于面值2 500万美元。

> 对互换定价意味着计算出（固定）利率的值，使得互换的固定利率分支的价值等于2 500万美元（把它表达为单利计算的年息票率）。

我们有：

$$25=C\,\mathrm{e}^{-(0.5)0.12}+C\,\mathrm{e}^{-(1)0.122\,5}+C\,\mathrm{e}^{-(1.5)0.127\,5}+C\,\mathrm{e}^{-(2)0.130\,2}+25\,\mathrm{e}^{-(2)0.130\,2}$$

$$25=3.423\,2C+19.268\,6$$

因此，满足上式的半年固定息票是 $C=1\,674\,320$ 美元，而年息票率是13.39%($=C\times2/Q=1.674\,32\times2/25$)。如果互换交易者把固定利率定为13.39%，那么她将获得零期望利润。如果为了反映市场风险、（对冲的）交易成本和浮动利率支付方的信用风险，她就要把固定利率定在13.39%之上。

使用合成债券组合对互换定价

在 $t>0$ 时，互换对一方会有正的或负的价值，利率互换中的剩余现金流可以用两个债券的头寸复制。我们利用这种方式构造了**合成互换**（synthetic swap），通过对债券定价，我们就得到互换的价格。如果你是互换交易者（如银行），“收取浮动，支付固定”，那么在 6 个月参考期末，你的 10 000 万美元本金的净现金收入是 $10\ 000(L_{t-1}-t_X)(180/360)$万美元。这与做空(发行)10 000万美元固定息票证券，并利用所得现金做多(购买)浮动利率债券的现金头寸相同。期初时，没有现金交换(与互换相同)，在到期日，浮动利率债券被以面值赎回，这些现金(名义上)可以用来支付固息债券的 10 000 万美元面值。通过固息债券和浮息债券，我们创造出了合成互换。

考虑一个互换交易者（如银行），她**支付浮动，收取固定**，这个互换交易者的现金流绘于图 14—4 中，其中虚线代表未知的浮动利率支出，实线代表已知的固定利率收入。互换对于交易者的价值是固定收入和浮动支出之间的差的现值。互换合约开始时，互换的价值是零，互换的每一方不期望有净收益（忽略买卖价差）。如果一段时间之后，利率下降，互换将对交易者具有正的价值。令：

V=互换的价值

BX=互换底层的固息债券的价值

BF=互换底层的浮息债券的价值

Q=互换合约中的名义本金

n=剩余的 6 个月参考期的数量

r_i=对应于到期日 t_i 的（连续复利）收益

在互换开始($t=0$)，$V=0$，但是在互换的生命期中，互换对于交易者的价值是

$$V=BX-BF \tag{14.1}$$

每 6 个月固定的息票支出是 $C=(r_X/2)\ Q$，其中 r_X 是互换规定的固定利率。如果我们已经进入互换 3 个月（见图 14—4 的 t 时刻），下一次支付将是在 3，9，15，…个月以后，这些固定利息收入的现值是

$$BX(在\ t=3\ 个月)=\sum_{i=1}^{n} C\,\mathrm{e}^{-r_i t_i}+Q\mathrm{e}^{-r_n t_n} \tag{14.2}$$

其中，r_i 为连续复利计算的即期利率，$t_i=0.25$，0.75，1.25，…（这些折现率应该反映互换交易对手的风险等级）。

下面考虑互换的浮动分支。如果在支付息票后马上对互换中的浮动支付估价，会得到 $BF=Q$。在付息日之间，我们要利用这样一个事实，即在下一个付息日之后的时刻，BF 会等于 Q。在 $t=3$ 个月时，到下一个付息日的时间 $t_1=0.25$，因为下一次支付浮动利息的时间距离 t 还有 3 个月（即距离 $t=0$ 有 6 个月）。把这些支付折现到互换的 $t=3$ 时，我们有（参见附录 14.1 公式(A14.7)）

$$BF(在\ t=3\ 个月)=(Q+C^*)\mathrm{e}^{-r_1 t_1} \tag{14.3}$$

其中，r_1 为从 $t+3$ 到 $t+6$ 时段上按连续复利计算的即期利率，$C^*=Q\ (\mathrm{LIBOR}_0/2)$ 为在时刻 t 知道的第一次浮动利息支付（基于前一调整日期得到的 LIBOR，在这里就是互换协议签订

时，$t=0$ 时的 LIBOR）。这一点确实有一些让人迷惑，虽然所有未来浮动利息的数量并不确定（除了下一次），但是可以从公式（14.3）中看出，等号右边所有项都是已知的。原因在于，每次付息后，未来浮动利率会调整到使未来浮动利息的总现值等于面值。因此，BF 在付息日之间（像 t）的价值，依赖于下一已知的利息支付（在 $t=6$ 时，$C^*/2$）加上面值 Q。

从公式（14.2）中，可以看出 r_i（$i>1$），如果利率（$i>1$）上升，那么固定利息的收入现值将下降，而公式（14.3）中浮动利息的价值将保持不变。因此，互换对于交易者的总价值下降（因此互换对于另一方的价值将会上升）。

当然，如果互换交易者**支付固定，收取浮动**，那么互换的价值对于互换交易者是

$$V=(BF-BX) \tag{14.4}$$

表 14—3 的例子是互换对于支付浮动，收取固定的银行的价值。

互换作为一系列远期协议

互换涉及在不同已知时间的净支出或收入（见图 14—4）。在互换开始时（$t=0$），这些净支出价值是零。然而，如果互换存在了一段时间，那么在时刻 t（$t>0$），根据利率的变化，它可能具有正的或负的价值。互换中的净支出就像一系列远期合约的收益（或者更精确地说，像一系列远期利率协议）。

表 14—3　互换价值：支付浮动，收取固定

银行以 6 月期 LIBOR 支付浮动，以年 8%利率收入固定（半年支付）
互换剩余时间＝1.25 年
支付时期在 $t_i=0.25$，0.75 和 1.25 年
名义本金/面值 $Q=100\ 000\ 000$（美元）
固定（息票）支付 $C=(100\ 000\ 000$ 美元$)0.08/2=4\ 000\ 000$(美元）
LIBOR 在最后调整日是 10.2%（半年支付）
因此下一个（已知）浮动利率支付是 $C^*=(100\ 000\ 000$ 美元$)(0.102/2)=5\ 100\ 000$(美元)
当前用连续复利计算的即期利率分别是：3 月期 $r_1=10\%$，9 月期 $r_2=10.5\%$，15 月期 $r_3=11\%$
在 $t=1.25$ 年收取固定的价值为：

$$BX=\sum_{i=1}^{n}C\,\mathrm{e}^{-r_it_i}+Q\,\mathrm{e}^{-r_nt_n}=4\mathrm{e}^{0.25(0.10)}+4\,\mathrm{e}^{-0.75(0.105)}+104\,\mathrm{e}^{-1.25(0.11)}=98.24(\text{美元})$$

$$BF=(Q+C^*)\mathrm{e}^{-r_1t_1}=(100+5.1)\mathrm{e}^{-0.25(0.10)}=102\ 510\ 000(\text{美元})$$

对于“收取固定，支付浮动”一方，互换的价值＝$BX-BF=-4\ 270\ 000$（美元）

如果你持有期货合约至到期日，那么它等价于一个远期合约。比如，假设你做多 3 月期的欧洲美元期货，它 1 年后到期，收益率为 8%（名义本金是 100 万美元）。这个合约锁定了 1 年后开始的期限为 3 个月的利率 8%。如果利率在下一年下降，比如 7%，期货价格将要上升，到期时会获得收益 2 500 美元。（＝100 基点×刻度值 25 美元）。互换中，单一的固定支付就如同初始的远期（交割）价格 F_0，不确定的浮动利率互换支付对应于在 t 时的未知价格 F_t。因为互换包含一系列未来的净支付，它就像一系列远期合约一样，每个合约对应于一个互换支付日。

如果互换等价于一系列远期/期货合约，那么互换存在的理由是什么呢？互换之所以存在，是因为它低廉的交易费用和方便性。比如，互换交易者为交易的双方保密，进行匿名交易，而期货市场中，一切都是透明的。相对于期货合约，互换是场外证券，可以对名义本金、付息时间等

进行定制（虽然它们也涉及信用风险，中止合约较为困难或很昂贵）。用期货来创造合成互换需要到期日很长的期货合约，而到期时间超过两年的期货流动性很差，甚至根本不存在。这里的一个例外是**欧洲美元期货**，它的到期时间可以在 5 年以上。这是由于美国的互换交易者使用这种合约来对冲他们的净浮动利率互换，这就创造出一个非常活跃的长到期时间欧洲美元期货市场。从技术的角度看，这是一种交叉对冲，因为互换的浮动利率是由 LIBOR 决定，而期货的标的资产是欧洲美元利率。但是，（对于给定的到期时间）这两种利率倾向于一起移动。

在时刻 t，将要收到的第一笔浮动利息是已知的，它取决于 $t=0$ 时的初始浮动利率 L_0。因此，半年的利息支付是 $C^*=Q(L_0/2)$。如果 r_X 是双方同意的固定利率，那么固定利息是 $C=Q(r_X/2)$。如果第一次浮息日是 t_1，那么"收到浮动，支付固定"的现值是

$$(C^*-C)\mathrm{e}^{-r_1t_1}=Q[(L_0-r_X)/2]\mathrm{e}^{-r_1t_1} \tag{14.5}$$

每半年付息一次的**收到浮动，支付固定**互换的未来收益是

$$C^*-C=Q(L_{t-1}-r_X)/2 \tag{14.6}$$

但这个收益与支付 C^* 而换得交割价格 C 的远期合约的收益相同。它与一个标准的远期合约的区别是 LIBOR 是在实际支付发生 6 个月之前的利率。然而，在第一次利息支付后，在任何浮动利率支付日期 t，LIBOR 都是未知的。但我们可以通过任意两个 t 时刻已知的合适的即期 LIBOR，计算出 LIBOR 的隐含远期利率，从而计算出市场对于这些远期利率的最佳估计。那么我们可以把未知的 L_{t-1} 用合适的远期利率 f_i 代替。如果 f_i 是任意实际付息日 i（$i\geqslant 2$）之前 6 个月的**远期**（LIBOR）利率（每半年支付），那么 t 时刻对任一未来浮动利息收入的最佳估计是 $C^*=(f_i/2)Q$。这个浮动利息收入减去固定利息支出的现值等价于一个远期合约多头的价值，这个远期合约的远期价格是 $F_t=(f_i/2)Q$，合约中的交割价格是 $F_0=C$。当我们讨论远期合约的价值时，我们得到

$$V_{ft}=(F_t-F_0)\mathrm{e}^{-r(T-t)} \tag{14.7}$$

根据我们的互换合约，等价的合成远期头寸具有的价值是

$$V_i=[(f_i/2)Q-C]\mathrm{e}^{-r_it_i} \tag{14.8}$$

互换的总价值因此是这一系列远期合约的价值之和：

$$V(\text{收到浮动,支付固定})=\sum_{i=1}^{n}(0.5f_iQ-C)\mathrm{e}^{-r_it_i}+(C^*-C)\mathrm{e}^{-r_1t_1} \tag{14.9}$$

毫无疑问，使用合成债券组合或一系列远期合约（FRA）给出的互换价格完全相同。

14.3 货币互换

在最简单的货币互换中，交易双方将用不同货币结算的债务进行交换。货币互换从背对背贷款和平行贷款演化而来，它们最初是为了避开外汇控制而采取的手段（特别是在浮动汇率制出现之前，外汇交易通常要交纳一定的税赋）。背对背贷款涉及一家以美元融资的美国公司和一家以英镑融资的英国公司，它们同意把本金和利息"互换"。平行贷款是一家"国内"公司向一家国外公司的子公司贷款。例如，一家美国公司以美元融资，并把款项借给一家英国公司在美国的子

公司，同时，英国的母公司以英镑融资，并把它借给这家美国公司在英国的子公司。

现在，货币互换存在的原因可能是这样：一家美国公司（山姆大叔）在法国有一家子公司，想以法国法郎（FRF）融资，来扩展公司在法国的业务。子公司在法国的收入，将用来偿还该笔债务。同样，一家法国公司（埃菲尔）在美国有一家子公司，想发行美元债券，并用子公司的美元收入来偿还债务。这可以减小外汇风险。

但是，对于山姆大叔来说，直接在法国银行融资很昂贵，埃菲尔在美国也面临同样的问题，因为两家公司都还没有被国外的贷款市场所认同。然而，如果山姆大叔能够较为便宜地在美国市场借入美元，埃菲尔能够在法国市场上较便宜地借入法郎，那么双方可以在“本国”市场上借款，然后互换本金和利息（这不同于利率互换，在利率互换中，本金只是“名义”的，互换开始和结束都不交换本金，货币互换却不同）。互换以后，埃菲尔实际上借入了美元，山姆大叔实际上借入了法郎。因此情况变成：

> 山姆大叔希望最终借入法郎，但是发现最初借入美元更便宜。
> 埃菲尔希望最终借入美元，但是发现最初借入法郎更便宜。
> 他们各自借入“低成本”的货币，然后协议进行货币互换。

互换使他们实现了各自的目的（最低的利息）。假设山姆大叔希望借入 5 亿法国法郎，扩展它在法国的汉堡连锁店，埃菲尔希望借入 1 亿美元扩展它在美国的眼镜连锁店。他们同意借入各自的本国货币，并进行货币互换。互换开始时，他们互换本金（见图 14—9）。

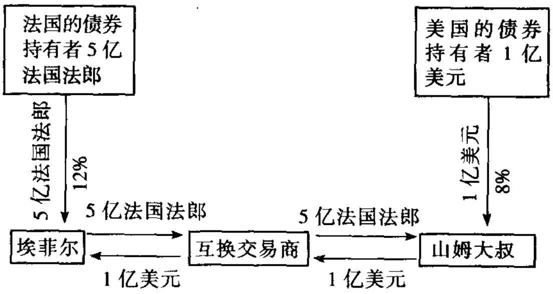


图 14—9　货币互换的开始

假设山姆大叔和埃菲尔面临的利率如表 14—4 所示。因为他们面临的两种利率之差不同，所以货币互换值得进行。

表 14—4　**借入利率**

	美元	法国法郎
山姆大叔（美国公司）	8.0%	11.5%
埃菲尔（法国公司）	10.0%	12.0%
绝对差异（埃菲尔一山姆大叔）	2%	0.5%

净比较优势或者质量差幅差异＝2%－0.5%＝1.5%

埃菲尔具有借入法郎的比较优势。

注：最终，埃菲尔想借入美元，山姆大叔想借入法郎，这是互换产生的动机。

埃菲尔的信用等级没有山姆大叔高，因此它在两个市场上都要付出更高的利息。但是，埃菲尔在法郎市场具有比较优势，因为它在法郎市场上支付的利息比山姆大叔高 0.5%，但在美元市场上要高 2%。（当然这也说明山姆大叔在美元市场具有比较优势。）从图 14—8 中，我们得到：

埃菲尔以 12%借入法郎，
山姆大叔以 8%借入美元，
他们互换各自的支付，因为：
山姆大叔希望最终借入法郎，
埃菲尔希望最终借入美元。

因为埃菲尔在借入美元上具有比较优势，互换可以使双方都降低成本。净比较优势（或质量差幅差异）是 2%－0.5%＝1.5%（见表 14—4），它可以由山姆大叔、埃菲尔和互换交易者共同分享。让我们（随意地）假设：

互换交易者得到 0.4%，
山姆大叔得到 0.3%，
埃菲尔得到 0.8%。

山姆大叔的收益是 0.3%，表明它要对互换中的法郎分支支付 11.5%－0.3%＝11.2%（否则它要直接支付 11.5%）。埃菲尔的收益为 0.8%，表明它的美元支出从直接成本的 10%减小到互换中的 9.2%（见表 14—4）。

图 14—10 给出了一种可能的结果，为了简化问题，我们假设互换交易者以 8%的利率支付给山姆大叔美元，以 12%的利率支付给埃菲尔法郎，因此两家公司的收入和支出得到匹配。图 14—10 中的要点有：

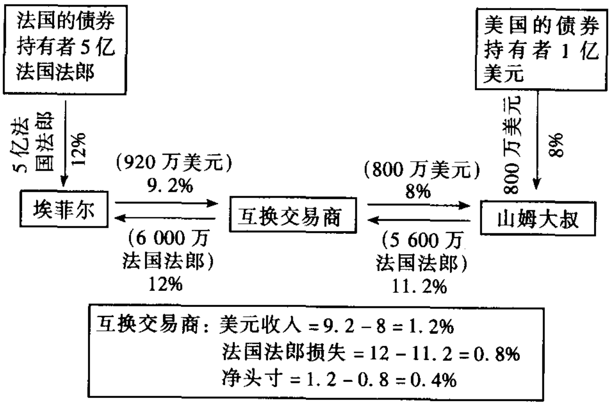


图 14—10　货币互换的利息流动

- 山姆大叔以 8%的利率借入美元，但也从交易者那里得到 8%的美元利率，这使山姆大叔的美元净支付为零。
- 山姆大叔以 11.2%的利率付给交易者法郎（低于它直接借入的利率 11.5%，见表14—4）。因此，山姆大叔的收益是 0.3%（＝11.5%－11.2%）。

- 埃菲尔以 12%的利率借入法郎，但也从交易者那里得到同样的法郎利率，这使它的净法郎支付为零。
- 埃菲尔以 9.2%的利率付给交易者美元（低于它直接借入的利率 10%，见表 14—4）。因此，埃菲尔的收益是 0.8%(=10%−9.2%)。

互换交易者的头寸是：

- 美元收益百分比=9.2%−8.0%=1.2%
  100 000 000 美元的绝对收益=(9 200 000−8 000 000)=1 200 000(美元)
- 法国法郎损失百分比=12.0%−11.2%=0.8%
  500 000 000 法国法郎的绝对损失=(0.12−0.112)500 000 000 法国法郎=4 000 000(法国法郎)
- 净收益百分比=1.2%−0.8%=0.4%

互换各方的总收益(百分比)是

“山姆大叔”+“埃菲尔”+互换交易者=0.3%+0.8%+0.4%=1.5%　　(14.10)

这与表 14—4 中的比较优势相等。互换交易者的净收益涉及两种互换：120 万美元的净收入和 400 万法国法郎的净支出。然而，在互换协议的每一年，交易者可以使用外汇期货或期权进行对冲。交易者同时要承担信用风险。

如果我们使埃菲尔只从交易者那里以 11%的利率得到法国法郎，但是以 12%的利率支付给债券持有者，那么互换交易者承担的一部分外汇风险就转移到埃菲尔身上。在互换到期时，山姆大叔必须向埃菲尔提供 5 亿法国法郎，埃菲尔也必须向山姆大叔提供 1 亿美元，这样他们才能向债券持有者偿还债务（即图 14—9 中的箭头的方向反过来）。在货币互换中，本金和利息都要交换。

14.4　货币互换的定价

互换对于山姆大叔的净效果是把 8%的 1 亿美元的债券转换成 5 亿法国法郎的债券。互换意味着山姆大叔在互换期初收到法国法郎，但是要定期支付法国法郎的利息，并在互换期末支付法国法郎本金（见图 14—10）。同时，山姆大叔定期收到互换交易者支付的美元利息，互换期末从相对方（即埃菲尔）那里收到 1 亿美元的本金。从山姆大叔的角度来看，互换等价于一个合成的头寸，包括：

> **持有（做多）美元结算的债券，发行法郎结算的债券。**
> **收取美元，支出法郎。**

如果美元—法郎在互换期初的汇率是 0.2 美元/法国法郎，那么最初 1 亿美元与 5 亿法国法郎本金的交换表明互换的价值为零。假设互换的利率是固定的，那么互换期间，从山姆大叔的角度看来，惟一的不确定性是汇率的未来价值。山姆大叔拥有法郎债务，因此如果未来法国法郎对美元走强，那么互换对于山姆大叔来说意味着损失（对埃菲尔来说是收益）。

山姆大叔具有法郎的支出/债务，因此法国法郎升值（美元贬值）意味着互换的损失。

法国法郎未来的升值对于互换交易者未平仓头寸的影响取决于它在每种货币上的资产/负债头寸。图14—10中，交易者具有净120万美元利息收入和净400万法国法郎债务（支出）。因此，法国法郎升值将会给交易者造成损失。

作为债券组合的货币互换

从山姆大叔的角度来看，互换的价值是成本为11.2%的法国法郎债券空头和成本为8%的美元债券多头之差。即期的利率和汇率是已知的。给定互换一方的支付，那么另一方的支付要调整到使互换的期初价值为零的程度。现在假设互换存在了一段时间，那么互换在时刻 t 的美元价值使

$$V\text{美元}=B_{\mathrm{D}}-(S)B_{\mathrm{F}} \tag{14.11}$$

其中，B_{F} 为互换底层的法国（国外）债券的法国法郎价值，B_{D} 为互换底层的美元债券的美元价值，S 为汇率美元/法国法郎。

假设5亿法国法郎对1亿美元的互换合约已经存在了1年，还有另外3年到期（每年支付）。汇率从最初值0.2美元/法国法郎变成现在的0.22美元/法国法郎（即法国法郎升值10%）。假设1年后，（无风险）利率的期限结构在美国和法国都是平坦的，两个国家的无风险利率是 $r_{\mathrm{US}}=9\%$，$r_{\mathrm{F}}=8\%$（连续复利）。这里要记住，互换合约商定的固定（息票）利率是山姆大叔支付5亿法国法郎本金的11.2%，收到1亿名义美元本金的8%。本例中，山姆大叔收到美元，支付法国法郎。

山姆大叔的美元息票收入 $=0.08\times 100\,000\,000=8\,000\,000$（美元）

山姆大叔的法国法郎息票支出 $=0.112\times 500\,000\,000=56\,000\,000$（法国法郎）

$$B_{\mathrm{D}}=8\mathrm{e}^{-(0.09)}+8\mathrm{e}^{-(0.09)2}+108\mathrm{e}^{-(0.09)3}=96.43(\text{美元})$$

$$B_{\mathrm{F}}=56\mathrm{e}^{-(0.08)}+56\mathrm{e}^{-(0.08)2}+556\mathrm{e}^{-(0.08)3}=536.78(\text{法国法郎})$$

$$V\text{美元}=B_{\mathrm{D}}-SB_{\mathrm{F}}=96.43-0.22(536.78)=-21\,660\,000(\text{美元})$$

因为协议拟定以后法国法郎升值，互换对于山姆大叔的价值下跌，它为了支付法国法郎，需要更多的美元。当然，互换对于埃菲尔的价值增加了。合成债券的收入/支出要以无风险利率（与国家有关）折现，因为我们假设互换的收入/支出具有零违约风险。

货币互换作为远期合约的集合

山姆大叔每年都收到息票800万美元，即 $C_{\$}=8\,000\,000$ 美元，以及互换中止后收到本金 $M_{\$}=1$ 亿美元。同时，他每年支付息票5 600万法国法郎，即 $C_{\mathrm{F}}=5\,600$ 万法国法郎，以及互换中止后支付本金 $M_{\mathrm{F}}=5$ 亿法国法郎。这就是一系列典型的期货合约，收美元付法国法郎。在这个收美元付法国法郎的例子中，每年远期（以美元计的）现金流对于收取美元支付法国法郎一方的价值计算如下：

$$(C_{\$}-F_iC_{\mathrm{F}})\text{美元} \tag{14.12}$$

其中，Fi 是指从当前（在本例中，即日指互换起1年）起到交割日的 t_i 点为止，美元—法

国法郎的远期汇率。在将来的交割点 t_i，当前的远期汇率（在 t 时点）计算方式为

$$F_i = S_t e^{(r_{US}-r_F)t_i} \tag{14.13}$$

在公式（14.12）中，我们必须根据美国的无风险利率，把到 t_i 点止累积的现金流折算成现值。这样，每个净现金流今天的价值为

$$(C_\$ - F_i C_F)\ e^{-r_{US}t_i}\ 美元 \tag{14.14}$$

如果今天的即期汇率为 $S_t=0.22$ 美元/法国法郎，且利率水平为 $r_{US}=9\%$，$r_F=8\%$，那么，现在的远期汇率为：

$F_1=0.22e^{0.01(1)}=0.222\ 2$ 美元/法国法郎

$F_2=0.22e^{0.01(2)}=0.224\ 4$ 美元/法国法郎

$F_3=0.22e^{0.01(3)}=0.226\ 7$ 美元/法国法郎

那么，收取美元、支付法国法郎的互换合约持有者的互换头寸的价值就可以由公式（14.14）给定的条件（贴现率为：$r_{US}=9\%$）算出：

$[8\ 000\ 000$ 美元$-0.0222\ 2$ 美元/法国法郎$(56\ 000\ 000$ 法国法郎$)]e^{-0.09(1)}$

$=-4\ 060\ 000$(美元)

$[8\ 000\ 000$ 美元$-0.0224\ 4$ 美元/法国法郎$(56\ 000\ 000$ 法国法郎$)]e^{-0.09(2)}$

$=-3\ 814\ 000$(美元)

$[108\ 000\ 000$ 美元$-0.0226\ 7$ 美元/法国法郎$(56\ 000\ 000$ 法国法郎$)]e^{-0.09(3)}$

$=-13\ 870\ 000$(美元)

总和$=-21\ 660\ 000$ 美元

所以，1 年后，该互换合约对于山姆大叔来说是有价值的。支付法国法郎的互换合约的价值为$-2\ 166$ 万美元，这与原来我们将互换考虑成债券的投资组合得出的价值是相同的（严格证明参见附录 14.2）。

14.5 其他类型的互换

有很多种互换为满足特定投资者的需要而被设计出来。在一个**基差互换协议**（basis swap）中，交易的双方约定的是浮动利率的支付，这些利率可以参考不同的浮动利率。例如，90 天的 LIBOR 利率、180 天的 LIBOR 利率，或者是 90 天的短期国债利率。这些互换被称为**浮动—浮动利率互换**（floating - floating swap）。该种互换可以使协议的当事人将一系列的浮动利率支付转换为另一系列稍微有些不同的支付。关于这种类型互换的定价方式可以参见附录 14.3。尽管 LIBOR和短期国债利率（相同到期日）倾向于同时发生变动，但差幅也会发生变化。这样一来互换就会产生净支付。另外一种基差互换协议是**收益曲线互换**（yield curve swap）。在该种互换协议中，双方都支付浮动利率，但是一方支付的是短期浮动利率（例如，3 个月期的短期国债利率），另一方支付的 20 年期的长期国债利率。如果收益曲线向上倾斜且在互换的时间期限内比较平坦，那么此时支付 20 年期长期国债利率，收取短期利率的一方将会获利。一个收益互换对于储贷机构（S&L）来说会比较有用，它们（主要）拥有的是短期的浮动利率负债（储蓄）和（一部分）长期的浮动利率资产（可变利率的抵押票据）。如果短期利率相对于长期利率来说上升了

（也就是说如果收益曲线变得平坦），那么储贷机构就会遭受损失。但是，它可以通过购买一个收取短期利率（支付长期利率）的互换协议来抵消这种风险。

如果一个利率互换协议中的名义本金在互换期间里可以减少，那么这种互换就叫做**本金递减互换**（amortising swap）。例如，如果互换协议一方的浮动利率支付与一种有抵押支持的证券指数相联系，抵押的本金额随着时间的增加而减少，那么此时一个本金递减互换就是合适的。与此相反，如果本金额随着时间的增加而增加，那么该种互换就称为**本金递增互换**（accreting swap）。这种类型的互换也很有用处。例如：一个建筑公司的建筑成本5年内每年增加1 000万美元，并且还获得了一项浮动利率的**交错到期贷款**（staggered loan）。那么此时该建筑公司就可以通过本金递增互换将逐步增加的浮动利率负债转换为逐步增加的固定利率负债。将本金递减互换与本金递增互换的特征结合起来，我们就可以创造出这样一种互换：它的名义本金是可变的，而且在互换期间内增加和减少。或者说，一个人可以购买一个特制的互换协议，该协议具有可变的名义本金。这种互换被称为**“过山车互换”**（rollercoaster swap）。一个过山车互换协议可以对支付浮动利率的银行贷款进行对冲，这类贷款用于某些项目，例如建一个发电站，项目实施后所产生的利润可以用来偿付未偿还的银行贷款。

异质利率互换（diff swap）或 **quanto 互换**是一种货币和利率的合成互换。在该互换协议中一方支付的是外国货币的利率，但是其名义本金还是本国货币。例如，一家美国公司可能会支付以一定数量的美元为本金的 EURIBOR 利率，而另一家则可能会支付以同样数量的美元为本金的 LIBOR 利率。EURIBOR 利率的支付者寄希望于欧元利率的下跌，但是却可以避免任何可能出现的货币风险。

如果交易双方愿意在将来的某个时候安排互换，那么**远期互换**（forward swap）就比较合适。它是互换的一个远期合约。一个标的资产是互换的期权被称为**互换期权**（swap option 或 swaption）。例如，一个互换期权的购买方有权（而非义务）收取一固定的互换利率，该权利从期权到期的那天开始生效。如果你选择收取固定利率（而支付浮动利率），那么该互换期权就被称为**收取者互换期权**（receiver swaption），相反的就是**支付者互换期权**（payer swaption）。我们将在后面的章节中讨论远期互换和互换期权。

14.6 本章摘要

- **互换合约**可以使交易的一方与另一方交换现金流。它们是**场外交易工具**。
- 在**普通香草型的利率互换**中，交易的一方将固定利率的支付换成收取浮动利率的现金流。利率互换合约中的名义本金不发生变换。
- 在**货币互换**中，一种货币的本金和利率支付被换成收取另外一种货币的本金和利率。
- **互换交易者**（通常是银行）是互换交易的一方，他们总是会尽量去匹配交易对手的现金流。
- 如果**互换交易者**不能立即找到利率互换交易的另一方，她通常会运用合适的**（欧洲货币）期货合约**（或者偶尔用利率期权）来预防风险。互换交易者通过在互换交易中的买卖价差来获利。

- **互换在开始时具有零价值**。这使我们能够在开始时**对互换定价**，即决定互换中的固定利率。随后的利率变化（对于利率互换）和汇率变化（对于货币互换）会造成互换对某一方的价值增加或减少。
- 互换合约一方产生的现金流相当于持有两种债券的多头和空头。这种**合成互换**可以使我们在互换合约的剩余时间内计算它的价值。同样，互换也可看成是**一组远期合约**（或者FRA）。
- **“奇异”的OTC互换**可以被定制成产生任何形式的现金流的互换合约（例如，基差和过山车型的互换）。另外还有互换的**期货和期权**（参见第15章和第18章）。

章末练习

1. 仓储互换合约意味着什么？

2. 为什么一个违约的利率互换所产生的期望损失会比相同本金额的违约银行贷款产生的期望损失小？

3. 请解释信用风险与市场风险的差别。是否可以通过互换或其他的头寸来预防这两种风险？

4. 公司A和公司B接受了每年利率如下所示的1 000万美元、7年期的贷款：

	固定利率	浮动利率
公司A	6.0%	LIBOR+0.1%
公司B	7.4%	LIBOR+0.6%

公司A想得到一项浮动利率的贷款，而公司B要求得到固定利率的贷款。现在请设计出一个互换，使它能够向作为中介机构的银行每年提供0.1%的收入，且该互换为公司A和公司B带来的收益相同。（提示：找一家支付和收取LIBOR浮动利率的银行。）

5. 一个本金额为1 000万美元的利率互换还剩10个月的时间。在该互换中，6个月的LIBOR（浮动利率）被换成了每年6%的固定利率（也就是每6个月付息一次，利率是3%）。目前的收益曲线是平缓的，所有期限的即期利率都为每年5%，并且是连续复利。6个月的LIBOR在两个月前事先确定的利率是每年3.6%（以单利表示）。

请问：(a) 这个已经开始2个月的互换对于支付浮动利率一方的价值是多少？

(b) 对于支付固定利率一方的价值是多少？

(c) 请把该互换分解成a) 固定利率和浮动利率的债券组合。b) 一组远期合约。

（提示：因为期限结构在年连续复利为10%时是平缓的，所以所有的期货、现货和远期利率都等于10%，并且是连续复利。）

6. 假设在美国和欧洲大陆利率的期限结构是平坦的。美元年利率$r_{\text{US}}=6\%$，而欧元的年利率$r_{\text{E}}=3\%$。汇率$S=1.0$欧元/美元。在互换协议中，一金融机构每年以欧元支付（连续的）3%的利息，以美元收取（连续的）5%的利息。以两种货币表示的本金额分别为1亿美元和0.9亿欧元。支付每年都被交换。该互换还将持续2年。

将互换看成是一种由（a）债券和（b）期货合约复合而成的投资组合。对于金融机构来说，该互换的价值是多少（假设所有的利率都是连续复利）？

7. 一个每年都要支付的互换还剩 15 个月。在该互换中，利息支付由原来的本金额为 5 000 万澳大利亚元，复利为 6%，转换成本金额为 3 000 万美元，复利为 4%。在美国和澳大利亚，利率的期限结构在 $r_{US}=8\%$处和 $r_{AS}=10\%$处是平坦的。（这些利率都为连续复利。）汇率为 0.65 美元/澳大利亚元，将互换看成是一种由（a）债券和（b）期货合约复合而成的投资组合。对于收取美元支付澳元的一方来说，该互换的价值是多少？

附录 14.1　浮动利率票据的估价

浮动利率票据（FRN）是这样一种金融工具，它支付的是浮动利率的事先确定的本金额为 Q 美元的息票。在重新安排利息支付时所用的浮动利率通常以 LIBOR 为基础（例如LIBOR+50 个基点）。举一个传统的例子，考虑一个 3 年期的 FRN，其利息在每年年末支付。在第 1 个支付年度，所参考的利率是年初（也就是说 $t=0$）已确定的 LIBOR 利率 r_1，第一次支付的利息就是 r_1Q 美元。第 2 年年末应支付的利息其利率以第 1 年年末的 LIBOR 利率为基础，该利率在 $t=0$ 时是未知的。但是，在 $t=0$ 时我们可以用远期利率对它做出最好的估计。同样的道理，我们对第 3 年年末的应付利息做出最好的估计是（$f_{23}Q$）。如果一个公司在 $t=0$ 时发行了一个 FRN，收到 Q 美元。该 FRN 就可以在二级市场上被买卖。其持有者可以在该 FRN 到期时收到 Q 美元的本金（见图 A14—1）。我们想要回答的问题是：

- 为了将来能够收到（不确定的）利息且 3 年后收到 Q 美元的本金，在 $t=0$ 时你需要支付的价格是多少？
- 在任何一个支付日（也就是说在第 1 年年末、第 2 年年末、第 3 年年末）后，FRN 的即刻价值是多少？
- 在任意两个支付日之间 FRN 的价值是多少？

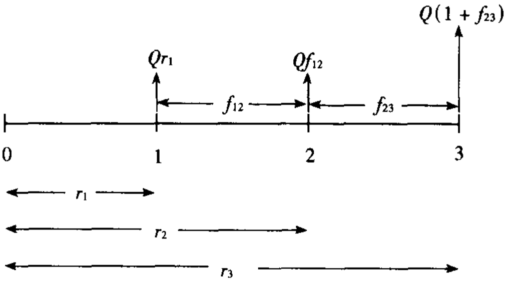


图 A14—1　在 $t=0$ 时 FRN 的现金流

$t=0$ 时 FRN 的价值

对于购买者来说，在 $t=0$ 时 FRN 的价值是将来预期支付的贴现现值

$$V_0=\frac{Qr_1}{(1+r_1)}+\frac{Qf_{12}}{(1+r_2)^2}+\frac{Q(f_{23}+1)}{(1+r_3)^3} \tag{A14.1}$$

可以用以下公式来替换远期利率：

$$(1+r_1)(1+f_{12})=(1+r_2)^2 \tag{A14.2a}$$

和

$$(1+r_2)^2(1+f_{23})=(1+r_3)^3 \tag{A14.2b}$$

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{Qr_1}{(1+r_1)}+\frac{Q}{(1+r_2)^2}\left[\frac{(1+r_2)^2}{(1+r_1)}-1\right]+\frac{Q}{(1+r_3)^3}\left[\frac{(1+r_3)^3}{(1+r_2)^2}\right] \\ &= \frac{Qr_1}{(1+r_1)}+\frac{Q}{(1+r_1)}=Q \end{aligned} \tag{A14.3}$$

这样，我们就得出了一个与直觉相反的结果，尽管将来所有息票利息（第一次支付的利息除外）的支付是不确定的，但是为了能够收回所有的利息且在 $t=3$ 时能够收到 Q 美元的本金，你在 $t=0$ 时需要支付的价格也不过仅仅是 $V=Q$ 美元。因此，如果 Q 美元是在 $t=0$ 时为购买 FRN 所需支付的现金总额，那么该笔交易的净价值就是零。

FRN 的初始价值为零。

第一个支付日

假设你在 $t=1$ 时刚刚收到第一笔利息支付。那么在 $t=1$ 时剩余应付利息的价值是多少呢？在 $t=1$ 时，我们现在重新约定此时为 $t=0$，那么我们就有了一个新的已知的 r_1 和新的 f_{12}（我们本应该用 r_1，$t+1$ 和 f_{12}，$t+1$ 来表示的，但是这样符号过于复杂）。此时的价值

$$V_1=\frac{Qr_1}{(1+r_1)}+\frac{Q(1+f_{12})}{(1+r_2)^2}=Q \tag{A14.4}$$

这里我们用公式（A14.2a）将（$1+f_{12}$）替换出来。所以：

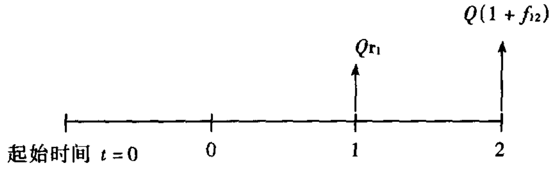
在一次利息支付后，FRN 的即刻价值回到了平价状态（$=Q$）。

这是个有趣而又有用的结论。因为除了下一次和最后一次的支付外，中间的利息支付都是不确定的。但是所有这些将来支付的利息在一个支付日后的即刻价值都等于 Q 美元（见图 A14—2）。

支付日期间

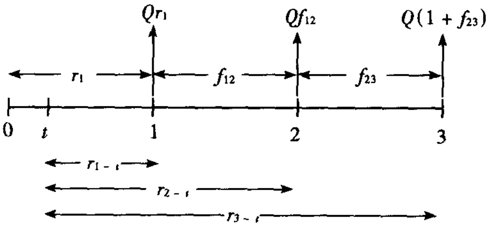
在图 A14—3 中，我们描述了在时间 $t=0.25$ 年时互换的现金流。关于互换定价的原理与原来还是相同的，惟一不同的是表达方式有些复杂。在时间 t，贴现率为 r_{1-t}，r_{2-t}和 r_{3-t}。相应地，下一次利率支付的时间为 0.75 年、1.75 年和 2.75 年。因此

$$V_t=\frac{Qr_1}{(1+r_{1-t})^{1-t}}+\frac{Qf_{12}}{(1+r_{2-t})^{2-t}}+\frac{Q(f_{23}+1)}{(1+r_{3-t})^{3-t}} \tag{A14.5}$$



注意，我们把第 1 年年末重新定为 $t=0$。

图 A14—2　1 年后 FRN 的现金流



注意，如果 $t=$ 进入互换后的 0.25 年，那么 $1-t=0.75$ 年，$2-t=1.75$ 年，$3-t=2.75$ 年。

图 A14—3　支付日之间 FRN 的现金流

用以下公式来替换远期利率：

$$(1+r_{1-t})^{1-t}(1+f_{12})^1=(1+r_{2-t})^{2-t} \tag{A14.6a}$$

和

$$(1+r_{2-t})^{2-t}(1+f_{23})^1=(1+r_{3-t})^{3-t} \tag{A14.6b}$$

与原来一样，我们得到

$$V_t=\frac{Qr_1}{(1+r_{1-t})^{1-t}}+\frac{Q}{(1+r_{1-t})^{1-t}}=\frac{Q(1+r_1)}{(1+r_{1-t})^{1-t}} \tag{A14.7}$$

因此，很显然，在时间 t，所有将来支付的不确定的利息的价值等于下一次已知的利息支付 Qr_1 和已知的票面价值 Q 美元的和用已知的利率 r_{1-t} 贴现后的值。这里看似矛盾的一点就是，将来不确定的支付等同于两笔确定的支付。当我们引用原来得出的结论，即 FRN 的所有将来的现金流在一次利息支付后的即刻价值等于 Q 美元时，就会对该问题有所理解。由此看来，在支付日期间，FRN 的价值只取决于下一个利息支付日 FRN 的价值，它的大小为 Q 美元（票面价值）加上已知的利息支付 r_1Q（都贴现到时间 t）。

> 支付日期间，一个在下一支付日有着确定的现金支付 $Q(1+r_1)$ 的 FRN 的价值为零。

因而在时间 t，图 A14—4 中 FRN 的现金流在下一支付日等于一笔大小为 $Q(1+r_1)$ 的现金流。

公式（A14.7）与下列说法也是一致的，即 FRN 在第一次支付前的即刻价值为 $Q(1+r_1)$（因为 $t=1$，$(1+r_{1-t})^{1-t}=1$），在任何支付日后的即刻价值为 Q（因为此时 $r_{1-t}=r_1$）。我们也可以用连续复利来推导上述结论，在时间 t，FRN 的价值为

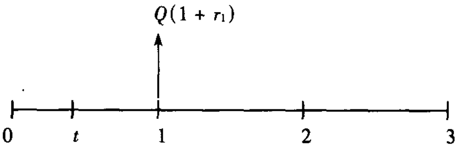


图 A14—4　支付日期间 FRN 的等价现金流

$$V_t=[Q\,\mathrm{e}^{r_1 t_1}]\mathrm{e}^{-r_{1-t}(1-t)} \tag{A14.8}$$

附录 14.2　利用合成投资组合来为互换定价

A. 货币互换

我们想要说明的是，有两种等价的投资组合可以被用来为货币互换定价：一个债券组合和一组远期合约。现在假设一个美国交易者（在国内）持有一个“收取美元，支付外汇”的互换，且该互换协议已经存在了一段时间。以下符号代表的意思分别是：

Q_d＝以国内货币表示的名义本金额

Q_f＝以外国货币表示的名义本金额

$r_{x,d}$＝互换协议中的本国固定利率（单利）

$r_{x,f}$＝互换协议中的外国货币的固定利率（单利）

C_d＝收取的固定的国内货币（美元）

C_f＝支付的固定的外国货币

n＝互换的剩余期限

r_d＝国内的即期利率

r_f＝外国的即期利率

S＝即期利率（每单位的外国货币用国内货币表示）

F_i＝第 i 个到期的当前远期利率

假设在时间 t（也就是今天）利率的期限结构是平坦的，而且 r_d 和 r_f 在所有时期都是不变的。每 6 个月（$t_i=1/2$）进行一次支付，且该互换刚刚有过一次支付（见图 A14—5）。

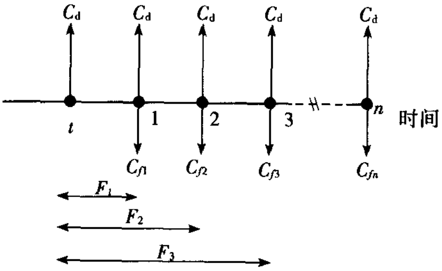


图 A14—5　货币互换

由此我们可以有

$$C_{\mathrm{d}}=(r_{\mathrm{x,d}}/2)Q \qquad (\mathrm{A}14.9\mathrm{a})$$

和

$$C_{\mathrm{f}}=(r_{\mathrm{x,f}}/2)Q \qquad (\mathrm{A}14.9\mathrm{b})$$

以及

$$F_i=S\,\mathrm{e}^{(r_{\mathrm{d}}-r_{\mathrm{f}})t_i} \qquad (\mathrm{A}14.9\mathrm{c})$$

将互换看成是合成债券的投资组合

一个美国互换交易者持有的一个货币互换可以看成是一个利息收入为 C_{d} 的美国债券的多头和一个利息支出为 C_{f} 的外国债券的空头的组合，而且本金 Q_{d} 和 Q_{f} 也发生交换。将外币支付转换为本币支付，那么该头寸以本币表示的净值就是互换的价值：

$$V^{\mathrm{B}}\text{美元}=\Big(\sum_{i=1}^{n}C_{\mathrm{d},i}\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{d}}t_i}+Q_{\mathrm{d},}\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{d}}t_n}\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n}C_{\mathrm{f},i}\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{f}}t_i}+Q_{\mathrm{f}}\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{f}}t_n}\Big)S \qquad (\mathrm{A}14.10)$$

将互换看成是一系列远期合约

在每一个支付日，美国的投资者收到 $C_{\mathrm{d},i}$ 美元，支付 $C_{\mathrm{f},i}$ 外币。在时间 t_i，$C_{\mathrm{f},i}$ 等于 $C_{\mathrm{f},i}F_i$ 数量的美元。这两个现金流以美元（国内）利率贴现的现值为

$$(C_{\mathrm{d},i}-C_{\mathrm{f},i}F_i)\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{d}}t_i} \qquad (\mathrm{A}14.11)$$

因此，对于美国的互换交易者来说，将该互换的所有支付看成是一系列远期合约的价值：

$$V^{\mathrm{f}}\text{美元}=\sum_{i=1}^{n}(C_{\mathrm{d},i}-C_{\mathrm{f},i}F_i)\mathrm{e}^{r_{\mathrm{d}}t_i}+(Q_{\mathrm{d}}-Q_{\mathrm{f}}F_n)\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{d}}t_n} \qquad (\mathrm{A}14.12)$$

很显然，用 $F_i=S\mathrm{e}^{(r_{\mathrm{d}}-r_{\mathrm{f}})t_i}$ 对公式（A14.12）进行替换，我们会看出公式（A14.11）和公式（A14.12）是相同的。

B. 利率互换

现在我们用上面构造的“复制组合”来为利率互换进行定价。我们假设美国的互换交易者持有一个“收取固定，支付浮动”的互换合约，而且该合约在时间 t（今天）还剩 3 个支付期间（见图 A14—6）。以下符号代表的意思分别是：

r_{x}＝固定利率（单利）

r_{f}＝浮动利率（单利）

C_{x}＝固定美元支付

C_{f}＝浮动美元支付

Q＝名义本金额

f_{ij}＝目前距到期日时间为 i 的隐含远期利率

n＝互换中 3 个支付期的剩余期限（在时间 t_1，t_2，t_3）

在时间 t 所有的远期利率都是已知的，因为它们可以由已知的即期利率计算出来。支付的间隔时间为 6 个月：

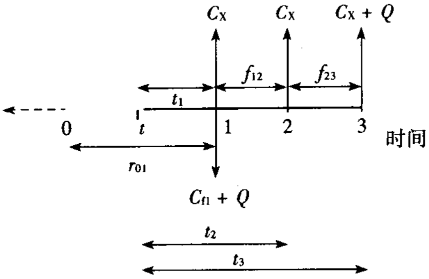


图 A14—6 利率互换

$$C_x=(r_x/2)Q \tag{A14.13a}$$

和

$$C_{f1}=r_{01}/2Q \tag{A14.13b}$$

在这里，r_{01}是指原来重新安排日（$t=0$）的 LIBOR 利率。

合成债券组合

浮动利率支付的互换等同于持有一个浮动利率的债券（票据），该债券也可看成是只在 t_1 时刻有一笔（$Q+C_{f,1}$）支付的现金流。该互换交易者相当于持有一个固定利息债券的多头和一个浮动利率的空头。因此

$$\begin{aligned} V_B &= \left(\sum_{i=1}^{3} C_{x,i}e^{-r_it_i}+Q\,e^{-r_3t_3}\right)-(Q+C_{f,1})e^{-r_1t_1} \\ &=(C_{x,1}-C_{f,1})e^{-r_1t_1}+C_{x,2}e^{-r_2t_2}+C_{x,3}e^{-r_3t_3}+[Qe^{-r_3t_3}-Q\,e^{-r_1t_1}] \end{aligned} \tag{A14.14}$$

一组远期合约

将来的浮动利率收入为

$$C_{f,1}=(r_{01}/2)Q \tag{A14.15a}$$

和

$$C_{f,2}=(f_{12}/2)Q \tag{A14.15b}$$

以及

$$C_{f,3}=(f_{23}/2)Q \tag{A14.15c}$$

在时刻 t，第一笔浮动利率收入是已知的，且以事先确定的 LIBOR 利率 r_{01} 为基础。因此互换可以被看成是一组远期合约，其交割价格为 $C_x=(r_x/2)$，且预期支付为 $C_{f,i}$。所以在时间 t，互换的价值为

$$\begin{aligned} V_{fwd} &= \sum_{i=1}^{3}(C_{x,i}-C_{f,i})e^{-r_it_i} \\ &= (C_{x,1}-C_{f,1})e^{-r_1t_1}+C_{x,2}e^{-r_2t_2}+C_{x,3}e^{-r_3t_3}-[C_{f,2}e^{-r_2t_2}+C_{f,3}\,e^{-r_3t_3}] \end{aligned} \tag{A14.16}$$

我们可以发现在互换的开始和结束，本金 Q 的交换都没有在上述公式中出现，因为它们已经被抵消掉了。通过比较公式（A14.14）中的 V_B 和公式（A14.16）中的 V_{fwd}，我们可以看出，如果后面方括号部分的内容相等的话，两者表达的意思是等价的。关于该部分的证明是很枯燥的，因为它涉及（互换中支付的 f_{ij}）单利和连续复利 f_{ij}^c 之间的转换。它们有如下所示的关系（这里

$t_{12}=1/2$)：

$$e^{f^c_{12}t_{12}}=(1+f_{12}t_{12}) \tag{A14.17}$$

而连续的即期利率和远期利率之间有如下关系：

$$e^{r_1t_1}e^{f^c_{12}t_{12}}=e^{r_2t_2} \tag{A14.18}$$

所以，利用上面的这两个公式，公式（A14.16）方括号里的部分可以变成

$$C_{f,2}e^{-r_2t_2}=(f_{12}t_{12}Q)e^{-r_2t_2}=(e^{f^c_{12}t_{12}}-1)Q\,e^{-r_2t_2}=Q(e^{-r_1t_1}-e^{-r_2t_2}) \tag{A14.19}$$

同样道理，我们可以很容易得出

$$C_{f,3}e^{-r_3t_3}=Q(e^{-r_2t_2}-e^{-r_3t_3}) \tag{A14.20}$$

因此

$$C_{f,2}e^{-r_2t_2}+C_{f,3}e^{-r_3t_3}=Q(e^{-r_1t_1}-e^{-r_3t_3}) \tag{A14.21}$$

将公式（A14.1）代人公式（A14.16），然后将方括号中的新内容与公式（A14.14）中方括号中的内容进行比较，我们可以发现公式（A14.14）和公式（A14.16）是等价的。所以，正如假设的那样，合成债券组合与一组远期合约对互换的定价是相同的。

附录 14.3　对基差互换定价

假设我们想要给一个支付短期国债利率、收取 LIBOR 的基差互换协议定价，我们可以将该互换看成是两个普通香草型互换：

支付短期国债利率，收取固定利率加上支付固定利率，收取 LIBOR。

现在 LIBOR 的利率期限结构通常稍微高于短期国债利率的期限结构（举例来说，高 20 至 50 个基点），因为前者面临信用风险。因此，对于收取 LIBOR、支付短期国债利率的一方来说，预期的 LIBOR 收入流的现值通常会高于将来预期的短期国债支出的现值。如此一来，在互换开始时，它的价值就不可能是零。所以，解决的办法就是收取 LIBOR、支付短期国债利率的一方实际收取的是 LIBOR 减去一个固定的折现率。现在我们考虑一个名义本金为 1 美元，每 6 个月为一个重新调整日（为方便起见，假设每 6 个月＝180 天，1 年＝360 天），18 个月期的基差互换来看一下该固定的折现率是如何得来的。假设目前的期限结构为：

到期日	短期国债	LIBOR
$t_1=180/360$ 天	$r_{TB,1}$	$r_{L,1}$
$t_2=360/360$ 天	$r_{TB,2}$	$r_{L,2}$
$t_3=440/360$ 天	$r_{TB,3}$	$r_{L,3}$

在这里，我们假设 $r_{L,i}>r_{TB,i}(i=1,2,3)$，现在我们来为这两个普通香草型互换定价，以使得它们在 $t=0$ 时价值为零。（记住：在 $t=0$ 时浮动利息的价值等于名义本金额 $Q=1$ 美元。）

a. 支付短期国债利率，收取固定利率

$$\frac{cp}{(1+r_{\mathrm{TB},1})^{t_1}}+\frac{cp}{(1+r_{\mathrm{TB},2})^{t_2}}+\frac{(cp+1\text{ 美元})}{(1+r_{\mathrm{TB},3})^{t_3}}=1(\text{美元}) \tag{A14.22}$$

这里，$cp=C/Q$。

由于这一固定的息票互换利率使该“支付短期国债利率，收取固定利率”的互换的初始价值为零，所以我们可以解出该方程。假设每 6 个月的 $cp_{\mathrm{TB}}=0.03$，那么换成以 1 年为基础，将是每年的$cp_{\mathrm{TB}}=6\%$（单利）。

b. 支付固定利率，收取 LIBOR

我们同样可以用 $r_{\mathrm{L},i}$代替上面公式中的 $r_{\mathrm{TB},i}$，来算出使“支付固定利率，收取 LIBOR”的互换的初始价值为零的固定利率。假设我们得出该利率为每年 $cp_{\mathrm{L}}=5.6\%$。它低于 cp_{TB}，由于 $r_{\mathrm{L},i}>r_{\mathrm{TB},i}$，贴现率变大了。现在很显然可以得出，原始的那份“支付固定利率，收取 LIBOR”的基差互换应该以这种方式来定价：它应该使互换的一方支付固定利率，收取 LIBOR－0.4%。

第4部分

高级衍生品和随机过程

衍生品与风险管理　金融工程——衍生品与风险管理

金融工程——衍生品与风险管理　金融工程——衍生品与风险管理

第15章

利率衍生品

学习目标

- 考察标的资产的价值随利率波动的期权即**利率期权**（interest rate option）的用途。这包括关于长期国债、中期国债、长期国债期货以及欧洲美元期货的期权（后两种合约是期货期权）。
- 说明**利率上限（下限）**（interest rate caps and floors）如何对未来支出或收入的利率限定上限（或下限）。
- 演示我们如何同时限定利率的上限和下限。这涉及同时利用利率上限和下限协议，这种利率衍生工具的组合就是所谓的**利率双限**(collar)。
- 阐述**互换期权**（swaption）如何赋予了它的持有者固定其将来执行互换时所用利率的权利。期权标的互换合约是在期权到期时（时间 T）开始生效，并以一个已知的固定利率（执行利率 $K\%$）执行。互换期权的持有者可以根据哪种操作更有利来选择在时间 T 执行互换期权，还是在 T 的时候仅仅在互换市场直接购买一个

互换合约。
- 介绍**远期互换**（forward swap）怎样锁定在远期互换到期日时开始生效的互换利率。注意，在到期日的时候，远期互换的持有者不能够从合约中“一走了之”（这与互换期权的持有者是截然不同的）。
- 阐述某些资产如何拥有**嵌入期权**（embedded option），例如可赎回债券、可退还债券以及抵押担保证券。

在本章中，我们会学习一些利率衍生证券，主要是期权。利率衍生证券的收益或者取决于利率本身的值，或者基于某种资产的价格（如债券或债券期货，而这些资产的价格也是由利率决定的）。市场上交易的利率衍生证券的类型非常广泛，它们都能够用来对将来的利率趋势进行投机，或者对利率将来的变动进行对冲。然而，有一些利率衍生证券可以用来对标的资产价值（例如衍生证券标的债券的价格）投机或者进行对冲。在分析过程中，我们始终都要注意考虑的是利率还是（固定收入）标的资产的价格。很多利率衍生证券都是场外市场交易工具，也有一些是在有组织的交易所进行交易的。在第 18 章我们会进一步学习利率衍生证券是如何定价的，不过本章我们将集中精力讨论如何运用这些工具以及它们的收益是怎样确定的。

15.1 长期国债以及欧洲美元期权

大概最简单的欧式利率期权就是长期国债期权了，它赋予了其持有者在将来某一时间，以一个已知的执行价格 K 买或卖长期国债的权利。长期国债看涨期权多头的收益是 $\max(0, V_T-K)$，其中 V_T 是期权合约到期日时国债的市场价格。一个长期国债期权可以用来对将来长期利率的变动进行投机（例如，如果你认为将来利率会下跌，那么你可以购买长期国债看涨期权），或者对长期国债组合进行保值（例如，你作为某标的债券的多头，担心将来债券价格会下跌，于是你可以购买债券看跌期权）。

事实上，如果期权合约的标的物是期货而非现货资产，那么对将来利率变动进行对冲或投机的成本就会相对较低。因此，在美国交易所交易最活跃的期权都是关于长期国债、中期国债以及欧洲美元期货的。当然，这些都是期货期权。

长期国债期货的看涨期权在到期日的现金收益为 $\max(0, F_T-K)$，其中 F_T 是执行期权时刻期货的价格。除了可能的现金流出之外，如果期权被执行的话，看涨期权多头的持有者也会处于期货合约的多头状态（因此，期权合约的发行者处于期货合约的空头状态）。一个美国长期国债期货看涨期权报价可能会记做“$C=3-10$”（%）。这意味着 $C=3-10/64\%$，一份本金为100 000美元长期国债的期货合约，其期权的票面价值为3 156.25美元。

一个欧洲美元期货期权赋予了它的持有者在期权到期时签订一份欧洲美元期货合约的权利。请记住，一份欧洲美元期货合约在到期日时“交割”的是名义上的 3 个月期 100 万美元存款。期权合约有一个已知的固定执行价格 K（在期货合约中被转化为固定利率）。你可能还记得，IMM 交易所欧洲美元期货报价变化 0.01，意味着期货合约收入或损失了 25 美元。期权的定价是与此

类似的，所以期权金报价为 $C=0.50\%$ 的看涨期权意味着一个看涨期权需要花费 50×25 美元＝1 250美元。期货看涨期权到期时，其现金收益为 $\max(F_T-K, 0)$，其中 F_T 是期权合约到期时欧洲美元期货合约的价格。到期日时看涨期权多头同时也是欧洲美元期货合约的多头（在期权合约到期日之后的一段时间该期货合约才会失效）。这种被“继承”来的期货头寸可以持续下去，也可以在期货合约到期日前的任何时间进行平仓。因此，在期权合约到期之后，其看涨期权多头的持有者仍然可以对利率头寸进行对冲。

上述期权可以用来投机或者对冲，只要注意利率的下跌意味着欧洲美元期货和长期国债期货价格的上涨。因此，进行投机的时候，如果你认为利率会下跌（上涨），那么你就应该购买一个欧洲美元期货或长期国债期货的看涨（看跌）期权。

15.2 利率上限、下限和双限协议

利率期权被广泛地用于对将来的利率变动进行投机，或者对其标的现货资产的利率收支进行对冲。相对于互换和利率期货而言，利率期权的优势在于它使得其投资者从利率的有利变动中获利，但是又限定了其损失的下限。因此，像其他所有的期权一样，它提供了某种形式的保险。在本节中，我们将要讨论：

- 使用利率期权的机制以及它们的收益如何与远期利率协议 FRA 和利率互换合约相联系。
- 利用上限期权或下限期权对单一利息收支进行对冲。
- 通过利率上限为一系列利息支出设定一个上限。
- 通过利率下限为一系列利息收入设定一个下限。
- 通过利率双限为一个公司或银行的（浮动利率）借款成本建立一个上限和下限。

一个远期利率协议（FRA）把将来的利率锁定在了某一特定水平（见 Cuthbertson & Nitzsche，2001）。通过 FRA 协议，不管利率是上升还是下降，你贷款的有效利率都被提前固定了。例如，假设 1 个月后你想做一笔期限为 90 天的贷款，并且接下来的 30 天即期利率会下降。如果持有一个 FRA 协议，那么你就不能享受较低的即期利率带来的好处，因为在协议里，你被锁定在一个固定利率水平。利率期权和远期利率协议相似，但是如果期权的买方愿意的话，期权允许借款者从合约中“一走了之”。所以，在前面的例子中，如果在到期日时即期利率跌到 10%以下的话，执行价格为 $K=0.1(10\%)$ 的利率期权的买方就不会执行期权，相反，他会在即期市场以较低的利率借入 90 天的资金。然而，如果在 1 个月的对冲期间内利率上升到比如 12%，那么资金的借入者就会以固定的执行价格 10%执行期权，这时他就可以用从期权获得的利润 $(r-K)$ 即 2%来降低他在即期市场的借款成本。因此，（看涨）利率期权为其购买者提供了某种形式的保险（即一个最大的有效利率支出），但是如果将来利率下降的话，期权又允许借款者从该利率有利变动中获利。

利率期权给予它的持有者收取一种利率（例如浮动利率/LIBOR）和支付另一种利率（例如固定利率 $K\%$）的权利（而非义务）。

“利率期权”的说法是一种通称，它具体包括**利率上限**（caps）、**下限**（floors），**双限协议**（collars）以及**互换期权**（swaptions），我们将在下面的章节中讨论这些内容。如果到期日时利率高于协议执行利率，那么利率看涨期权的多头就会获得收益，这就是通常认为的**上限期权**（caplet）。相反，如果到期日时利率低于协议利率，那么看跌期权的持有者就会执行期权。这就是所谓的**下限期权**（floorlet）。因此其收益为：

上限期权（到期日时收益）：

$$Q\left\{\max(0,\mathrm{LIBOR}_T-K_c)\frac{\text{天数}}{360}\right\} \tag{15.1}$$

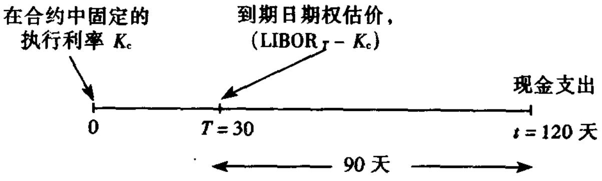
下限期权（到期日时收益）：

$$Q\left\{\max(0,K_p-\mathrm{LIBOR}_T)\frac{\text{天数}}{360}\right\} \tag{15.2}$$

其中合约的名义本金为 Q 美元。利率期权通常是场外交易工具，其适用的固定利率经常是基于即期利率（或远期利率）的当前水平。注意和一些其他的对利率敏感的衍生证券合约不同（如短期国库券和长期国债期货，它们的收益取决于标的资产的价格），利率上限或下限期权的收益取决于利率（之差）。

对冲

一个有浮动利率存款债务和固定利率贷款的银行非常容易受到上涨利率的影响。同样的道理，一个预计在30天后要借入期限为90天1亿美元资金的公司也容易受上涨利率的冲击。对于后一种情况，该公司可以通过购买一个执行利率为10%，30天后到期的利率上限来规避利率上涨带来的风险（见图15—1）。



$$\text{现金支出}(t=120)=Q\left\{\max(0,\mathrm{LIBOR}_T-K_c)\left(\frac{90}{360}\right)\right\}$$

图15—1　90天LIBOR上限期权的收益

看涨期权多头（上限期权）

假设上限期权的期权金是 $C=250\,000$ 美元（即等于1亿美元本金的0.25%）。根据“实际天数/360”计日规则，期权（针对90天LIBOR）在30天后的价值为：

$$100\,000\,000\text{ 美元}\left\{\max(0,\mathrm{LIBOR}_T-0.10)\left(\frac{90}{360}\right)\right\} \tag{15.3}$$

但是收益（来自多头期权的发行者）要直到90天到期后才进行支付（见图15—1）。

如果到期时LIBOR是14%，那么粗略计算该份期权获得的利润为(LIBOR_T-K_c)＝4%/年

(或 1%的 90 天利率)。每年 4%的利润补偿了到期时在即期市场 LIBOR=14%较高的借款利率，从而使得有效利率变为 10%(等于期权合约的执行利率)。然而如果到期时 LIBOR 利率低于执行利率 $K_c=10\%$，那么在即期市场借入资金成本就显得相对低廉，因此公司不会执行期权。注意，期权给出了一个有效借款成本的上限，但是如果利率下跌，它又允许借款者在即期市场任何有利的利率(低成本)上借入资金。因此，上限期权为潜在的企业借款者提供了保险。

$$\begin{aligned}\text{有效借款成本}&=\text{LIBOR}_T-\max\{0,\ \text{LIBOR}_T-K_c\} \qquad (15.4)\\&=K_c \qquad \text{如果 LIBOR}_T>K_c\\&=\text{LIBOR}_T \qquad \text{如果 LIBOR}_T<K_c\end{aligned}$$

当然，如果 30 天之后，公司发现它根本不需要借入资金，那么它最多也就损失掉了期权金，并且如果利率上涨到 K_c 之上，它又可以从看涨期权中获得收益。以上计算的借款净成本忽略了看涨期权金 $C=250\ 000$美元（这需要在 $t=0$ 的时候支付）以及期权的收益直到 $t+120$ 的时候才会发生的事实。精确计算有效借款成本需要按照下列步骤（见表 15—1)。如果 $t=0$ 的时候 LIBOR 为 $L_0=10\%$，那么 $t+30$ 的时候：

$$\text{看涨期权金}+\text{利息}=250\ 000[1+0.10(30/360)]\text{美元}=252\ 083(\text{美元})$$

$$t=30\ \text{的时候借入的有效金额}=10\ 000\ 000\ 000\ \text{美元}-252\ 083\ \text{美元}=99\ 748\ 000\ 000(\text{美元})$$

在 $t+30$ 的时候，如果 90 天 LIBOR=14%，那么 $t+120$ 时看涨期权的支出为：

$$t+120\ \text{时看涨期权的支出}=10\ 000\ 000\ 000\ \text{美元}(0.14-0.10)\frac{90}{360}\text{美元}=1\ 000\ 000(\text{美元})$$

在 $t+120$ 的时候，LIBOR=14%的即期市场中借款利息成本为：

$$t+120\ \text{时即期市场成本}=10\ 000\ 000\ 000\ \text{美元}(0.14)\frac{90}{360}\text{美元}=3\ 500\ 000(\text{美元})$$

即期市场利息成本减去看涨期权的收益(在 $t+120$ 的时候)后得到 250 万美元(=350 万美元−100 万美元)，并且借款者在 $t+120$ 的时候付出了 10 250 万美元。因此，借款的有效利息为 $t+30$时的 9 974.8 万美元和 $t+120$ 时支出的 10 250 万美元：

$$\text{有效利率成本}=\left(\frac{102.5}{99.748}\right)^{365/90}-1=(1.027\ 59)^{365/90}-1=0.116\ 7(11.67\%)$$

表 15—1　上限期权收益

贷款金额	100 000 000
上限期权费用	250 000
按复利计算的总费用	252 083
当前利率（$L\%$）	10
贷款在________天后开始	30
$t+30$ 时净借入现金	99 747 917
K（执行利率，以十进制小数计）	0.1
贷款的到期日（天数）	90
一年的天数（针对上限期权）	360
价差（%）	0
总时间（天数）	120

30天后 LIBOR	$t+120$ 时上限期权收益	$t+120$ 时刻贷款利息（美元）	总有效利息（美元）	按年计算的贷款成本	
				持有看涨期权的情况	未持有看涨期权的情况
6	0	1 500 000	1 500 000	7.317 1	6.224 2
6.5	0	1 625 000	1 625 000	7.854 1	6.755 7
7	0	1 750 000	1 750 000	8.393 1	7.289 3
7.5	0	1 875 000	1 875 000	8.934 2	7.824 8
8	0	2 000 000	2 000 000	9.477 3	8.362 4
8.5	0	2 125 000	2 125 000	10.022 4	8.901 9
9	0	2 250 000	2 250 000	10.569 6	9.443 5
9.5	0	2 375 000	2 375 000	11.118 8	9.987 2
10	0	2 500 000	2 500 000	11.670 1	10.532 8
10.5	125 000	2 625 000	2 500 000	11.670 1	11.080 5
11	250 000	2 750 000	2 500 000	11.670 1	11.630 2
11.5	375 000	2 875 000	2 500 000	11.670 1	12.182 0
12	500 000	3 000 000	2 500 000	11.670 1	12.735 9
12.5	625 000	3 125 000	2 500 000	11.670 1	13.291 8
13	750 000	3 250 000	2 500 000	11.670 1	13.849 7
13.5	875 000	3 375 000	2 500 000	11.670 1	14.409 7
14	1 000 000	3 500 000	2 500 000	11.670 1	14.971 8
14.5	1 125 000	3 625 000	2 500 000	11.670 1	15.536 0
15	1 250 000	3 750 000	2 500 000	11.670 1	16.102 3

11.67%的有效利息成本已经相当接近于期权合约的执行利率 $K_c=10\%$（单利）。未进行对冲时贷款成本为14.97%（$=(103.5/100)^{365/90}-1$）。通过上限期权，$t+30$ 时刻无论利率在什么水平（等于还是大于10%），借款成本都被锁定在了11.67%。当然，如果 $t+30$ 时刻 LIBOR$<10\%$，那么上限期权根本就不会被执行，借款利息成本也将随着即期利率下降。未进行对冲头寸的成本和持有看涨上限期权时候的借款有效成本由表15—1和图15—1给出。进行了“保险”的头寸的收益特征与有保护的看涨期权（或看跌期权空头）是相似的（见图15—2）。

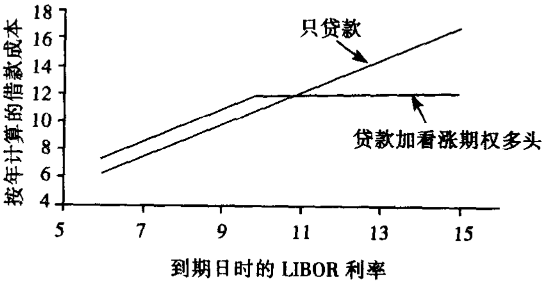


图15—2　计划借款加一个利率看涨期权

看跌期权多头（下限期权）

如果一个公司预计它将要收到一笔资金（来自于售货收入），并想把该笔资金用于 90 天存款，但是又担心利率会下跌，这时该公司可能会用到利率看跌期权。又比如，考虑一个银行以 LIBOR 加价差（我们假设为零）借出资金，但是又以固定利率存款形式融资。这样它很容易受到将来利率下跌的冲击。交易的双方都可以通过购买一个利率看跌期权（下限期权）来锁定 3 个月后的借款利率。如果公司期望的贷款期限是 180 天，那么它需要购买 180 天的 LIBOR 看跌期权（90 天后到期）。下限期权的收益为

$$Q\left\{\max(0, K_{\text{FL}}-\text{LIBOR}_T)\left(\frac{180}{360}\right)\right\} \tag{15.5}$$

该收益取决于 30 天后 180 天 LIBOR 利率的大小。然而，公司要直到到期日后 180 天（即在公司购买看跌期权后的 270 天）的时候才会收到其收益。如果到期日时 180 天 LIBOR 利率低于 $K_{\text{FL}}=10\%$，那么看跌期权的收益($K_{\text{FL}}-\text{LIBOR}$)会抵消公司在即期市场上面对的较低的贷款利率。这使得银行把执行利率(K_{FL})有效地锁定为其收到的最低利率，因此，这种看跌期权被认为是一个下限期权。利率看跌期权加上有计划的存款和一个保护性的看跌期权（即一个看涨期权多头）有相同的收益特性：

$$\begin{aligned}\text{净贷款利率}&=\text{LIBOR}_T+\max\{0,K_{\text{FL}}-\text{LIBOR}_T\} && (15.6)\\ &=\text{LIBOR}_T \quad \text{如果 } \text{LIBOR}_T>K_{\text{FL}}\\ &=K_{\text{FL}} \quad\quad\ \ \text{如果 } \text{LIBOR}_T<K_{\text{FL}}\end{aligned}$$

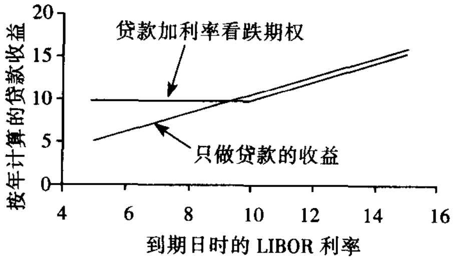


图 15—3　计划贷款加一个利率看跌期权

有效回报率取决于现金流的确切时间点。假设名义本金 Q 为 1 亿美元的看跌期权的期权金 $P=250\,000$美元。90 天之后，看跌期权成本加上利息以当前利率 $L_0=10\%$ 累积为256 250（$=P[1+L_0(90/360)]$）美元。因此公司有效借出资金(在 $t+90$ 时刻)100 256 250美元，但是只赚取 1 亿美元本金产生的利息。如果在($t+90$)到期日时，$\text{LIBOR}_T=8\%$，那么：

$t+270$ 时刻取得存款利息＝100 000 000(0.08)(180/360)美元＝400 000 000(美元)

$t+270$ 时刻看跌期权支出＝100 00 000(0.10－0.08)(180/360)美元＝100 000 000(美元)

净现金支出(不包括本金)＝500 000 000(美元)

按年计算的回报率是 9.83%，即$(105/100.256\,250)^{365/180}-1=0.098\,3$，然而如果没有下限期权，该回报率将只达到 8.28%。因此说，下限期权给定了一个最低的回报率 9.83%，但是如果 LIBOR 在 $t+90$ 时刻高于 $K=10\%$，它也允许公司获得更高的回报率（见表 15—2，第 2 列）。

表 15—2　　下限期权盈利状况

存款（借出）	100 000 000
看跌期权金	250 000
以复利计息的期权金	256 250
当前利率（L%）	10
存款开始时间（天）	90
“有效”借出货币	100 256 250
K（执行利率，以十进制小数计）	0.1
存款重新设定期间	180
一年的天数（针对下限期权）	360
价差（%）	0
总时间	270

90 天后 LIBOR	$t+270$ 时刻看跌期权收益	$t+270$ 时刻贷款利息（美元）	总有效利息（美元）	按年计算的贷款收益	
				持有看涨期权的情况	未持有看涨期权的情况
5	2 500 000	2 500 000	5 000 000	9.828 1	5.134 6
5.5	2 250 000	2 750 000	5 000 000	9.828 1	5.655 2
6	2 000 000	3 000 000	5 000 000	9.828 1	6.177 1
6.5	1 750 000	3 250 000	5 000 000	9.828 1	6.700 4
7	1 500 000	3 500 000	5 000 000	9.828 1	7.224 9
7.5	1 250 000	3 750 000	5 000 000	9.828 1	7.750 8
8	1 000 000	4 000 000	5 000 000	9.828 1	8.277 9
8.5	750 000	4 250 000	5 000 000	9.828 1	8.806 3
9	500 000	4 500 000	5 000 000	9.828 1	9.336 1
9.5	250 000	4 750 000	5 000 000	9.828 1	9.867 2
10	0	5 000 000	5 000 000	9.828 1	10.399 5
10.5	0	5 250 000	5 250 000	10.359 0	10.933 2
11	0	5 500 000	5 500 000	10.891 2	11.468 2
11.5	0	5 750 000	5 750 000	11.424 7	12.004 4
12	0	6 000 000	6 000 000	11.959 5	12.542 0
12.5	0	6 250 000	6 250 000	12.495 6	13.080 9
13	0	6 500 000	6 500 000	13.033 0	13.621 1
13.5	0	6 750 000	6 750 000	13.571 7	14.162 6
14	0	7 000 000	7 000 000	14.111 7	14.705 4

利率上限

到现在为止，我们已经学习了在场外市场（OTC）进行交易的利率工具，对一个未来固定日期的现金流锁定一个最大的借入资金利率或一个最低的贷出资金利率。然而，一个公司或银行可能希望对以后的已知未来日期锁定一系列收入或支出。

> 通过成为利率上限多头，一个市场参与者可以从一系列上升的贷款利率中获得保护，同时又能从下降的利率中获得收益。

一个利率上限无非是一系列单独的上限期权（看涨期权），这些上限期权的到期日对应于公司现有贷款的未来利息支付日。因此，利率上限就是一系列提前支付一笔固定的看涨期权金的看涨期权。利率上限的费用等于单独的上限期权费用的加总。

在公司各种不同利率贷款的每个利息支付日，利率上限都会根据 LIBOR 是否超过协议约定的执行利率决定是否支付。实际的现金支付发生在该到期日之后。例如，如果利率上限是针对 90 天的 LIBOR 利率，那么付款将发生在利率上限到期日的 90 天之后（基于到期日时的 90 天 LIBOR利率）。下面给出一个例子来详细说明。

某公司在 4 月 10 日借入 2 000 万美元，期限为 1 年，利息支付是基于 3 个月期 LIBOR（实际天数/360）。公司担心 1 年之内利率会有所上升，因此希望将它的利息支付上限定在当前的 90 天 LIBOR 利率 $L_0=10\%$上。于是公司需要购买一个利率上限，执行利率为 $K_c=10\%$，利率上限费用为 $C=60\ 000$美元，执行日期间隔 3 个月，即 7 月 10 日、10 月 10 日等（假设这些日期都是工作日）。利率上限的费用60 000美元是本金 2 000 万美元的 0.3%。在每一个利率上限的到期日（$=T$），3 个月后支付的现金为：

$$(t+3\text{ 个月时刻})\text{收益}=20\ 000\ 000\times\max\{0,\ \text{LIBOR}_T-0.10\}(90/360)\text{美元}\tag{15.7}$$

在 $t+180$ 时刻（10 月 10 日）的首次支付是基于 $t+90$ 时刻（7 月 10 日）的 LIBOR 利率的，即 10.7%，这使得在 10 月 10 日上限合约发生了35 778美元的支付（见表 15—3）。511 111美元的净现金流（见表 15—3 第 7 行）就是贷款利息收益546 889美元（见表 15—3 第 4 行）减去上限合约支出35 778美元得到的。如果 1 年之内即期利率上涨，那么上限合约就将贷款有效利率（单利）锁定在了 $K=10\%$周围。这是因为每个上限期权日期的有效借款成本为：

$$\text{有效借款成本}=L_i-\max\{0,\ L_i-K\}\tag{15.8}$$

其中，如果 $L_i>K$，则有效借款成本为 $K=10\%$；如果 $L_i<K$，则有效借款成本就是 L_i。表 15—3 说明了购买利率上限合约后的（事后）现金收益情况（我们假设 1 年内利率都高于 $K=10\%$）。

签订利率上限后，按年计算的借款成本就是内部收益率，并且取决于上限协议期间内LIBOR利率的大小。内部收益率是给定净现金流数值（见表 15—3 第 7 行）时 y 的解：

$$19\ 940\ 000\text{ 美元}=\frac{505\ 556}{(1+y)}+\frac{511\ 111}{(1+y)^2}+\frac{511\ 111}{(1+y)^3}+\frac{20\ 000\ 000+500\ 000}{(1+y)^4}\tag{15.9}$$

从上式计算得出每季度利率为 $y=2.615\%$，换算成年利率为 $(1.026\ 15)^4-1=10.88\%$。如果没有购买利率上限，从表 15—3 最后一行可以看出，未进行对冲成本（内部收益率）

为 11.77%。

表 15—3 利率上限

贷款（借入）	20 000 000
利率上限费用	60 000
K（执行利率，以十进制小数计）	0.1
贷款到期日（天）	360
一年的天数（对上限协议而言）	360
重新设定期间（天）	90
有效年利率	

	每个季度	每年
购买上限协议的情况	2.61%	10.88%
未购买上限协议的情况	2.82%	11.77%

日期	每季度天数	LIBOR	应付利息	上限协议支付	本金偿还金额	净现金流	
						购买上限协议的情况	未购买上限协议的情况
2000 年 4 月 10 日		10	0	−60 000	0	19 940 000	20 000 000
2000 年 7 月 10 日	91	10.7	505 556	0	0	−505 556	−505 556
2000 年 10 月 10 日	92	12.3	546 889	35 778	0	−511 111	−546 889
2001 年 1 月 10 日	92	11.6	628 667	117 556	0	−511 111	−628 667
2001 年 4 月 10 日	90		580 000	80 000	20 000 000	−20 500 000	−20 580 000

注：利率上限的首次收入是基于 7 月 10 日的利率，但是直到 10 月 10 日才得到实际支付。

如果在合约期间内的任何时点，利率下降到 10%以下，利率上限都不会得到执行，因为较低的即期利率对公司而言意味着一个较低的有效借款成本。因此，利率上限固定了公司的最大利息支出，但是同时又允许它获得利率下跌带来的好处。

利率下限

如果一个公司未来有一系列现金流入，并打算把这些资金用于银行存款，那么未来的利率下跌将使公司蒙受损失。同理，一家对其贷款收取浮动利率的银行也会在利率下跌中受损。

> **通过购买一个利率下限，市场参与者可以从一系列下降的利率中获得保护，同时又能从上涨的利率中获益。**

利率下限是一系列利率看跌期权（下限期权），其到期日为利息支付日。名义本金为 Q 美元的下限期权的收益为

$$Q\left\{\max(0,K_{FL}-\text{LIBOR}_T)\left(\frac{\text{天数}}{360}\right)\right\} \tag{15.10}$$

假设 1 月 10 日某公司有一笔 1 年期 2 000 万美元的银行存款（或者为另外一家公司提供贷款 2 000 万美元），每 90 天根据 LIBOR 利率支付利息，并且该公司购买了一个利率下限，执行利率为 $K_{FL}=10\%$，协议费用为40 000美元。我们假设 1 年内 90 天利率下跌，那么持有利率下限和未持有下限协议时的收益情况如表 15—4 所示。

表 15—4 **利率下限**

存款（借出）	200 000 000	
利率下限费用	40 000	
K（执行利率，以十进制小数计）	0.1	
存款到期日	360	
一年的天数	360	
重新设定日期（天）	90	
有效年利率：		
	每个季度	每年
持有利率下限的情况	2.48%	10.30%
未持有利率下限的情况	2.32%	9.59%

日期	每季度天数	LIBOR	收取利息	下限协议支付	本金偿还金额	净现金流	
						购买下限协议的情况	未购买下限协议的情况
2000 年 4 月 10 日		9.9		−40 000	0	−20 040 000	−20 000 000
2000 年 7 月 10 日	91	9.5	500 500	0	0	500 500	500 500
2000 年 10 月 10 日	91	9	480 278	25 278	0	505 556	480 278
2001 年 1 月 10 日	92	8	460 000	51 111	0	511 111	460 000
2001 年 4 月 10 日	92		408 889	102 222	20 000 000	20 511 111	20 408 889

注：利率下限的首次收入是基于 4 月 10 日的利率，但是直到 7 月 10 日才获得实际支付。

公司预先存入了 2 000 万美元的银行存款并支付了 40 000 美元的协议费用。在 $t=0$ 时刻（1 月 10 日），90 天 LIBOR 利率为 9.9%，于是在 4 月 10 日存款收到的利息为：

4 月 10 日银行存款收到的利息＝20 000 000×(0.099)×(91/360)美元＝500 500(美元)

如果 4 月 10 日 LIBOR 利率下降到 9.5%，下限期权就是实值的，7 月 10 日的支付为：

7 月 10 日利率看跌期权支出＝20 000 000×(0.10－0.095)×(91/360)美元＝25 278(美元)

基于 9.5%的利率，公司在 7 月 10 日实际收取的利息为：

7 月 10 日实际收取的利息＝20 000 000×(0.095)×(91/360)美元＝480 278(美元)

因此，7 月 10 日时从利率看跌期权和即期市场得到的总收益为505 556美元(＝480 278美元＋25 278美元)。表 15—4(第 7 行)给出了持有利率下限时的现金流情况，这意味着每 90 天的内部回报率为 2.48%，或每年 10.30%(＝$(1.0248)^4-1$)。如果没有使用利率下限(即一个未对冲的头寸)，随着 LIBOR 利率的下跌，从银行存款收取的利息也随之下降，未对冲的内部收益率变为每年 9.59%(基于表 15—4 最后一行给出的现金流)。因此，利率下限使得公司的收益率提高了将近

70 个基点。当然，如果在一年内 LIBOR 利率上升到了 10%以上，那么利率下限就是虚值的，而公司仍然需要支付利率下限的费用。然而，公司依旧会得到利率上涨带来的大部分收益，因为银行存款（即期）收到的利息的增加很可能高于利率下限的费用。

利率双限

如果一个公司以浮动利率 LIBOR 借入资金，我们已经看到通过购买一个利率上限，它就可以在未来 LIBOR 利率的上涨中获得保护。如果利率下跌，公司也会获得收益，因为这时需偿还的贷款金额会变少（并且到期时利率上限是虚值状态）。为了这项特权，公司可能必须支付一笔为数不小的上限协议费用。公司也可以通过出售一个利率下限，收取下限协议费用来冲销这项成本。但是当利率下跌时，这样做会限制公司需偿还的贷款金额的减少幅度，因为这时对多头来说，利率下限处于实值，于是公司作为协议的空头，它需要支付（K_{FL}－LIBOR）。作为利率上限的多头和利率下限的空头的净影响是为公司的有效借款成本设定了一个上限和下限，而这两种协议的组合就被认为是利率双限。因此：

> 利率双限由一个利率上限和一个利率下限组成。它为公司或银行的借款成本（浮动利率）设定了一个下限和上限。

公司贷款的有效成本取决于利率双限期间内利率的大小以及上限和下限协议所选定的执行利率。例如上限协议的执行利率可能是 $K_{cap}=10\%$，下限协议的执行利率为 $K_{FL}=8\%$。因此，当 LIBOR 利率高于 10%的时候，上限协议就会得到执行，由此得到的收益会降低公司的借款成本。当 LIBOR 利率跌到 8%以下的时候，公司可以直接从较低的借款成本中获益，但是这项成本节约被冲销掉了，因为从该公司购买利率下限的人会要求一笔金额为（K_{FL}－LIBOR）的支付。于是如果忽略出售利率下限的收入和购买上限协议的成本，那么公司的净有效借款成本就是 K_{FL}＝LIBOR＋（K_{FL}－LIBOR）。

利率双限的收益情况

我们会忽略在 $t=0$ 时刻利率上限和下限协议费用被支付/收取的事实，而利率双限的收益可能在 $t>0$ 的任何时间发生。在任何一个到期日，利率上限和下限协议（其中 $K_{cap}=10\%$，$K_{FL}=8\%$，并且按照 90/360 的惯例计算）的期权收益（忽略期权金）为：

利率上限（看涨期权）多头收益：

$$\Pi_{cap}=\max\{0,\text{LIBOR}_{t-90}-K_{cap}\}Q(90/360) \tag{15.11}$$

利率下限（看跌期权）多头收益：

$$\Pi_{FL}=\max\{0,K_{FL}-\text{LIBOR}_{t-90}\}Q(90/360) \tag{15.12}$$

利率双限收益（即利率上限多头和利率下限空头的组合）：

$$\Pi_{cl}=\Pi_{cap}-\Pi_{FL}=[\max\{0,\text{LIBOR}_{t-90}-K_{cap}\}-\max\{0,K_{FL}-\text{LIBOR}_{t-90}\}]Q(90/360) \tag{15.13}$$

持有利率双限时的有效借款成本（基于 $T=t-90$ 时刻的利率）：

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{LIBOR}_{t-90}-\max\{0,\mathrm{LIBOR}_{t-90}-K_{\mathrm{cap}}\}+\max\{0,K_{\mathrm{FL}}-\mathrm{LIBOR}_{(t-90)}\}]Q(90/360) \quad (15.14)\\
&=K_{\mathrm{cap}}Q(90/360) \qquad \text{如果 } \mathrm{LIBOR}_{t-90}>K_{\mathrm{cap}}\\
&=K_{\mathrm{FL}}Q(90/360) \qquad \text{如果 } \mathrm{LIBOR}_{t-90}<K_{\mathrm{FL}}\\
&=\mathrm{LIBOR}_{t-90}(90/360) \quad \text{如果 } K_{\mathrm{FL}}<\mathrm{LIBOR}_{t-90}<K_{\mathrm{cap}}
\end{aligned}
$$

从上文的计算中我们可以很清楚地看出，利率双限涉及的每个支付日的借款成本（单利）或者是 $K_{\mathrm{cap}}=10\%$，或者是 $K_{\mathrm{FL}}=8\%$，或者是 LIBOR（当 LIBOR 利率处于 8%和 10%之间时）。实际的有效借款成本需要考虑利率支出的上限协议费用减去收到的利率下限费用的净预付成本。利率双限就像利用股票或 FX 期权的“货币价差”。我们甚至可以通过选取特定的执行利率 K_{cap} 和 K_{FL} 来使得出售下限协议收取的费用和购买上限协议支出的费用相等。这就是所谓的**零成本利率双限**。

持有利率双限时的有效借款成本取决于每个重新设定日 LIBOR 的大小。表 15—5 给出了 $K_{\mathrm{cap}}=10\%$，$K_{\mathrm{FL}}=8\%$的情况，并且第 3 列给出了 90 天 LIBOR 的变化情况。

表 15—5　　**利率双限**

存款（借出）	100 000 000	
利率上限费用（多头）	350 000	
利率下限费用（空头）	500 000	
K（下限协议）	0.08	
K（上限协议）	0.1	
一年的天数（对于期权而言）	360	
重新设定日（天）	90	
有效年利率：		
	每个季度	每年
只持有利率双限的情况	2.33%	9.65%
只持有利率上限的情况	2.40%	9.95%
没有上限或下限协议的情况	2.40%	9.96%

日期	每季度天数	LIBOR	应付利息	上限协议支付	下限协议支付	本金偿还金额	净现金流		
							只持有双限协议的情况	只持有上限协议的情况	未持有上限或下限协议的情况
2000 年 4 月 10 日		10.5	0	−350 000	500 000	0	100 150 000	99 650 000	100 000 000
2000 年 7 月 10 日	91	11.5	2 654 167	0	0	0	−2 654 167	−2 654 167	−2 654 167
2000 年 10 月 10 日	92	10.0	2 938 889	383 333	0	0	−2 555 556	−2 555 556	−2 938 889
2001 年 1 月 10 日	92	9.0	2 555 556	0	0	0	−2 555 556	−2 555 556	−2 555 556
2001 年 4 月 10 日	90	7.8	2 250 000	0	0	0	−2 250 000	−2 250 000	−2 250 000
2001 年 7 月 10 日	91	7.7	1 971 667	0	−50 556	0	−2 022 222	−1 971 667	−1 971 667
2000 年 10 月 10 日	92		1 967 778	0	−76 667	100 000 000	−102 044 444	−101 967 778	−101 967 778

贷款本金是 1 亿美元，且 4 月 10 日时的利率是 10.5%（见表 15—5）。购买利率上限花费了 350 000美元，同时发行利率下限产生了 $P=500\ 000$美元的现金流入。假设 LIBOR 的变化情况按照表 15—5 所述，那么只有在 $t+91$ 时刻（2000 年 7 月 10 日）LIBOR＝11.5%的时候，利率上限才会得到执行，并且该公司的上限协议的收益383 333美元会在 $t+180$ 时刻（2000 年 10 月 10

日）收到。利率下限会在 2000 年 4 月 10 日和 7 月 10 日，LIBOR 降到 8%之下，分别到 7.8%和 7.7%的时候执行（公司的实际支付发生在 90 天后）。在每个重新设定日，公司贷款支付的利息基于前 90 天的 LIBOR 利率（第 4 行）。公司的净现金流由以下三种情况给出：

- 持有利率双限的情况，见表 15—5 第 8 列。
- 只持有上限协议的情况，见表 15—5 第 9 列。
- 未进行对冲（即未持有上限协议或下限协议）的情况，见表 15—5 第 10 列。

未进行对冲时的有效借款成本（即隐含回报率）是 9.96%，而持有利率双限时的成本略低一些，为 9.65%。这是因为公司出售利率下限收取的费用超过了利率在 $t+360$ 和 $t+480$ 时刻跌到 8%之下时进行的支付。一个重要的事实就是当利率上升（高于 10%）时，双限协议限制了利息成本，并且看跌期权（利率下限）期权金的收取也部分抵消了利率上限的成本。然而，当利率下跌（到 K_{FL}之下）的时候，公司所做的看跌期权空头头寸涉及现金支出，这抵消了公司原有贷款的低利息支出。因此，持有利率双限时对冲的有效成本取决于到期时利率的实际水平。

如果只使用了利率上限，有效借款成本就会是 9.95%。后者成本有所增高，是因为临近期末的时候，较低的 LIBOR 利率支付不能抵消高额的利率上限费用支出。

15.3 利率互换期权

作为互换期权标的物的互换合约有一个交易双方商定的到期日、支付频率和名义本金。到期日时，互换期权的购买方可以选择进行进入互换协议，或者交易双方协议进行现金结算。执行利率（K）就是互换期权中商定的互换合约利率。互换合约的期权金会预先支付。

> **互换期权是一种以固定利率支付和浮动利率收取者（即支付者互换期权），或是相反（即收取者互换期权）的身份进入互换合约交易的场外市场交易的期权。**

假设一家美国公司认为在 2 年后开始的 3 年之内，它需要向它的代理银行以浮动利率借入 1 000 万美元的资金。但是，它希望将浮动利息支付转换为固定利息支付，从而将贷款转换为固定利率。于是，公司需要一个支付固定利率、收取浮动利率的 1 000 万美元的互换合约，该合约开始于 2 年之后，期限为 3 年（每年会发生利息支付）。假设公司认为接下来的 2 年内利率会有所上涨，致使届时互换合约的固定利率支付会高于现在的水平。于是通过购买一个关于 3 年期“支付固定利率，收取浮动利率”互换合约的 2 年期欧式支付型互换期权，选择（例如）$K=10\%$的执行利率，公司可以达到对冲的目的。如果 2 年内互换利率高于 10%，那么公司会执行期权。然而，如果到期时互换利率低于 10%，比如 9%，那么支付型互换期权会以无价值的状况终止，公司会以现行 9%较低的互换利率购买一个互换合约。因此说，互换期权为互换合约的固定利息支付限定了一个最大值。如果互换期权得到执行，那么其持有者可能会以现金的形式（而非通过执行互换合约本身）收到互换期权的收益。

如果(带息票的)互换利率在 $T=2$ 时刻变为 $cp_T=11\%$(固定)，那么到期时($T=2$)互换期权的现金价值应该是多少呢？执行期权允许其参与者进入一个互换合约，支付 $K=10\%$的固定利

率，收取 LIBOR 浮动利率。但是在 $T=2$ 到期时刻，交易者可以进入(标的)互换市场，出售一个在其他方面都相同的互换合约，并收取固定利率 $cp_T=11\%$(其名义本金为 $Q=1\,000$万美元，期限为 3 年)。于是支付的两个 LIBOR 利率就抵消掉了。因此，到期日时互换期权的价值就是一个 1 000万美元$\times(cp_T-K)=10$ 万美元，期限为 3 年的年金的现值：

$$V_{swpo}(T=2)=10\,000\,000\text{ 美元}[cp_T-K][(1+r_{23})^{-1}+(1+r_{24})^{-2}+(1+r_{25})^{-3}] \quad (15.15)$$

其中，r_{2j} 为 $T=2$ 开始的事后即期利率，方括号中最后一项是在接下来的 3 年内每年 1 美元的年金价值(以适当即期利率折现)。在到期日时，支付型互换期权(到期时处于溢价状态)的持有者会收到一笔 V_{swpo} 美元的现金。另外一种情况，如果到期时标的互换利率为 $cp_T=9\%(<K=10\%)$，那么互换期权在到期日时就没有价值，但是，如果公司愿意的话，它可以以较低的互换利率 $cp_T=9\%$进入一个新的互换合约。因此，一个支付型互换期权就是一种利率看涨期权的形式，不过其到期收益是 $Q\max\{cp_T-K,0\}$的年金价值，而不仅是简单的一次性支付 $\max\{cp_T-K,0\}$。

利用互换期权进行对冲的一个略微不同的形式就是在若干年后冲销现有互换合约的收益。例如，假设你已经有了一个“支付固定，收取浮动”的 5 年期的互换合约，在 2 年之后你可能想终止这份合约。为达到这样的目的，你可以进入一个 2 年内到期的 3 年期收取型互换期权（即收取固定利率，支付浮动利率）。从上文中我们可以很明显地看出，互换期权（无论是欧式的还是美式的）也可以用来对互换利率的将来价值进行投机。

15.4　远期互换合约

远期互换合约是一个在将来某个特定日期，以今天商定的一个互换利率进入一个互换合约的合同。如果你做了一个到期日为 2 年的远期互换合约的多头，那么今天你就拥有了一个关于 2 年后“支付固定利率，收取浮动利率”互换合约的合同。

> 一个远期互换合约多头是一个“支付固定，收取浮动”的互换，该互换合约在将来某个时间生效，但是所用互换利率是在今天商定的。

例如，你可以成为一个 2 年期远期互换的多头，其标的物是名义本金为 $Q=1\,000$ 万美元的 3 年期互换合约。在 $t=0$ 时刻，我们怎样为这份互换合约定价呢（见图 15—4）？

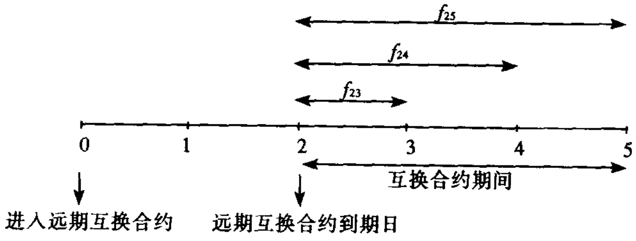


图 15—4　远期互换合约

在 $t=0$ 时刻，远期互换利率为固定息票利率 cp_f（使得该互换合约在 $t=2$ 时刻期望价值为

零）。如果以金额为 Q 的名义本金支付了一张 C 美元的息票，那么固定利率收入的现值（PV）应该等于浮动利率收益的价值（在互换合约的开始，其价值为 Q）：

$$Q=Ce^{-f_{23}(1)}+Ce^{-f_{24}(2)}+Ce^{-f_{25}(3)}+Qe^{-f_{25}(3)} \tag{15.16}$$

其中，f_{ij} 为远期利率（连续复利，由 $t=0$ 时刻已知的即期利率计算得出）。远期互换中的固定息票利率是 $cp_f=C/Q$，因此利用连续复利我们得到：

$$\text{在 } t=0 \text{ 时，} cp_f(2-5)=\frac{1-e^{f_{25}(3)}}{\left[e^{-f_{23}(1)}+e^{-f_{24}(2)}+e^{-f_{25}(3)}\right]}=\left[1-e^{-f_{25}(3)}\right]/\mathrm{AN}_{2-5} \tag{15.17}$$

其中，$\mathrm{AN}_{2-5}=\left[e^{-f_{23}(1)}+e^{-f_{24}(2)}+e^{-f_{25}(3)}\right]$ 是利用 $t=0$ 时刻远期利率计算得出的年金价值。因此，$t=0$ 时刻远期互换合约中商定的固定息票利率只取决于未来的远期利率（在 2 年至 5 年之内），cp_f 是在 $t=0$ 时刻商定的远期互换利率。假设我们设定 $t=0$ 时刻 $cp_f=0$。

现在我们来考虑一下到期日时远期互换合约的情况。我们假设 2 年过后，现行互换利率为 $cp_2(2-5)=12\%$。那么到期日（$t=2$）的时候，对固定利率支付者（即远期互换合约的多头）来说，合约价值就是（cp_2-cp_f）每 1 美元名义本金的 3 年期年金价值：

$$V_{fs}(T=2)=(cp_2-cp_f)\left[e^{-r_{23}(1)}+e^{-r_{24}(2)}+e^{-r_{25}(3)}\right] \tag{15.18}$$

因此，到期日时现金价值为 QV_{fs}美元，且该现金价值会被支付给多头。注意，r_{2j} 是 $t=2$ 时刻已知的实际即期利率（事后），也就是远期互换合约开始的 2 年之后。（我们也可以利用名义的 r_{01}，r_{02}，r_{03}，其中 0 代表今天，即我们进入远期互换合约的 2 年之后。）所以，如果 $t=2$ 时刻的实际互换利率 cp_2 高于（低于）$t=0$ 时多头远期互换合约中商定的利率，那么多头就会在 $T=2$ 时刻收到（支出）现金。当然，对于远期互换合约多头而言，到期时 V_{fs}可能是正的，也可能是负的，并且在互换合约期间内它会随着远期收益曲线的变化而变化。

远期互换合约和互换期权合约的区别在于，后者允许其持有者获得任何互换利率下降带来的好处，同时又为将来应付的互换利率设定了一个上限。正是为了这项特权，互换期权持有者需要支付互换期权金。相比较而言，远期互换在 $t=0$ 时刻锁定了互换利率 cp_f，这意味着如果 $T=2$ 时刻实际互换利率低于远期互换合约中的利率水平，其持有者不能获得任何好处。但是，作为某种形式的补偿，它也不需要一笔预先支付的费用。

15.5 嵌入债券期权

可赎回债券（callable bond）允许它的发行公司在将来的某个预先确定的日期赎回它的债券。因此，持有可赎回债券的投资者就相当于对该债券的发行者发行了一个看涨期权。例如，一个 10 年期可赎回债券可能有这样的赎回条款：在第 3 年和第 4 年可以以 $K=105$ 美元的价格赎回，在第 5 年和第 6 年可以以 $K=103$ 美元的价格赎回（随着时间的推移，K 经常是下降的）。有赎回条款的债券收益率通常高于等价的不可赎回债券，这是为了补偿其固有的赎回条款。

同样，**可售还债券**（putable bond）允许其持有者在将来一个固定时间以预先确定的执行价格要求提前支付。可售还债券的持有者拥有一个“普通债券”加一个该债券的看跌期权。因为看跌期权是有价值的，所以可售还债券经常会有较低的收益率（相对于等价的不可售还债券而言）。

大量的金融工具都包含嵌入期权，即使是在最简单的资产和负债里面。现在来考虑一笔固定

期限、固定利率的存款。这就像持有一个传统的支付息票的债券。然而，如果允许你在某一特定日期终止你的存款（即提前偿还是可能的），那么这笔存款就相当于持有一个传统的债券加一系列该债券的看跌期权，该期权在将来的不同日期到期，并且执行价格等于存款的面值。类似的道理，固定利率贷款的提前偿付特权就像是债券的赎回条款。贷款的持有者可以被看做是发行了一个债券（即借钱），但是如果愿意的话，她可以买回这些债券（即以面值赎回贷款），不过通常有一个至少两年的最短期间。

可调整利率（住房）贷款经常带有上限协议和下限协议的特征。借款者同意支付例如“6 个月 LIBOR 利率加 1%”，但是支付的最高利率和最低利率通常在签订贷款合同的开始就固定了。

假设一家银行提供 5 年期每年 10%固定利率的贷款承诺，但是这份贷款承诺可以在接下来的 6 个月内的任何时间付清。这和一个普通贷款（即公司发行债券）是等价的，但是付清贷款承诺的人同时拥有了一个嵌入看跌期权，因为她可以选择在接下来的 6 个月内是否以每年 10%的执行利率付清该 5 年期贷款，或者在即期市场选择较低的利率。

抵押证券（MBS）

金融机构，主要是银行、储贷机构（S&Ls）和抵押公司，主要提供期限为 15 年到 30 年的固定利率抵押贷款。但是，这些抵押贷款可以捆绑成一个组合，并以抵押证券（MBS）的形式出售给投资者。这个过程就是所谓的证券化，在美国，这个市场空间很大。MBS 的本金和利息支付通常有政府的代理机构做担保（例如国民政府抵押协会，简写为 GNMA 或“Ginnie Mae”）。证券化也可以是基于汽车的贷款和信用卡收据，或者任何其他的贷款偿付。

抵押转手证券和本息分离债券

MBS 可以有多种执行方式。最简单的方式是抵押转手债券（mortgage pass-through）。这里，投资者会（周期性地）收到占标的抵押品一定比例的本金和利息支付。对于转手债券中的投资者，标的抵押品的初值（V_0）等于每期 C 美元的固定息票抵押支付加上本金偿还的现值。由于该债券的支付是由国民政府抵押协会担保的，所以折现率就是即期无风险利率值。转手债券易受重大利率风险的影响。首先，它们是长期投资，所以利率的变化会引起其现值的大幅波动。其次，转手债券还面临着提前偿付风险。

如果利率下跌，那么一些房主就会希望偿清他们现有的固定利率抵押贷款，而以较低的利率再融资。因此，转手债券的持有者会发现提前支付的情况越来越多，而投资者却只能对这种“意外收获”以现行的低利率再投资。抵押转手债券价值的变化取决于两个相互抵消的影响因素。首先，利率的下跌增加了未来未偿还固定利率支付的现值，但是其次，提前支付率的升高降低了后续年份中本可以挣到的利息产生的利息（interest on interest）金额。净结果就是利率的下降经常导致转手债券价值（V_{PT}）的增加，但是由于增加的提前支付率，收益受到了限制。相反的情况是，如果利率上升，抵押贷款支付者不希望提前支付本金，于是转手债券未来支付金额的现值就会下降。抵押转手债券可以被分成只收利息（IO）债券和只收本金（PO）债券。投资者可以购买 IO 或 PO 债券中的一种或两种。

只收利息（IO）债券的投资者只能从抵押贷款组合中收取利息支付。而只收本金（PO）债券的所有者只能收取本金支付。

如果利率上升，那么 IO 债券的持有者收到的利息产生的利息会增加，但是这却被资本损失（即对于某笔给定的未来收益，其现值 PV 减少）抵消了。当利率下跌的时候，固定的未来息票收益的现值 PV 将会增加，但是，提前支付情况的增加减少了 IO 的现值。净影响通常是利率下跌导致 IO 债券的价值下跌。

通过考虑下面“格式化”的抵押贷款组合，我们可以解释利率变化对 MBS（包括 IO 和 PO）的影响：

初始抵押贷款价值 $P_0=100\ 000$ 美元

初始抵押贷款的期限 $n=10$ 年

固定利率（每年支付）$r=$每年 10%

抵押贷款所有者每年支付的金额，即固定（息票）利率支付，等于 $C\times[\mathrm{PVA}_{n,r}]=P_0$ 的解，其中，$\mathrm{PVA}_{n,r}=1/r[1-1/(1+r)^n]$，即一个 n 年年金的现值。因此，给定上述固定利率抵押贷款的条件，我们得出 $C=16\ 275$ 美元（每年的固定支付金额），见表 15—6 第 3 列。

表 15—6　　抵押担保证券

固定偿付率	0.1
初始抵押贷款金额	100 000 美元
初始贷款期限(年)	10
无风险利率(低)	0.07
无风险利率(中)	0.08
无风险利率(高)	0.09

年份	未偿还贷款金额(支付前)	固定支付金额	利息金额	本金偿还金额	未偿还贷款金额(支付后)	NPV		
							IO(美元)	PO(美元)
1	100 000	16 275	10 000	6 275	93 725			
2	93 725	16 275	9 373	6 902	86 823	NPV(7%,2 年)	17 532	87 728
3	86 823	16 275	8 682	7 592	79 231			
4	79 231	16 275	7 923	8 351	70 880			
5	70 880	16 275	7 088	9 187	61 693			
6	61 693	16 275	6 169	10 105	51 588	NPV(7%,7 年)	43 041	69 871
7	51 588	16 275	5 159	11 116	40 472	NPV(8%,7 年)	41 733	66 614
8	40 472	16 275	4 047	12 227	28 245	NPV(9%,7 年)	40 488	63 561
9	28 245	16 275	2 825	13 450	14 795			
10	14 795	16 275	1 480	14 795	0	NPV(9%,10 年)	44 444	60 000

在第 1 年，贷款的利息支付额为 $\mathrm{IO}_1=10\ 000$美元$=rP_0$，这意味着$(C-rP_0)=6\ 275$美元可

以被用来减少应偿还的初始本金额，于是第 1 年末剩余未偿还本金为 $P_1=93\ 725$美元，即100 000美元－6 275美元$=P_0-(C-rP_0)=P_0(1+r)-C$(见表 15—6 第 1 列)。在以后的每年，我们可以按下式进行计算：

第 t 年偿还的利息额：　$\mathrm{IO}_t=rP_{t-1}$

第 t 年偿还的本金额：　$\mathrm{PO}_t=C-rP_{t-1}$

每个 P_t 通过递归计算：

$$P_t=P_{t-1}-\mathrm{PO}_t=P_{t-1}-(C-rP_{t-1})=(1+r)P_{t-1}-C \tag{15.19}$$

购买 IO 债券的投资者愿意支付利息支付额的现值。我们取每年 $y=8\%$作为 10 年期无风险长期国债的收益率，并且假设(是任意假设的)$y=8\%(<10\%)$的情况下，由于一些房主提前偿还的出现，抵押贷款的平均期限将会缩减到 7 年。在表 15—6 第 8 列，利息支付的现值为

$$\mathrm{PV}_{\mathrm{IO}}=\frac{\mathrm{IO}_1}{(1+y)}+\frac{\mathrm{IO}_2}{(1+y)^2}+\cdots+\frac{\mathrm{IO}_7}{(1+y)^7}=41\ 773(\text{美元}) \tag{15.20}$$

同理，购买 PO 债券的投资者愿意支付第 7 年年底之前需偿付本金金额的现值（见表 15—6 第 5 列），加上抵押贷款提前偿还的剩余未偿本金 P_7（40 472 美元）。也就是

$$\mathrm{PV}_{\mathrm{PO}}=\frac{\mathrm{PO}_1}{(1+y)}+\frac{\mathrm{PO}_2}{(1+y)^2}+\cdots+\frac{\mathrm{PO}_6}{(1+y)^6}+\frac{\mathrm{PO}_7+P_7}{(1+y)^7}=66\ 614(\text{美元}) \tag{15.21}$$

转手债券的价值也就是 IO 和 PO 债券价值的简单加总，即

$$\mathrm{PV}_{\mathrm{PT}}=\mathrm{PV}_{\mathrm{IO}}+\mathrm{PV}_{\mathrm{PO}}=108\ 347(\text{美元}) \tag{15.22}$$

之所以把 MBS 归为衍生证券，是因为 MBS 的投资者不仅有一系列息票（票据到期）支付的求偿权，而且 MBS 类似于其持有者发行了一个美式看跌期权（其执行价格等于抵押贷款的未偿金额)。相反，偿付抵押贷款的房主相当于有一个看跌期权多头头寸，在将来利率下跌时他们更可能执行期权。

现在我们来考虑一下利率变化的时候 IO 和 PO 债券的价值会有什么变化。我们将会看到价值变化关键取决于利率是如何影响提前支付期权是否被执行的。

IO 债券

如果 y 下降到 7%，并且支付日期仍然是第 7 年年底，那么 $\mathrm{PV}_{\mathrm{IO}}$会从41 733美元上升到43 041美元。然而，如果利率下降到 7%，并且使得平均支付日期变为第 2 年年底，那么 IO 债券就只值

$$\mathrm{PV}_{\mathrm{IO}}=\frac{\mathrm{IO}_1}{(1.07)}+\frac{\mathrm{IO}_2}{(1.07)^2}=17\ 532(\text{美元}) \tag{15.23}$$

所以，虽然 y 的下跌幅度从 8%变为 7%使得每笔利息收入的现值增加，但是利息支付的次数却从 7 下降到 2，从而 $\mathrm{PV}_{\mathrm{IO}}$会有一个显著的下降。

现在假设 y 从 8%上升到 9%。如果抵押贷款的平均期限仍然是 7 年，那么 $\mathrm{PV}_{\mathrm{IO}}$会从41 733美元下降到40 488美元。然而，如果贷款平均年限延长到 10 年，那么由于利息支付的次数增加了，$\mathrm{PV}_{\mathrm{IO}}$会从41 733美元上升到44 444美元（尽管是在一个较高的折现率水平上）。因此，$\mathrm{PV}_{\mathrm{IO}}$价值的变化关键取决于 y 的变化（即纯债券价格的影响）与提前支付期权变化（即房主是否执行提前支付期权）的相互影响情况。

PO 债券

在各种各样的原因中，有一些提前偿还的情况仅仅是因为贷款者搬家（例如小孩的出生、工作的变化，其中后者可能受到经济周期和工作机会地区间差异的影响）。但是，这里我们只集中讨论利率和提前支付期权的相互影响。

假设 y 从 8%下降到 7%或者从 8%上涨到 9%，而 7 年的偿付期限是不变的。显然，如果利率下降(上升)，则 PV_{PO}增加(减少)。但是，如果 y 从 8%下降到 7%使得平均偿付日期变为第 2 年年底，那么

$$PV_{PO}=\frac{PO_1}{(1.07)}+\frac{PO_2+P_2}{(1.07)^2}=87\ 728(\text{美元}) \tag{15.24}$$

其中，$P_2=86\ 823$美元(见表 15—6 第 2 行第 8 列)，为第 2 年年底抵押贷款未偿本金86 823美元。因此，PV_{PO}会从 $PV(T=7,\ y=8\%)=66\ 614$美元增加到 $PV(T=2,\ y=7\%)=87\ 728$美元。另一方面，如果利率从 8%上升到 9%并使得偿付期变为 10 年，那么 PV_{PO}会从 66 614 美元下降到 $PV(T=10,\ y=9\%)=60\ 000$美元。

与 IO 和 PO 债券相比，抵押贷款转手债券对利率变化以及偿付期限的变化显得不够敏感。当 y 上升的时候，抵押贷款转手债券的价值下降。如果 y 下跌，那么转手债券的价值通常会上升，但是由于提前偿付率增加，从连续利率下降中只能获得有限的收益。

抵押担保债务

抵押担保债务（CMO）类似于抵押转手债券，但是贷款的利息和本金收入被分成了不同的“等级”，并且每个等级对于该收入有不同的优先权。举例来说，CMO 可以有三类投资者：A 类，B 类和 C 类。所有的本金偿还可能都经过 A 类投资者，直到所有的本金全部还清为止，然后所偿还的本金会给 B 类投资者，最后 C 类投资者得到偿还本金的剩余部分。显然，A 类投资者面临着最大的提前偿付风险。一般来讲，CMO 是一种非常复杂的衍生证券，对每类投资者，它通常包含复杂的嵌入提前支付期权。它们属于难以定价的证券，并且价值会剧烈变动。尽管它们有政府的信用担保，但并不能保证其市场价值保持不变，因此，它们远不是一种“安全的投资”。

15.6 本章摘要

- **长期国债期权和长期国债期货**可以用来对将来的长期利率进行投机，或者用来限定标的债券（或债券期货）的最大购买价格，或者保证一个最低出售价格（即保险）。
- 一个有未偿贷款的公司可能会购买**利率看涨期权（上限期权）**来进行保险（即支付的最大有效利率），但是这种做法也允许公司在将来利率下降的时候获得较低利率带来的好处。同时，一家拥有固定利息支付（对它的存款持有者）但是又有收取浮动利息贷款的银行要承受将来利率上涨的风险，因此它可能会购买一个利率看涨期权。
- 一家公司预计将来会有一笔资金收入，并想将该资金用于 3 个月期存款，但是又担心将来的利率下跌，于是它就可能会购买一个**利率看跌期权（下限期权）**。通过该操作，公司

可以为 3 个月后的利率锁定一个最低水平；同时，如果 3 个月后利率上升（于是下限期权处于虚值），公司也可以以即期市场较高的利率进行投资。

- 公司可以通过**利率上限**保护一系列未来的付款不受利率上涨的冲击。利率上限无非是一系列上限期权，其到期日为公司持有贷款相应的利息支付日。
- 一家想将未来一系列现金流用于存款的公司会因为将来的利率下跌蒙受损失。同样，一家对其贷款收取浮动利率的银行也会因利率下跌受损。但是，通过购买**利率下限**，一个市场参与者就能从利率下跌中获得保护，而同时又能从上升的利率中获益。
- **利率双限**由一个**利率上限多头**和一个**利率下限空头**组成。这为一家需偿还浮动利率贷款公司的有效借款成本设定了上限和下限。
- 公司可以通过**远期互换协议**锁定将来的互换利率（开始于将来的某一特定时间），但是，如果将来互换利率下降，公司就不能获得较低的互换利率带来的好处。
- 支付者**互换期权**是标的于“收取固定，支付浮动”互换协议的期权。如果你是支付者期权的多头，那么你就为将来互换协议支付的固定利率设定了一个上限（这会在互换期权到期的时候开始），但是，如果不执行互换期权，你就可以利用未来互换利率的任何下跌（以新的较低的互换利率购买一个互换协议）带来的机会。
- **嵌入债券期权**是一种可以选择债券中收益发生时间的债券。例如，**可赎回债券**赋予了其发行者在将来某一特定时间以面值赎回该债券的权利。该债券规定了执行价格等于面值的赎回条款。
- 最大且最活跃的固定收益衍生证券市场之一就是各种形式的**抵押证券**（MBS）。正是提前偿付的可能性赋予了它们“嵌入期权”的特征。**抵押担保债务**（CMO）是另一种形式的 MBS，在 CMO 中，对不同“等级”的投资者未来的现金收入会有不同的处理方法。

章末练习

1. 远期互换协议和互换期权协议的主要区别是什么？

2. 抵押转手债券和抵押贷款债务有哪些不同？

3. FRA 和上限期权有哪些主要区别？

4. 一家公司计划 180 天后借入 100 万美元，该贷款期限为 90 天，适用于届时的 LIBOR 利率。如果公司不采取任何操作，而直接在第 180 天时进行为期 90 天的贷款，那么假设届时 90 天 LIBOR 变为 12%或 7%的情况下，公司会面临什么风险？如果公司购买了一个协议利率为 10%的 FRA，结果会怎样？（在每种情况下，请计算出按年计算的贷款成本，假设一年为 360 天。）

5. 假设现在是 2000 年 6 月 1 日，一家美国跨国公司以浮动利率贷款 1000 万美元，在接下来的一年里，利息每 90 天支付一次。现行 LIBOR 利率为 10%。公司在贷款的同时购买了一个执行利率为 $K=10\%$的利率上限，费用为 15 000 美元。假设 LIBOR 利率在 9 月 1 日（+92 天）变为 10.5%，12 月 1 日（+91 天）变为 10.8%，3 月 1 日（+90 天）变为 11.0%，2001 年 6 月 1 日（+92 天）变为 11.1%，请确定这些利率下贷款期间内的现金流情况。利率上限的收益根据实际天数计算，一年假设为 360 天。请计算购买上限协议和未购买上限协议情况下的利息成本（即内

部收益率 IRR)。(你会发现利用 Excel 计算更方便。)

6. 假设现在是 2001 年 1 月 1 日，你的公司贷款 100 万美元，利息分别在 4 月 1 日、7 月 1 日、10 月 1 日和 2002 年 1 月 1 日支付。该贷款的浮动利率适用于 LIBOR 利率(现在为每年 10%)。为保证在利率上升的时候免遭较高利息支付带来的损失，你现在购买了一个利率上限，执行利率为 10%，费用为3 500美元。假设 LIBOR 利率在 7 月 1 日(+92 天)变为 11%，10 月 1 日(+94 天)变为 11.5%，2002 年 1 月 1 日(+90 天)变为 12.0%，请确定购买上限协议和未购买上限协议的情况下公司的贷款成本。假设利率上限的收益是根据“实际天数/360”计算的。(利用 Excel 计算会更容易。)

7. 假设现在是 2001 年 1 月 1 日，你以浮动利率贷款 10 000 美元，接下来的一年中每 90 天为重新设定日。贷款的同时你购买了一个执行利率为 $K_c=10\%$、成本为 $C=14$ 美元的利率上限，以及一个执行利率为 $K_{FL}=8\%$、成本为 8 美元的利率下限。1 月 1 日 90 天 LIBOR 利率为 9%，并且在以后的每个 90 天期间内 LIBOR 剧烈波动，90 天后为 10%，180 天后为 11%，270 天后为 7%。请计算每个期间内，持有和未持有上限协议和双限协议时的收益情况以及这三种情况下贷款的利息成本。

第16章

复合衍生品

学习目标

- 介绍如何应用期权理论对**公司债务和股权**估值，这个观点可以进一步完善并应用于模拟信用（违约）风险。
- 考察不同种类的**认股权证**（equity warrants），这是一种关于公司股票的长期期权。**数量调整期权**（quanto）也是一种长期股票期权，但是它们标的于国外的股票，以本国货币进行支付。
- 介绍**股权上下限组合**（equity collar）如何保证一个投资组合的经理确保自己股票投资组合的最大以及最小损失界限。这种方法具有零“直接”成本，其交易被称为**风险逆转**（risk reversal）。
- 解释**股票互换**（stock swaps）如何使只拥有一种资产现金流（比如浮动利率票据的利息）的投资者调换这些现金流入，并且在股票指数（比如标准普尔500指数）上获取收益。
- **奇异期权**（exotic option）是一个通用名词，是指具有相对复杂收益形式的期权，其中有一些是**路径依赖型**（path dependent）期

权。后者意味着期权的回报由标的股票价格的整个变化路径所决定，而不是仅仅依靠到期日的股票价格。我们还将分析亚式（或平均率）期权、回望期权、障碍期权、前瞻期权和择式期权。

在前面的章节中，我们讨论了一系列的衍生证券，然而，在设计这些为了满足委托人需要而产生的不同种类的期权和衍生证券的过程中所能用到的独创性是无限的。本章中，我们来讨论一些深奥的股票衍生合约（也可以用于商品期权和外汇期权）是如何用于投机和对冲的。然而，我们首先需要考察一下如何用期权理论对公司的股权和债务估值。在随后的部分，我们将会介绍几种最基本的股票衍生品，比如认股权证、上下限组合和互换。然后我们介绍奇异期权，其中很多奇异期权是路径相关的。奇异期权的封闭形式解通常不可能得到，但是我们介绍了如何利用二叉树对这些期权进行定价。最后我们介绍如何在把一些奇异期权（如择式期权）看成几种标准期权组合的情况下，得到严格形式的解。

16.1 从期权角度看公司股票和债券

Merton（1974）和 Black，Scholes（1973）注意到可以用期权理论对公司股权和债务进行定价。假设一个公司有两种融资途径，债务 D 和股权 E。如果公司的资产价值 V_t 超出了应付债务金额 F_B，由于在支付债权人之后还有一部分剩余的资产，因此公司的股权人能得到一部分正的回报。另一方面，如果公司的价值低于债务的面值，那么由于股权人的有限责任，他们也不用进行完全偿付。因此，股权人的收益非常像一个看涨期权。当公司的价值高于债务金额时，回报是公司的资产价值减去债权人的求偿($V-F_B$)，当公司的价值低于债务金额时，回报是零。为了进一步分析，我们假设：

F_B＝在 T 时刻到期的(零息)债券(债务)的面值

D_t＝在 t 时刻($t\leqslant T$)债券(债务)的价值

V_t＝在 t 时刻($t\leqslant T$)公司资产的(市场)价值

E_t＝在 t 时刻($t\leqslant T$)股东持有的股权价值

情况 A：在 T 时刻具有偿付能力

这时，公司的价值 V_T 超过了债券的面值 F_B，$V_T\geqslant F_B$，那么债券持有者得到 $D_T=F_B$，股票持有者得到 $E_T=V_T-F_B$。

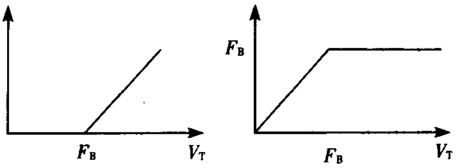
情况 B：在 T 时刻不具偿付能力

这里 $V_T<F_B$，因此 $D_T=V_T$，并且 $E_T=0$。

对于上面的两种情况，总的收益可以表示成（见图 16—1）：

$$E_T=\max[0,V_T-F_B] \tag{16.1}$$

$$D_T=F_B-\max[0,F_B-V_T] \tag{16.2}$$



股票持有者的收益　　债券持有者的收益

图 16—1　股权人和债权人的收益

因此股权的价值非常像一个标的于公司总资产，执行价为 F_B 的欧式看涨期权。如果我们假设（正如在 Black - Scholes 公式中）公司的价值服从几何布朗运动（GBM），在 t 时刻股权价值 E 由 Black - Scholes 公式给出：

$$E_t=C_E\ (V_t,\ F_B,\ \sigma,\ r,\ T-t)$$

现在考虑一下在 t 时刻债务的市场价值。如果 $V_T<F_B$，股权人就要把公司"移交"给债权人。债权人出售了一个公司总资产的看跌期权。因此，债务的价值就是债券的面值（$D_t=F_B e^{-r(T-t)}$）的现值 PV 减去公司股权人持有的看跌期权的价值。债权人所获得的收益可以在图 16—1 中看出，它包括了一个看跌空头(回报={−1，0})和数量为 F_B 的资金。因此 t 时刻债务的价值是

$$D_t=F_B\ e^{-r(T-t)}-P_E(V_t,F_B,\ \sigma,\ r,\ T-t) \tag{16.3}$$

其中，P_E（$\cdots F_B\cdots$）是执行价格为 F_B 的公司总资产看跌期权的现值。看涨和看跌期权的价格 C_E 以及 P_E 分别由 Black - Scholes 公式给出。注意，由于债务的价值要比无风险债券的价值（即 $F_B\ e^{-r(T-t)}$）小，这是因为 P_E 包含了违约风险，在这种情况下，债权人将无法得到他们债券的全部面值。

定价

Merton（1973）给出了对公司风险债务定价的封闭形式解。由于假设公司的价值服从布朗运动，因此，债务（即公司债券）市场价格的公式和 Black - Scholes 公式具有相似的形式。风险债务 D_t 的市场价格是

$$D_t=Be^{-r\tau}[(1/L)N(d_1)+N(d_2)] \tag{16.4}$$

其中，τ 为 $T-t$=贷款/债务/公司债券的到期时间，r 为无风险利率，L 为杠杆比率（即 $B\ e^{-r\tau}V$，其中 B 为在 t 时刻公司应付债务的价值），d_1 为 $-[1/2\sigma_{v\tau}^2-\ln(L)]/\sigma_v\sqrt{\tau}$，$d_2$ 为 $-[1/2\sigma_{v\tau}^2+\ln(L)]/\sigma_v\sqrt{\tau}$，$\sigma_v^2$ 为公司价值的波动率（即公司总资产价值 V 的变化率的方差）。

Merton 模型还给出了应向公司借款人征收的均衡收益率价差（相对于国债）的表达式：

$$价差=r_{corp}-r=(-1/\tau)\ln[N(d_2)+(1/L)N(d_1)] \tag{16.5}$$

这个模型的预测是很直观的。特别是，如果杠杆比率或是公司资产的波动率升高时，价差就会跟着上升（债券的价格就会下降）。

上面方法的扩展形式也可以用来衡量信用违约风险（例如，旧金山的 KMV 公司就使用这种方法）。如果 D_t 和 V_t 可以精确衡量，那么公式（16.4）就可以反过来用于求解公司总资产的隐含波动率 σ_v^2。假设 σ_v 是 1 212 万美元，那么根据正态假设，公司价值 V 有 5%的可能性会降到

2 000 万美元以下（$=1.65\sigma$）。假设公司现在的价值是 1 亿美元，应偿付债务的价值是 8 000 万美元，那么我们的期权模型暗示着在这个债务的生命期内（时期内），公司有 5%的可能性会陷入“财务危机”。不幸的是，对于一个杠杆融资的公司（即这个公司有不能进行市场交易的银行贷款），V 和 D 并不能很容易地衡量出来，因此，我们需要对这个模型进行进一步地分析，使它更加实用（参见第 25 章）。

值得注意的是，上面这个例子非常简单，在这里，所有的债务都在同一天到期，因此，这个债券是“零息债券”。对于付息的公司来说，很显然债券估值更加困难，因为，每一次息票支付都可以被看做是一个看跌期权，而且，如果“前一次”的看跌期权执行了，那么“后面”的看跌期权都是毫无价值的。另外，公司债券经常是可转换的并具有赎回权（即收益是路径依赖的），这些意味着要想得出封闭形式解在技术上是不可行的，因此，我们需要很多其他的方法，比如二叉树法、蒙特卡罗模拟或是偏微分方程（PDE）数值解法，这些将在本书后面的章节中讨论。

16.2 基本的股权衍生品

认股权证

认股权证是最古老的期权表现形式之一。他们是公司发行的关于自己的股票的期权。最初发行认股权证，是因为公司发行长期债券时意识到，如果债券附有一定的转换权利将会对投资者更有吸引力（因此就可以具有更低的成本）。这些认股权证保证投资者可以在将来的某一时刻以现在就确定的价格获得公司的股份。如果公司的表现很好，在将来它的股票价格上升，那么这个认股权证就是“实值”的，如果执行就可以获利。这种认股权证与债券已经分离，是可以直接在股票交易所单独交易的。认股权证通常作为向承销商支付的费用而发行，或者是作为公司的行政奖励的一部分（后者称为**行政股票期权**）。认股权证的最初期限是 2 年至 12 年（或者更长）中的任何期限，因此认股权证是长期期权，它们包含着发行公司的信用风险。

欧式认股权证的定价

欧式认股权证只能在某个特定日期执行，它们的定价与一般的欧式股票期权的定价很相似，区别仅在于，如果欧式认股权证被执行，那么公司必须增加流通在外的股票总数。但是在交易所交易的普通期权执行时不会发生这种“稀释”现象。

假设公司流通在外的股票数为 N，并且有 M 个欧式认股权证，每份认股权证允许持有者在 T 时刻获得 γ 股股票，并且执行价格是每股 K 元。如果在 T 时刻执行了认股权证，那么公司就有(γMK)的现金流入，并且公司的股权从 V_T 上升到($V_T+\gamma MK$)，同时流通在外的股票总数也上升到($N+M\gamma$)。因此，执行后的股价立刻变为

$$P_X=\frac{V_T+\gamma MK}{N+M\gamma} \tag{16.6}$$

如果执行认股权证，持有者的收益是 $\gamma(P_X-K)$，将 P_X 带入整理得到

$$\text{认股权证收益}=\frac{N\gamma}{N+M\gamma}\max\left[\frac{V_T}{N}-K,0\right] \tag{16.7}$$

因此，认股权证的价值等于 $N\gamma/(N+M\gamma)$ 个关于 V/N 的普通看涨期权。在 $t=0$ 时刻，我们得到

$$V_0=NS_0+MW_0 \tag{16.8}$$

其中，W_0 为认股权证在 $t=0$ 时刻的价值，因此

$$\frac{V_0}{N}=S_0+\frac{M}{N}W_0 \tag{16.9}$$

为了得到认股权证 W_0 的价值，我们必须应用计算股票期权价格的 Black - Scholes 公式，其中：

- 用 S_0+ (M/N) W_0 来代替 S_0；
- 用 σ 来表示公司价值 V（股权加上认股权证）的波动率；
- 用 Black - Scholes 公式计算得出的期权价格乘以 $N\gamma$ $(N+M\gamma)$。

这是我们现在最终需要解决的问题。W_0 是 W_0 的函数，因为后者会出现在 Black - Scholes 公式的右边。因此，W_0 的解可以通过数值方法获得。

与债券相关的认股权证使债券投资者可以收到周期性的息票支付。但是如果公司的运作良好，那么债券持有者也可以因为拥有公司更高的未来收益的求偿权而获得公司的一部分收益。由于这种隐含期权的存在，如果债券附有一定的认股权证，那么它的收益率将要比一般的可转换债券低（也就是具有较高的价格）。这使“附有认股权证”的债券成为“小型高速成长”公司的极具吸引力的融资手段。因为这些公司可能没有充足的现金流来支付普通债券的利息。

另外一种有用的认股权证是**数量调整期权**（Quanto，即 quantity adjusting option）。这是一种长期期权（即认股权证），它通常是基于外国的股票指数，比如日经 225 指数，并且在像 AMEX 这样的交易所进行交易。因此在到期日，如果 $S_T>K$，那么标的于日经 225 指数的看涨期权（认股权）可以带给美国的持有者一定的利润。然而，关于数量调整期权另外一个有趣的现象是，在购买这个期权时，合同中包括了关于日元和美元的一个固定的汇率。因此，按照本国货币计算时，数量调整期权的收益是确定的，所以如果关于日经指数的收益 S_T-K 是20 000日元，并且协定的利率是每美元 100 日元，那么收益将是 200 美元。

显然，“认股权证”是一个通用名词，用来描述具有很长到期时间的期权。与单一股票的认股权证类似，也有第三方（比如美林证券、摩根斯坦利、所罗门兄弟公司）发行的（通常标的于股票指数的）认股权证向大众出售，它们通常在交易所（如美国股票交易所）交易，而不是在 OTC 市场上。认股权证也会标的于美国国债、其他各种股票指数和一些货币。

股权上下限

股权上下限与利率上下限类似，它设定了一个股票投资组合价值的最高水平和最低水平。股权上下限主要包括了：

- 股票组合的多头；
- 执行价格为 K_1 的股票看跌期权多头；
- 执行价格为 K_2 的股票看涨期权空头（其中 $K_2>K_1$）。

图 16—2 中给出了收益曲线，如果执行价格是选定的，并且看涨和看跌期权的期权金恰好相

互抵消（即 $C=P$），那么这个上下限组合设定时没有预先支付的成本，通常我们称之为**风险逆转**（risk reversal）。为了保证 $C=P$，通常至少有一个执行价格是市场上交易的期权所不能提供的。例如，在选定了 $K_1=159$ 之后，我们利用 Black - Scholes 公式计算出 $P=2.2$。现在我们要求 $C=2.2$，但是通过带入 Black - Scholes 公式反求出的看涨期权的价格 $K_2=160.80$。由于市场上没有执行价格为 $K_2=160.80$ 的期权进行交易，因此我们必须利用 OTC 期权。

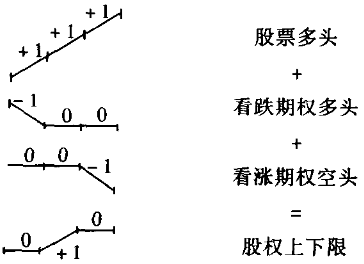


图 16—2　股权上下限:收益曲线

根据金融工程的原理，我们用 F_0 来表示（不发放红利）股票的未来价格，然后考虑下面的投资组合：

投资组合 A：现在(在 $t=0$ 时刻)持有一股股票，并且借入资金 $F_0/(1+rT)$。

在到期日 $t=T$，投资组合 A 包括一股股票和价值为 F_0 美元的负债。由于在 $t=0$ 时刻买入股票 S_0 的成本与借入资金的金额 $F_0/(1+rT)$相等，因此，在最初设定投资组合时，投资者并没有使用自己的资金。这样投资组合 A 与股票的远期合约的多头是等价的。在上下限组合中，我们持有一个股票投资组合（加上两份期权合约）。但是股票多头的收益曲线与股票远期合约多头的收益曲线是等价的，因此股权上下限也被称为**范围远期**（range forward），因为它等价于一份较高以及较低的收益都被削掉的股票远期合约（见图 16—2）。

表 16—1 更详细地给出了对于三种到期日可能出现的股价“范围”的上下限组合的相应回报。可以看出，最低的收益界限是 K_1，最高的收益界限是 K_2，期权的净成本为：

$$净成本=P(S_0,\ T,\ K_1)-C(S_0,T,K_2)\qquad 其中\ K_2>K_1\tag{16.10}$$

表 16—1　　股权上下限的收益

	$S_T<K_1$	$K_1\leqslant S_T\leqslant K_2$	$S_T>K_2$
股票多头	S_T	S_T	S_T
看跌期权多头（K_1）	K_1-S_T	0	0
看涨期权空头（K_2）	0	0	$-(S_T-K_2)$
总收益	K_1	S_T	K_2
净利润⁽¹⁾	$K_1-(P-C)$	$S_T-(P-C)$	$K_2-(P-C)$

(1) 净利润＝总收益－$(P-C)$。

在到期日，当下式成立时，盈亏相抵：

$$\Pi=S_T-S_0-(P-C)=0\tag{16.11}$$

因此

$$S_{BE}=S_0+(P-C) \tag{16.12}$$

根据定义，“风险逆转”无任何事先支付的成本，我们因此可获得 $P-C=0$，并且 $S_{BE}=S_0$。

如果我们想获得一个风险逆转，则必须保证成本为零。一旦我们选定了基准价格 K_1，就可以获得 P 的数值，然后我们就得到

$$C(S_0,T,K_2)=P \tag{16.13}$$。

然后我们通过 Black-Scholes 公式反求出 K_2（通过迭代），因此使得 $C=P$。风险逆转的好处在于它可以使股票的持有者在事先无任何成本的情况下确保股票的最高和最低价格。但是“隐含的成本”消除了获得更高收益的可能性（与仅持有股票相比）。

股权互换

股权互换是一种 OTC 交易，它涉及基于名义本金的现金支出或收入，其中假设互换的一方持有股权（比如标准普尔 500 指数）。例如，一个持有浮动利率票据（FRN）的投资组合管理者可能会与交易者达成互换协议（关于名义本金），投资组合经理凭此就可以每隔 90 天获得一次标准普尔 500 指数的收益，再加上（或是减去）一个价差，并且支付 LIBOR。互换的周期可以是 1 年。从结果上来看，投资组合经理将它的资产获得的利息转换成了标准普尔 500 的收益。与卖掉所持有的债券并且买入一篮子的股票来复制标准普尔 500 指数相比，这是一种更为便宜的方法。因此，股权互换可以使参与者获得或失去某种形式的股权组合（并因此而在互换中获得或失去另一种资产）。

假设在 2001 年 1 月 10 日达成上面的股权互换，这个互换是关于 100 万美元的本金，并且互换价差是-0.5%。那么如果 LIBOR 是 5%（在 1 月 10 日），则 90 天后第一次 LIBOR 的支付是 12 500美元，即 100 万美元(0.05)(90/360)。

假设在这 90 天的期间内，标准普尔 500 指数上升了 1.98%(见表 16—2)，那么在 $t+90$ 时刻(即 4 月 10 日)标准普尔 500 指数的支付是 18 553 美元，即 100 万美元(0.0198)+100 万美元[$-0.005(90/360)$](见表 16—2 第 7 列)。

因此，“收到标准普尔 500 指数，付出 LIBOR”的投资组合经理将会在 $t+90$ 时刻获得净收入 6 053美元(=18 553 美元−12 500 美元)(见表 16—2 第 8 列)。

注意，如果在 4 月与 7 月之间，标准普尔 500 指数下降，那么投资组合经理在标准普尔 500 指数上要支出，并且同时要支出 LIBOR（与通常情况一样）。因此，当标准普尔 500 指数上升（或是下降）时，这个投资组合的经理可以因此收到（或需要支付）现金，并且总是要以LIBOR 利率支付。在股权互换期间的总收益取决于标准普尔 500 指数和 LIBOR 利率之间的相对关系。这个投资组合的经理可能会在这个互换中获得收益，也可能遭受损失，这可以用他在互换结束后的净现金收入来衡量。然而，股权互换的目的并不是对冲，而仅仅是为了获取标准普尔 500 指数的收益（无论最终的收益是怎么样的）而非债券的收益（LIBOR）。如果最初的投资组合包括了固定利率的债券，那么上面的股权互换就可能涉及付出的是固定利率的利息而不是浮动的 LIBOR 利率。

表 16—2　股权互换的支付

互换将会收到：标准普尔 500 指数的收益一每年 0.5%的价差，并且支付 LIBOR。

名义本金：	1 000 000
互换价差：	−0.005（即−0.5%）
每年的天数：	360

日期	天数	LIBOR	S&P 500		支付		股权互换
			指数	回报	LIBOR	S&P 价差	
2001 年 1 月 10 日		5.00%	1 500.00				
2001 年 4 月 10 日	90	5.35%	1 530.00	1.980 3%	12 500	18 553	6 053
2001 年 7 月 10 日	91	5.50%	1 510.00	−1.315 8%	13 524	−14 422	−27 946
2001 年 10 月 10 日	92	4.95%	1 538.00	1.837 3%	14 056	17 095	3 040
2002 年 1 月 10 日	92		1 630.00	5.809 7%	12 650	56 819	44 169

注：最后一列的“股权互换”指的是互换中的净支付。

其他的股权互换

另一种形式的股权互换可以保证美国投资者在不承受汇率风险的情况下投资于外国的股票。这种互换的一种替代方法就是直接买入外国的股票，但是这涉及很高的交易成本，（比如股票交易税、可能扣缴的红利税），另外还有比较大的汇率风险。相反，一种比较好的替代方法是持有美国股票的美国的投资组合经理同意每 90 天支付标准普尔 500 指数的收益，并且收到比如说是日经 225 指数的收益（可能还要加上或减去一个固定的互换价差，比如说每 90 天支付 0.5%）。这个互换的到期期限可能是 1 年，本金的数额为 1 000 万美元。在 $t+90$ 时刻，日经 225 指数的收益是 1 000 万美元（$R+0.005$），其中 R 是在 t 到 $t+90$ 这段时期内日经 225 指数的收益。注意，这个收入取决于用当地货币（日元）计算的日经 225 指数的收益，但是却需要用美元进行支付（因为名义本金是用美元进行计算的）。因此，对于一个美国的投资组合经理来说是没有外汇风险的。

很明显，投资管理者可以利用股权互换来有效地改变他的投资组合的成分。如果美国的经理人想少持有一些美国股票而多持有一些美国债券以及日本股票，那么他应该使用两个互换（每一个有它自己的名义本金来与资产中所要求的转换成分的比例相匹配）。在第一个互换中，他支付标准普尔 500 指数的收益并且收到 LIBOR（或是一个公司债券指数的收益率），同时在第二个互换中，他支付标准普尔 500 指数并且收到日经 225 指数的收益。这几乎一定会比直接买卖标的资产要便宜（在短期来看）。同时还要注意到，交易者可能只需要一个单独的 OTC 互换交易，因为互换交易者可以将两个单独的互换合并起来。这是一个 OTC 市场上的**结构性融资**（structured financing）。

然而，在上面的例子中，投资组合经理通过互换得到了他所要求的资产组合，（因此我们假设他获得了所要求的风险—收益均衡），但是对于美国的互换交易者来说，则有所不同。很明显，

在上面的例子中，互换交易者面临的风险有利率风险以及标准普尔 500 指数的风险或是日经 225 指数的风险。前两者可以通过一系列合适的期货合约进行对冲（对于互换中的每个支付时期利用一份期货合约，即期货叠期）。日经 225 指数的风险不仅仅涉及股权风险，还涉及汇率风险（由于互换交易者依据日经 225 指数做出的支付是用美元进行的），当然，这些风险也可以用一系列的股指期货和汇率期货来进行对冲。在进行这些期货对冲之前，互换交易者需要在他的互换账户中对所有的头寸进行结算净额。

下面简要介绍一下股权互换的定价问题。考虑一个收到标准普尔 500 指数，同时支出 LIBOR（即欧洲美元）的互换。这个互换等价于以 LIBOR 借款，再用所筹得的这部分款项买入标准普尔 500 指数。因此这个互换等价于一系列的远期合约，其中涉及标准普尔 500 指数的远期价格以及一系列关于欧洲美元利率的远期合约。这个股权互换的价格可以通过类似于利率和外汇互换定价的方法得出。

16.3 奇异期权

要严格区分普通期权和奇异期权是很困难的。一般说来，奇异期权的收益要比普通期权复杂得多。因此，奇异期权基本上是一类 OTC 工具，并且它们的回报可以根据代理商的要求而专门设定。因此，**结构性融资**（structured finance）通常是指由“一篮子”不同的奇异期权所构成的复杂收益。

欧式期权的收益仅仅取决于在到期日 T 标的资产的价格（因为只有在到期日才能执行欧式期权），而与到达 T 之前的路径无关。因此我们称欧式期权是路径无关的。然而，在到期日之前执行美式期权可能会获得利润，因此美式期权是**路径依赖**（path dependent）型的期权。很多所谓的奇异期权都是路径依赖型的。例如，亚式（平均价格）看涨期权所得到的收益取决于在期权生命期内的平均价格 S_{av} 和执行价格之间的差价。因此看涨期权得到的收益是 $\max(S_{av}-K, 0)$，并且 S_{av} 的价值取决于在期权生命期内股价的全部路径。类似地，还有一些期权的收益取决于在期权生命期内资产价格的最大值或是最小值，这些仍然是路径依赖型的奇异期权。

如果假设可以连续观测标的资产的价格，那么一些路径依赖型的期权会具有封闭形式解。事实上，这些路径依赖型期权的收益取决于标的资产在一些离散区间上的观测值（例如收盘价）。因此这些封闭形式的解并不适用。分析路径依赖型期权（只有离散的观测值）的最简单的方法就是应用 BOPM 或是 MCS，并且后者更为常用。然而，为了讲述方便，我们采用三期的 BOPM 模型。假设在每一个时期股价可能上升 15%也可能下降 20%，最初股价 $S_0=100$，$K=100$，r 是每期 10%。则股价可能出现的情况在表 16—3 中进行了总结，其中概率是 $q_i^*=q^k(1-q)^{n-k}$。

我们可以应用 BOPM 模型来对欧式期权进行定价，因为我们只需要知道在到期日的可能收益，对于看涨期权是 $\max[S(3)_i-K, 0]$，在表 16—3 的第 12 列中给出了这些数据。看涨期权的期权金就是预期得到收益的现值，因此 $C=\mathrm{e}^{-rT}\sum_{i=1}^{8}q_i^*\max[S(3)_i-K, 0]$。注意欧式看涨（看跌）期权的价值仅仅取决于在期权合约到期日股票的价格（在这里就是 $t=3$ 时）。另外，通过阅读第 8 章我们已经知道，我们无需将所有这 8 个路径都相加起来，实际上可以通过全二项式公式

$$C = e^{-rT}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{k}(1-q)^{n-k}\max[SU^{k}D^{n-k}-K, 0]$$

表 16—3　对亚式看涨期权定价——BOPM

决策树有 3 个分支（$n=3$）。

q 是风险中性概率，$q=(R-D)/(U-D)$；或者对于连续复利，$q=(e^{r\Delta t}-D)/(U-D)$。

$R=(1+r)$，其中，r 是定期利率，或者对于连续复利应用 $e^{-r\Delta t}$，这里 $\Delta t=1$。

$S(0)$	100	$T=0$	$T=1$	$T=2$	$T=3$
K	100				
U	1.15				152.09
D	0.8		115	132.25	
r	0.1				105.8
R	1.1	100		92	
q	0.857 143		80	64	73.6
$(1-q)$	0.142 857				51.2

路径编号	路径	上升的次数	概率	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$	S(平均值)	S(最大值)	S(最小值)	欧式期权	
											看涨期权收益	看跌期权收益
1	uuu	3	0.629 7	100	115.00	132.25	152.09	124.83	152.09	100	52.09	0.00
2	uud	2	0.105 0	100	115.00	132.25	105.80	113.26	132.25	100	5.80	0.00
3	udu	2	0.105 0	100	115.00	92.00	105.80	103.20	115.00	92	5.80	0.00
4	duu	2	0.105 0	100	80.00	92.00	105.80	94.45	105.80	80	5.80	0.00
5	udd	1	0.017 5	100	115.00	92.00	73.60	95.15	115.00	73.6	0.00	26.40
6	dud	1	0.017 5	100	80.00	92.00	73.60	86.40	100.00	73.6	0.00	26.40
7	ddu	1	0.017 5	100	80.00	64.00	73.60	79.40	100.00	64	0.00	26.40
8	ddd	0	0.002 9	100	80.00	64.00	51.20	73.80	100.00	51.2	0.00	48.80
										期权价值	26.02	1.15

平均（价格或执行价）亚式期权：收益

路径编号	路径	价格：看涨	价格：看跌	执行价：看涨	执行价：看跌	
1	uuu	24.83	0.00	27.25	0.00	
2	uud	13.26	0.00	0.00	7.46	
3	udu	3.20	0.00	2.60	0.00	
4	duu	0.00	5.55	11.35	0.00	
5	udd	0.00	4.85	0.00	21.55	
6	dud	0.00	13.60	0.00	12.80	
7	ddu	0.00	20.60	0.00	5.80	
8	ddd	0.00	26.20	0.00	22.60	
		13.05	1.01	13.99	1.17	期权金

注：(1) $S(1)$、$S(2)$、$S(3)$ 是对于整个网格上一个特定路径在每个节点上的股票价格。

(2) S(平均值)是对于这个特定路径上股票的平均价格，在计算平均值时包括 $S(0)$。

(3) S(最大值)和 S(最小值)是在这个特定路径上股价的最大值和最小值。

(4) 欧式看涨和看跌期权的收益仅仅与到期日的股价 $S(3)$有关。

(5) 亚式平均价格期权的收益：对于看涨期权是 $\max[S(\text{平均值})-K,0]$，对于看跌期权是 $\max[K-S(\text{平均值}),0]$。

(6) 亚式平均执行价期权的回报：对于看涨期权是$[S(3)-S(\text{平均值}),0]$，对于看跌期权是 $\max[S(\text{平均值})-S(3),0]$。

进行简化的计算。其中，仅仅是对价格向上变化的次数 k_i 求和，这里是 0～3。这也是一个路径无关的结果。由于我们仅仅关心在 $T=3$ 时刻的收益，因为“ud”的路径与“du”的路径是等价的，这是包括在前面的公式中

$$\binom{2}{1}=2$$

一项之中的。相反，对于路径依赖型的期权，由于收益取决于一个特定的路径，因此我们必须要计算在整个变化中每一步可能出现的路径的概率。

亚式期权

亚式期权的收益取决于在期权整个生命期内的平均价格。例如，一个**亚式（平均价格）看涨期权**（Asian (average price) call）的收益取决于 $\max(S_{av}-K,0)$，其中 S_{av}是在期权的生命期内的平均价格。因此，一个亚式平均价格的货币期权对一个公司非常有用，因为它可以对一个公司在未来用外汇计价的平均销售水平进行对冲。这个公司每年的外汇销售额可能是变化的，因此与为每一个月的现金流都买一个期权相比，利用亚式期权进行对冲是最便宜的方法。同样，如果公司对于高层主管人员的报酬包括了公司未来收入的一部分，那么，亚式期权也是对这个头寸进行对冲的最经济的方法。

亚式平均价格期权的收益对于看涨期权是 $\max(S_{av}-K,0)$，对于看跌期权是 $\max(K-S_{av},0)$。另外还有**亚式平均执行价格期权**(Asian average strike option)，在这种情况下，用平均价格来代替执行价格，因此，看涨期权的收益为 $\max(S_T-S_{av},0)$，对于看跌期权是 $\max(S_{av}-S_T,0)$。由于它们所包含的原理是类似的，我们就不再讨论平均执行价格期权的问题了。

亚式期权的收益可能是基于标的资产的算术平均价格或是几何平均价格。例如，如果在每个月结束时，股票的价格是 100，98 和 104，那么对于基于算术平均价格的看涨期权的收益将会是$(100+98+104)/3-K$，基于几何平均价格的将会是$(100)(98)(104)^{1/3}-K$。通常来说，几何平均价格要比算术平均价格低(当各个值都相等的时候例外)，因此当数列的波动性越大时，在这两个平均价格之间的差别就会越大。

虽然对于以几何平均价格计算的亚式期权我们能够得到解析解（与 Black－Scholes 公式类似），但是对于以算术平均价格计算的亚式期权却是不可行的，不幸的是，实际中的期权多是后一种期权。那么我们应该如何为这些期权定价呢？有两种比较常用的方法：二项式模型和蒙特卡罗模拟，这里我们对前者进行讨论。

假设一个关于股票的**亚式平均价格期权**（Asian average price option）的二叉树在表 16—3 中给出。对于一个 n 期的二项式模型，股价共有 2^n 种路径可供选择，那么对于 $n=3$，就共有 8 种可能的路径。(注意，在实际中为了得到精确的答案，二叉树中的步骤通常可能是 50 步甚至更多，这样就可能出现 2^{50} 种不同的路径需要进行估价。如果想要将此计算出来将会是一个很大的数目并且需要花费大量的计算时间。）在**风险中性估价**（risk neutral valuation）下利用 BOPM 对期权进行估计所必需的步骤有：

- 计算二叉树每个节点上的股票价格，并在到期日对 8 种可能出现的路径计算股票价格的平均数 $S_{av,i}$（$i=1, 2, \cdots, 8$）；
- 对于每个路径计算期权的收益，即 $\max(S_{av,i}-K,0)$（其中，$i=1, 2, \cdots, 8$）；
- 对于每个特定的路径出现的概率是 $q_i^* = q^k(1-q)^{n-k}$，其中，q 为股价向上变动风险中性概率，k 为股价向上变化的数目，$(n-k)$ 为股价向下变化的数目；
- 通过 q_i^* 来加权这个看涨期权 8 种可能出现的收益情况 $\max(S_{av,i}-K, 0)$ 可以得到

$$\text{预期的收益 } ES^* = \sum_{i=1}^{8} q_i^* \max[S_{av,i} - K, 0]$$

- 因此看涨期权的价格就是 ES^* 以无风险利率折现的现值：

  $C_{\text{Asian}} = e^{-rT}(ES^*)$

股票价格可能出现的这 8 种路经（其中，u 代表股价上升，d 代表股价下跌）以及在每种情况之下这个看涨期权最终的收益 $\max(S_{av,i}-K, 0)$ 都列在表 16—3 中。注意，在每种情况下最终日期的股票价格并不是很重要的，因为最终决定期权收益的是平均价格。这个亚式平均价格看涨期权的价格是 $C=13.05$。对于亚式平均执行价格期权的收益和期权金的计算方法是类似的，都列示在表 16—3 的最后两列中。

利用二项式模型对亚式期权定价的主要问题是，为了得到精确的 C，我们至少需要 50 个步骤，而这需要对 2^{50} 种可能的路径进行估价！即使高速计算机可以很快地对这个期权进行定价，这还是需要一定的时间（而这是一个非常活跃的市场）。

另外一种可以对亚式期权进行定价的更有效的方法就是在**风险中性估价**下应用蒙特卡罗模拟（即使股票的增长速度 μ 等于无风险利率 r），正如我们所看到的，MCS 产生了很多“轮”股票价格的变化（参见第 8 章和第 9 章），在每一轮中，我们都可以计算出期权的收益 $S_{av}-K$。（Excel）表 16—4 针对一个亚式看涨期权（以标准的格式）给出了结果。在每个变化中期权的收益是

$$i \text{ 轮变化中期权的收益} = \max[S_{av,i} - K, 0] \tag{16.14}$$

其中，我们设定 $K=110$，$r=0.10$，$\sigma=0.40$，$T-t=1$ 年，$S_0=100$，并且每个时间变化间距设为 $\Delta t=0.01$（年）。这个期权的价值是由所有的 m 轮模拟中收益的现值 PV 给出，在表 16—4中的底部给出了结果。（对于每个 MCS 过程，这个价值可能会发生轻微的变化。）

$$C = e^{-rT} \sum_{I=1}^{m} \max[S_{av,i} - K, 0] \tag{16.15}$$

其他奇异期权

交易所进行交易的期货合约都是关于股票指数的，却没有关于个别股票或股票投资组合的（这个投资组合并不与标准普尔 500 等股票指数匹配）。但是在 OTC 市场上，可以买到股票远期（equity forward），这使你能以目前商定的价格在未来得到特定的股票或是特定的股票组合（例如一篮子股票）。通常这类合约要在到期日以现金交割，并且股票远期的交易者是通过买入—卖出价差盈利。交易者也可以运用在交易所交易的一些衍生证券（例如股票指数期货）来对冲他们

的头寸。

表 16—4 **亚式期权定价的蒙特卡罗模拟**

股票价格 S	100	
执行价格 K	110	
利率 r	0.1	
股票价格的漂移 μ	0.15	没有使用，因为在风险中性世界中，股票价格以风险自由汇率 $\mu=r$ 增长。
波动率 σ	0.4	
到期时间 T	1	
时间步长 Δt	0.01	

时间	模拟 1	模拟 2	模拟 3	模拟 4	模拟 5	模拟 6	模拟 7	模拟 8	模拟 9	模拟 10
0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0.01	102.842 3	94.309 67	96.376 2	102.957 4	95.255 02	99.528 29	105.234	107.683 5	106.637 1	99.744 2
0.02	109.126 5	89.833 97	90.978 18	101.458 1	93.556 89	100.171	104.408 6	107.458 2	102.956 4	104.830 4
0.03	107.688 8	90.860 94	94.964 71	103.178 9	90.202 24	94.236 41	101.250 4	101.635 8	104.911	101.139
0.04	111.504 1	94.272 57	96.865 31	103.989 4	96.378 4	94.897 05	102.722 9	101.814 8	104.257 4	97.006 82
0.05	105.512 5	89.001 62	101.635 2	98.867 83	103.042 3	99.475 56	99.606 81	99.772 42	98.144 51	101.494 9
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0.98	103.932	59.365 88	161.895 4	108.062 6	45.007 37	97.264 4	57.226 12	41.801 61	107.873 8	101.798 2
0.99	103.241 2	62.167 3	158.909 3	100.734 4	46.047 16	93.865 06	57.071 12	40.452 32	106.077 6	103.982 4
1	108.295 5	64.037 57	146.478 8	96.661 84	46.788 58	96.892 66	56.625 76	38.946 15	100.273	102.780 1
平均股票价格	97.80	65.77	121.37	104.84	78.62	115.33	84.17	63.40	106.47	109.50
亚式期权的收益	0.00	0.00	11.37	0.00	0.00	5.33	0.00	0.00	0.00	0.00

亚式看涨期权在 T 时刻的收益＝max（S（平均）$-K$，0）。

亚式看涨期权的价格＝exp($-rT$)×“在 T 时刻收益的平均值”。

平均收益是 1.67。

看涨期权价格是 1.51。

实际上可以创造出无限多的奇异期权，它们的到期日、收益等，可以在 OTC 市场根据客户对冲或者投机的需要来定制。很显然，收益结构越“奇异”，一般说来，他们的定价就越困难，同时也就要求更频繁地使用数值技术。下面我们仅仅列出了几种常见的奇异期权。

回望期权（lookback option）给投资者提供了可以在一个“较低”的价格上买入股票（相当于看涨期权的多头）或者是在“较高”的价格上卖出股票（相当于一个看跌期权的多头）的机会。举例来说，在一个**回望看涨期权**（lookback call）中，到期日的执行价格设定为在期权的生命期内标的股票的最低价格 $S_{\min}$（收益是 $S_T-S_{\min}$）。同样，在**回望看跌期权**（lookback put）中，到期日的执行价格设定为在期权的生命期内标的股票所达到的最高价格 $S_{\max}$，（收益就是 $S_{\max}-S_T$）。这些期权也称为**无遗憾期权**（no-regrets option），因为你永远不会为没有提前执行期权而遗憾。一个回望期权可能得到的最坏的结果就是当它在到期日时处于平值状态。还有一种**固定执行价格回望期权**（fixed strike lookback），它的收益对于看涨期权来说是 max($S_{\max}-K$，0)，对于

看跌期权来说是 $\max(K-S_{\min},0)$。

我们在 BOPM 模型中得到了股票价格完整路径（见表 16—3），并且对于每种路径，相关的风险中性概率是 q^*。因此如果已知上述回望期权的收益，将会很容易通过 BOPM 或是 MCS，用类似于对亚式期权定价的方法来对这种路径依赖型期权进行定价。很显然，欧式回望型期权的收益要比普通的欧式期权更加有吸引力，因此前者往往具有较高的价格。

远期开始期权（forward start option）正如它的名字一样，这里设计了一个直到未来某个时期才开始的期权。这种期权的期权金是事先支付的，但是购买者可以设定一个期权开始获得收益的条件，比如说是 5%的实值时或是平值时，等等。因此该收益与那些提供给一些管理者的报酬组合类似，如果公司的表现良好，他们得到的是公司未来收益的一部分。

喊出期权（shout option）允许投资者在 $t>0$ 的时刻锁定最小的收益 S_t-K，但是这些收益只有在到期日才能得到。例如，假设股价上升，因此看涨期权是实值的。持有喊出期权的投资者可能担心接下来股票价格会有所下降，这样他可以“喊出”当前的收益是到期日的最小收益。到期日最终的收益将是 $\max(S_t-K,S_T-K)$。

障碍期权（barrier option）在到期日之前或者是被终止，或者是开始生效。例如，**敲出期权**（knockout option）的合约规定如果当股票价格上升或是下降到一个“障碍水平”上，这份期权合约就要在这天终止，因此就不能再执行。如果期权是由于股票价格下跌到障碍水平而终止的，它们就被称为“**下降敲出期权**”（down-and-out option），然而如果期权是当股票价格上升到障碍水平才终止的，我们就把它们称为是“**上升敲出期权**”（up-and-out option）。

另外一类障碍期权是“**上升敲入期权**”（up-and-in option），这种期权直到股票价格上升到一个较高的障碍价格上时才开始生效，期权金是事先支付的，但是只有达到障碍价格时才能执行期权。类似地，“**下跌敲入期权**”（down-and-in option）直到股票价格下跌至某个设计好的价格时才能生效。下跌敲入期权通常要比普通的看跌期权便宜，因为只有当达到一个更低的价格时才能执行它。它可以用以“保护”一个股票投资组合的最小价值（类似于静态的股票看跌保险）。再者，如果一个管理者的报酬组合中包括公司股票形式的未来收益，那么下降敲入看跌期权可以用来保证他未来收到的价值。

利用 BOPM 和 MCS 对上述的路径依赖型障碍期权的定价在原理上十分简单。这里，考虑表 16—3 中的股票价格的变化，并将它们用于下降敲出期权和下降敲入期权，其中设定障碍价格 $H=90$（见表 16—5）。对于**下降敲出看涨期权**（down-and-out call），我们需要知道所有路径的收益。只要 S 的价格没有跌倒 H 以下，收益就是 $\max(S_T-K)$。如果某个特定路径上的价格下跌至 H 以下，那么期权敲出（在表 16—5 中用“敲”表示），即使在到期日 $S_T>K$，收益也将会是零。第 4 条路径（“duu”）就属于后一类，因为在 $t=1$ 时，$S=80$ 已经下跌到障碍价格 $H=90$ 以下。因此，即使在这条路径上，最终在到期日的价格 $S(3)=105.8>K=100$，由于它已经在此之前被敲出，因此得到的收益是零。一旦我们得到了每条可能出现的路径的收益（见表 16—5 第 9 列），这个下降敲出看涨期权的价格就是这些单独的收益以无风险利率折现后，再以出现的概率（q^*）简单地加权平均。我们得到 C(下降敲出)是 25.56。

注意，对于上面的下降敲出看涨期权和下降敲入看涨期权的期权金之和（即 $25.56+0.46$）等于普通香草型欧式看涨期权的期权金 $C=26.02$（见表 16—3）。这是因为无论何时敲出下降敲出期权，下降敲入期权将会随之敲入，因此如果同时持有这两种期权，就等价于持有一个普通的

欧式看涨期权。这也说明了对于单独的敲出期权的期权金要低于普通的欧式期权的期权金。因此，如果想保证股票投资组合（现在的价格 $S=100$）的价格在 $K=100$，你可以以 $P_{\text{uao}}=0.80$ 的价格买入一个上升敲出期权，其中障碍价格是 $H=110$，而不是以 $P=1.15$ 买入一个普通的看跌期权。当然，如果 S 没有上升到 $H=110$，这份保护性的上升敲出看跌期权就没有起到保护作用，此时就需要重新考虑你的对冲策略。类似地，一个投机者预期出现牛市，并且股票价格的波动很小，那么他就会考虑买入一份下降敲出看涨期权。这要比一份普通的期权便宜，如果股票的价格没有下降到障碍价格以下（这是由低波动性假设所保证的），并且牛市将会保证投机者能够得到一个可观的利润。（当然，这种策略更可能应用于一些成熟的公司股票而不是那些刚刚兴起的例如“dot. com”之类的公司。）注意，对于上面的障碍期权，BOPM 中网格的节点是按照时间进行排列的，障碍价格根据股票价格进行估值（也就是说，如果每一天收盘价是障碍价格 H 的参考点）。表 16—5 中也给出了其他欧式障碍期权的收益和期权价格，但是为了简单起见，我们不再进一步考虑细节。

表 16—5　　　　**对障碍期权定价**

二叉树包括三个节点($n=3$)。

q 是风险中性概率 $q=(R-D)/(U-D)$。

$R=1+r$，其中 r 是对于时间步长 $dt=1$(此处)的分期利率。

在这个表中“敲”意味着期权被“敲入”或是“敲出”。

$S(0)$	100	T=0	T=1	T=2	T=3
K	100				
U	1.15				152.09
D	0.8			132.25	
r	0.1		115.00		105.80
R	1.1	100		92.00	
			80.00		73.60
q	0.857 143			64.00	
$(1-q)$	0.142 857				51.20

							障碍	90	90	85	85	110	110	110	110
路径编号	路径	上升的次数	概率	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$	“下降敲出”和“下降敲入”期权的收益				“上升敲出”和“上升敲入”期权的收益			
								出：看涨	入：看涨	出：看跌	入：看跌	出：看涨	入：看涨	出：看跌	入：看跌
1	uuu	3	0.629 7	100	115.00	132.25	152.09	52.09	敲	0.00	敲	敲	52.09	敲	0.00
2	uud	2	0.105 0	100	115.00	132.25	105.80	5.80	敲	0.00	敲	敲	5.80	敲	0.00
3	udu	2	0.105 0	100	115.00	92.00	105.80	5.80	敲	0.00	敲	敲	5.80	敲	0.00
4	duu	2	0.105 0	100	80.00	92.00	105.80	敲	5.80	敲	0.00	5.80	敲	0.00	敲
5	udd	1	0.017 5	100	115.00	92.00	73.60	0.00	敲	26.40	敲	敲	0.00	敲	26.40
6	dud	1	0.017 5	100	80.00	92.00	73.60	敲	0.00	敲	26.40	0.00	敲	26.40	敲
7	ddu	1	0.017 5	100	80.00	64.00	73.60	敲	0.00	敲	26.40	0.00	敲	26.40	敲
8	ddd	0	0.002 9	100	80.00	64.00	51.20	敲	0.00	敲	48.80	0.00	敲	48.80	敲
							期权价值	25.56	0.46	0.35	0.80	0.46	25.56	0.80	0.35

通过上面的讨论可清楚地看出 MCS 也可以用于障碍期权的定价。我们根据上面的要点可以进行简单的计算。但是如果在蒙特卡罗模拟的某一轮中达到了这个障碍价格，例如说对于一手敲出期权，那么这一轮就可以终止，并且设定它在到期日的收益是零。

重置期权（Reset option）是障碍期权的一种，对于这种期权，当股票价格跌至障碍水平时，持有者可以改变执行价格。因此如果达到了障碍价格，并且产生了一份具有不同执行价格的新的期权，此时以前的期权就是无效的。

另外还存在一些期权的期权，我们称为**复合期权**（compound option）。例如，一个投资者可能想获得能在未来以目前设定的价格（期权金）买入一个期权的权利。这是一个“看涨期权的看涨期权”，它可以用于对未来期权价格的上升进行对冲。同样也有看跌期权的看跌期权、看涨期权的看跌期权和看跌期权的看涨期权。**分期付款期权**（installment option）是复合期权的一种，因为它允许你在期权的生命期内以等额分期付款的方式支付期权金。在每次支付时你都可以决定是否值得进行下一次的期权金支付。

我们也可以构造一种期权，以得到基于两种标的资产中表现较好或是表现较差的那种资产的收益。这种期权称为**最小—最大期权**（min-max option）、**彩虹期权**（rainbow option）或是**可选择期权**（alternative option）。例如，一个看涨期权的收益可能是基于在到期日时两只股票中具有较高价格的那只股票。

16.4 对择式期权定价

有时（虽然并不经常这样）我们可以通过解析的方法对奇异期权定价，因为我们可以用两个具有准确定价公式的简单期权来代替它。**择式期权**（chooser option）或**任选期权**（as you like it option）允许投资者在 t（$<T$）时刻的任何一点上选择期权是看涨还是看跌。一旦在 t 时刻做出这种选择，期权就只能是看涨或是看跌直至到期日 T。如果在 t 到 T 之间股票价格或是有大幅的上升（选择看涨期权）或是有大幅的下跌（选择看跌期权），择式期权将会对投机者非常有用。因此在 $t=0$ 时刻的预期收益类似跨式价差，但是择式期权的期权金更低一些。导致期权金较低的原因是无论是看涨或是看跌（除非到时候 $S_T=K$），跨式价差总会有一个（总的）收益。但是如果是择式期权，当 t 时刻做出选择后，“选择人”就有可能在结束时处于虚值状态（例如，如果你在 t 时刻选择了看涨期权，但是在到期日 $S_T<K$，那么选择人就处于虚值状态）。

对于择式期权的定价得到一个解析的解也是可能的，因为它可以通过一个看涨期权的多头和一个看跌期权的多头复制，因此择式期权的价格就是上面两种合适的期权金的简单相加。

首先我们计算在 t 时刻投资者是选择看涨期权还是看跌期权。投资者将会选择这两者之间价值较高的那个，因此如果我们选择看涨期权时：

$$C(S_t,\ T-t,\ K)>P(S_t,\ T-t,\ K) \tag{16.16}$$

根据看跌—看涨平价（$P+S=C+Ke^{-r(T-t)}$）替换 P，那么公式（16.16）简化成

$$C>C+Ke^{-r(T-t)}-S_t \tag{16.17}$$

因此

$$S_t>Ke^{-r(T-t)} \tag{16.18}$$

因此，如果现行的股票价格超出了执行价格的现值，例如 $S_t>Ke^{-r(T-t)}=K^*$，“选择者”在 t 时刻就会选择看涨期权。给定了在 t 时刻的看涨或是看跌的选择，选择者在 T 时刻的收益（见表 16—6）对于看跌期权就是 $K-S_T$，对于看涨期权是 S_T-K。为了对择式期权进行定价，我们

需要考虑用一些比较简单的期权来构造一个复制的投资组合，这样我们可以对它们进行单独的定价。那么这个择式期权的价格就等于这个复制的投资组合的价格。我们在 $t=0$ 时刻考虑下面复制的投资组合：

（1）一个看涨期权的多头，到期日为 T，执行价格为 K 加上（2）一个看跌期权的多头，到期日为 t，执行价格为 $K^*=Ke^{-r(T-t)}$。

表 16—6　　在 T 时刻择式期权的收益

在 t 时刻的选择：择式期权	在 T 时刻的收益	
	$S_T \leqslant K$	$S_T > K$
看涨：	0	S_T-K
看跌：	$K-S_T$	0

对于这个复制的投资组合，在到期日 T 时刻的收益是零或者 S_T-K（见表 16—7），这与在 t 时刻的情况是相互独立的（由于看涨期权只在 T 时刻获得收益）。

表 16—7　　在 t 时刻和 T 时刻复制的投资组合的收益

期权	在 t 时刻的结果	在 T 时刻的收益	
		$S_T \leqslant K$	$S_T > K$
$C(S_0, T, K)$ （一个看涨期权多头：在 T 时刻到期。）	在 t 时刻如果 $S_t > K^*$ 或是 $S_t \leqslant K^*$，将没有收益（由于到期日是 T）	0	S_T-K
$P(S_0, t, Ke^{-r(T-t)})$ （一个看跌期权多头：在 t 时刻到期，执行价格是 K^*。）	$S_t \leqslant K^*$ $S_t > K^*$	$K-S_T$ 0	$K-S_T$ 0
	在 T 时刻的净结果	$K-S_T$	0

注：$K^*=Ke^{-r(T-t)}$。

对于复制组合中的看跌期权，情况就相对复杂一些，因为它涉及 t 时刻的收益，并且要计算这个收益在 T 时刻的价值。如果在 t 时刻 $S_t > K^*=Ke^{-r(T-t)}$，那么看跌期权处于虚值状态，它在到期日没有价值，因此在 T 时刻的现金流是零。如果在 t 时刻，$S_t < K$，那么就执行这个看跌期权。如果要这样做的话，投资者提供标的股票，他通过在 t 时刻卖空股票得到的现金是 $K^*=Ke^{-r(T-t)}$，这在 T 时刻的累计金额是 K（如果按照无风险利率进行投资，并且不考虑在 T 时刻 S_T 的价值）。然而，他必须归还借入的股票，这可以通过在 T 时刻在现货市场上以成本 S_T 购入股票。因此，在 T 时刻的结果是得到净回报 $K-S_T$（见表 16—7 第 4 行）。从表 16—7 中可以看出这个复制的投资组合在 T 时刻的收益与择式期权的收益（见表 16—6）是相同的。因此择式期权在 $t=0$ 时刻的价格就等于这个复制的投资组合的成本，即

$$\text{期权的价格}=C(S_0,T,K)+P(S_0,t,Ke^{-r(T-t)}) \tag{16.19}$$

上面这些期权都是“常规的期权”，它们的价格都可以通过相关的 Black－Scholes 公式给出。

16.5 本章摘要

我们可以利用一些简单的结构，尤其是期权合约，构造出非常多的衍生证券合约。我们只能简要研究其中几种，包括：

- 期权合约可以用于**公司财务**中，它为公司的股权和债券的定价提供了一种方法。股权持有者的收益类似于看涨期权，股权持有者得到的收益是公司资产的价值超过债权人应得金额的剩余价值，如果公司资产的价值小于债权人应得的价值，那么股权持有者得到的收益只能是零。因此**股权的价值**就等于**关于公司资产的欧式看涨期权**的价值，这份期权的执行价格等于债券（债务）的面值。
- 另一方面，债券持有者可以持有公司资产的看跌期权，这使公司的股权持有者在公司的价值跌至债券的面值以下时，必须将公司的资产“卖给”债券持有者。因此，**债务的价值**就等于债券的面值减去债券持有者所持有的关于公司资产的看跌期权的价值（期权的执行价格等于债券的面值）。
- **认股权证**（warrant）是一个关于公司股票的长期期权，它最初的生命期一般都是 2 年到 12 年（甚至更长）。数量调整期权是认股权证的一种，它的收益取决于外国股票指数的回报，但是收益是通过本国货币进行的（按照 $t=0$ 时刻的汇率）。因此它们为那些投资于外国股票投资组合的管理者提供了一种成本很低的方法以避免外汇风险。
- **上下限股票组合**，类似于利率上下限组合，为一个股票投资组合的价值设定了最高和最低的价值水平。如果上下限组合没有事先支付的成本（即 $P=C$），我们就称之为**风险逆转**。
- **股权互换**可以用于在一种资产收入和基于一个股票指数得到的收入之间的互换。股权互换的使用可以使投资管理者有效地调整他的投资组合的结构，例如，这可以通过减少美国利率的头寸暴露，同时增加国内或国外股票指数的头寸暴露来实现。
- **奇异期权**，一般来说它的收益要比普通期权的收益复杂得多。奇异期权基本上是 OTC 工具，他们的收益可以通过对到期日、执行价格或是不同的收益类型进行定制来满足每个客户的需要。
- 奇异期权的例子包括以下几种。**亚式期权**的收益取决于在期权生命期内的平均价格。**障碍期权**或者是在到期前终止，或者是在到期前生效，这取决于它们的标的资产是否达到设定的障碍价格。**复合期权**是期权的期权（比如看涨期权的看涨期权）。**择式期权**允许投资者在某一个特定的时点选择这份期权是看涨的还是看跌的。**回望期权**为投资者提供了能在期权的生命期内以最低的价格买入股票（看涨期权）或是以最高的价格卖出股票（看跌期权）的机会。
- 很多奇异期权是**路径依赖型**的，在这种情况下期权的收益取决于标的资产的整个路径，而不仅仅取决于在到期日标的资产的价值。由于上述原因，它们通常无法通过（封闭形式的）解析解进行定价（比如利用 Black - Scholes 公式），而是要通过数值方法进行定价，比如说利用二叉树、蒙特卡罗模拟或是利用数值方法解出的适当的 PDE。

章末练习

1. 投资管理者如何应用基差互换进行投机?

2. 什么样的投资者会利用亚式期权对冲外汇?

3. 为什么我们不能通过一个封闭形式（解析）的解来对亚式期权定价，比如说利用一般的 Black - Scholes 公式。

4. 利用两期的二项式模型来计算一个关于股票的平均价格亚式期权的价格。其中 $S_0=100$，股票价格每期都可能上升 15%或是下降 10%。每期的无风险利率都是 5%，并且 $K=95$。计算在决定平均价格时的现行价格（建议在 Excel 中或是其他计算软件中再计算这个题目来检查一下答案）。

5. 已经要求过利用蒙特卡罗模拟 MCS 来计算亚式平均率看涨期权的价格。给出下面的信息：现在的股票价格 $S_0=100$，股票价格的浮动率是每年 $\mu=5$，无风险利率是 0.05（连续复利），股票回报率的波动是每年 $\sigma=20\%$。$K=105$，并且距到期日的时间是 $T=1$ 年。假设在蒙特卡罗模拟中每段时间的步长是 $\Delta t=0.01$ 年（大约 3.5 天），那么列出你将要进行的步骤（也可以在 Excel 或是其他比较方便的计算软件中计算这个题目来检查一下答案）。

6. 现在是 2001 年的 1 月 1 日，购买了一份名义本金为 100 万美元的 2 年期股权互换。其中支出 LIBOR，收到标准普尔 500 指数的百分比回报率每年减去 0.5%，每 6 个月进行一次支付。假设到期时的 LIBOR 是 6%，(7 月 1 日，18 天后)，5%(1 月 1 日+184 天)，和 5.5%(2002 年 7 月 1 日+181 天)，标准普尔 500 指数在 181 天后是 1 550(+3.3%)，再经过的 184 天后是 1 589(+2.5%)，再经过 181 天后是 1 645(+3.5%)。在决定收益时假设一年是 360 天。那么互换的支付是多少?

7. 投资者在什么时候要买一个(a)下降敲出看涨期权(b)上升敲出看跌期权?

第17章

资产价格动力学

学习目标

- 介绍如何把标准**维纳过程**（Wiener process）作为更复杂的随机过程（如几何布朗运动）的基本构造单元使用。
- 介绍**伊藤引理**（Ito's lemma）如何提供了随机过程的另一种呈现形式。例如，从关于 S 的随机微分方程（SDE）到依赖于 S 和 t 的衍生证券 $f(S, t)$ 价格的随机微分方程。
- 演示如何通过复制组合来消除随机因素，从而获得关于期权价格的完全**确定性的偏微分方程 PDE**（即 Black - Scholes PDE）。如果 PDE 有显式解，那么我们可以得到期权价格的一个封闭形式的公式（即通常的 Black - Scholes 公式）。
- 演示期权定价中的**无套利方法**（no arbitrage approach）。在这里，期权的价格可以被看做是未来收益的现值，期权标的股票的价格被假设为以无风险利率增长。这被称为**风险中性定价 RNV**（risk neutral valuation）方法。

- 介绍一些连续时间金融中的高级概念，比如，**风险的市场价格**(market price of risk)、**等价鞅测度**(equivalent martingale)和**远期风险中性定价**(forward risk neutral valuation)。
- 介绍离散时间和连续时间随机过程的联系。
- 分析如何在 RNV 下使用**数值技术**（numerical technique）对期权定价（比如，BOPM、蒙特卡罗模拟和有限差分方法）。在对美式期权和所谓的奇异期权（或路径相关的期权）进行定价时，这种方法非常有用。

在对衍生证券进行定价和建立对冲组合的过程中，大量分析使用了连续时间随机过程。任何以不确定的方式随时间变化的变量（比如股票价格）被称为是随机的。在现实世界中，我们观察到股票价格的离散变化，但是如果观测时间间隔足够小，这就近似为一个连续过程。Black - Scholes 期权定价公式本身就是通过连续时间数学解决的。这一数学分支被称为随机积分，本章中，我们使用这些概念来概括性地分析衍生证券的行为。我们所用的数学不比简单的积分难多少，分析中每个直观的概念都会被加以强调。我们的目的是让读者对这种方法有一种感觉，而不是对分析中的每一步给出详细的证明。我们的分析按下面的步骤进行。

在第一部分中，我们使用连续时间数学推导出股票价格 S 和期权价格 $f(S, t)$ 的随机过程。然后，我们把 S 和 $f(S, t)$ 的随机微分方程（SDE）组合起来，得出关于 $f(S, t)$ 的完全确定性的偏微分方程(PDE)，这被称为“Black - Scholes PDE”。有几种方法可以求出这个偏微分方程的显式解，从而得出期权的价格，这就是著名的看涨期权（或看跌期权）价格 $C=C(S, K, \sigma, r, T)$ 的 Black-Scholes-Merton 封闭形式解。

下一步，我们用第 8 章的 BOPM 来讲解 RNV 的概念。我们证明这一模型中，隐含地假设了股票价格以无风险利率 r 增长。因此，一个关键的结论是，在定价期权时，我们可以假设这个世界是风险中性的。然而，最终得出的 C 的表达式在真实世界里也是正确的。例如，通过 RNV，我们发现收益为 C_u 和 C_d 的单期看涨期权的价格是

$$C=\frac{qC_u+(1-q)C_d}{R} \tag{17.1}$$

其中，$R=(1+r)$，$r=$无风险利率。因此，一般情况下，我们可以用下式对看涨期权定价：

$$C=\frac{1}{R^T}E^*[C(T)] \tag{17.2}$$

其中，$C(T)$为期权在到期日的收益，E^* 为假设的风险中性世界里的期望值。这是说明 RNV 方法的更一般方式。比如，对于 n 期的 BOPM，我们有

$$E^*[C(T)]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\max[SU^kD^{n-k}-K,0]$$

因此，正如我们将要看到的一样，我们可以从 RNV 的角度来看待 BOPM。在本章第 4 节中，我们将会学习如何把蒙特卡罗模拟方法(MCS)和公式(17.2)结合起来，给出期权定价的数值方法。

然后，我们回到期权价格的连续时间 PDE 方法。虽然它可以对一些期权给出显式解（如

Black - Scholes 中的欧式期权），但是对于其他期权（如美式期权），它不能给出封闭形式的解。因此，我们学习如何通过数值方法解出这个 PDE，从而得出期权的价格。

贯穿本章的是 RNV 方法，它给出了决定期权价格的一个统一思想，RNV 可以给出期权价格的 PDE，最理想的情况是得出这个 PDE 的封闭解，但是在封闭解无法得出时，我们可以使用数值技术来解出合适的 PDE，或是使用其他的数值方法（如 BOPM 或 MCS）解出期权的价格。

在最后一节中，我们提出一些在连续时间金融里相当高级的概念，比如风险的市场价格、等价鞅测度和远期风险中性定价。

虽然本章的内容具有相当的难度，但是它把期权定价中使用的大部分方法都综合在一起，这些方法可以用来对非常复杂（奇异）的期权进行定价。学习本章后，读者应该对连续时间方法有一个非常好的把握，并可以接下来学习本领域中更高级的材料（如 Hull，2000；Wilmott，2000；Briys 等，1998）。

17.1 随机过程

本节中，我们建立连续时间的股票价格模型。然后我们学习如何应用伊藤引理推导出衍生证券的随机过程。

维纳过程/布朗运动

在描述股票价格等资产的随机行为时，维纳过程是最基本的结构。如果一个随机变量 z 在一个很短的时间 Δt 内服从维纳过程，那么

$$\Delta z=\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{17.3}$$

其中，$\Delta z=z_{t+\Delta t}-z_t$，$\varepsilon\sim niid(0,1)$，$z$ 在一小段时间 Δt 内的变化依赖于标准正态随机变量 ε（均值为 0，方差为 1）。ε 的序列在统计上是独立的。我们把 ε 的属性表示为 $niid(0,1)$ 或者 $N(0,1)$。从公式(17.3)可以得到：

期望值 $E(\Delta z)=0$ (17.4a)

方差 $\mathrm{Var}(\Delta z)=E(\Delta z)^2=\Delta t$ (17.4b)

标准差 $\mathrm{Std}(\Delta z)=\sqrt{\Delta t}$ (17.4c)

其中，“E” 表示期望值。现在考虑把从 0 到 T 这段相对较长时间上的 z 的增长，即 $z(T)-z(0)$，表示成 Δz_T。我们把时期 $\{0, T\}$ 分成 N 个小的时间间隔 Δt，其中

$$N=\frac{T}{\Delta t} \tag{17.5}$$

因此

$$\Delta z_T=z_T-z_0=\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i \tag{17.6}$$

ε_i 是独立的 $N(0,1)$，因此：

期望值	$E(\Delta z_T)=0$	(17.7a)
方差	$\mathrm{Var}(\Delta z_T)=N\Delta t=T$	(17.7b)
标准差	$\mathrm{Std}(\Delta z_T)=\sqrt{T}$	(17.7c)

Δz_T 的方差只依赖于时间差距 T。如果我们有两个不重叠的时间段 $\{t_1, t_2\}$ 和 $\{t_3, t_4\}$，那么因为 ε_i 是独立的，所以 z_2-z_1 和 z_4-z_3 不相关。标准的维纳过程是公式（17.3）在 $\Delta t\to 0$ 时的极限，我们可以把它写成

$$\mathrm{d}z=\varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t} \tag{17.8}$$

其中，$\mathrm{d}z$ 和 $\mathrm{d}t$ 是普通微积分中所用的概念。维纳过程经常被称做布朗运动，具有如下性质：

维纳过程/布朗运动

- 对于任意 $s<t$，$z(t)-z(s)\sim N(0, t-s)$。
- 对于 $0<t_1<t_2<t_3<t_4$，(z_2-z_1)和(z_4-z_3)不相关。
- $z_0=1$ 的概率为 1。

一般维纳过程

使用维纳过程公式（17.8）来描述股票价格有一个问题，从公式（17.8）得出平均变化 $E(\Delta z_T)$为零，但是我们知道，股票价格长期内会增长。基本的维纳过程具有零漂移。一个更好的描述股票价格的模型是**一般维纳过程**（**d*x***）：

$$\mathrm{d}x=a\mathrm{d}t+b\mathrm{d}z \tag{17.9}$$

其中，“a” 和 “b” 是常量。如果我们忽略随机项 $\mathrm{d}z$，那么

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a \tag{17.10}$$

积分得到（相当于在离散时间情况下的相加）

$$x_t=x_0+at \tag{17.11}$$

因此，每个时期上，x_t 以速率 “a” 增长（即 $\Delta x_t=a$）。一般维纳过程的离散时间形式是

$$\Delta x=a\Delta t+b\Delta z=a\Delta t+b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{17.12}$$

因此，每个时期

$$E(\Delta x)=a\Delta t \tag{17.13a}$$

和

$$\mathrm{Var}(\Delta x)=b^2\Delta t \tag{17.13b}$$

因此，每个时期的漂移率是 a，方差率是 b^2。在长期$\{0,T\}$上，我们有

$$E(\Delta x_T)=aT \tag{17.14a}$$

和

$$\mathrm{Var}(\Delta x_T)=b^2 t \tag{17.14b}$$

伊藤过程

公式（17.9）的更一般形式是允许“a”和“b”都依赖于 x 的大小，并与时间有关，这就得到被称为**伊藤过程**（Ito process）的随机微分方程 SDE：

$$\mathrm{d}x=a(x,t)\mathrm{d}t+b(x,t)\mathrm{d}z \tag{17.15}$$

这里，预期漂移率 $a(x,t)$和方差率 $b(x,t)$都可以随时间和 x 的大小而变化。

股票价格的随机过程

有的读者可能认为公式（17.12）是对股票价格很合理的描述，因为它有一个向上的漂移($a>0$)加上一个随机因素($b\mathrm{d}z$ 项)，它每个时期预期的绝对变化 $\mathrm{d}x$ 是常量($=a$)。但是，我们通常假设预期的比例变化 $\mathrm{d}x/x$，即股票的“收益”是一个常量，这就得到所谓的股票价格 S 的**几何布朗运动 BGM**（它是伊藤过程的特殊形式）：

$$\frac{\Delta S}{S}=\mu\Delta t+\sigma\mathrm{d}z \tag{17.16a}$$

其中，$\mathrm{d}z=\varepsilon\sqrt{\Delta t}$。在连续时间情况下（即当 $\Delta t\to 0$ 时，“Δ”成为“d”）：

$$\frac{\mathrm{d}S}{S}=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{17.16b}$$

其中，$\mathrm{d}z=\varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t}$。显然，由公式（17.15）和公式（17.16b）有：

GBM 是一种特殊的伊藤过程，其中 $a=\mu S$，$b=\sigma S$。

股票价格比例变化的漂移率是 $\mu\mathrm{d}t$，波动率是 $\sigma^2\mathrm{d}t$。因此，S 的绝对变化的漂移率是 $\mu S\mathrm{d}t$，波动率是 $\sigma^2 S^2\mathrm{d}t$。很显然，从公式(17.16b)得到：$\mathrm{d}S/S$ 服从正态分布，均值为 $\mu\mathrm{d}t$，方差为 $\sigma^2\mathrm{d}t$。

$$\frac{\mathrm{d}S}{S}\sim N(\mu\mathrm{d}t,\sigma^2\mathrm{d}t) \tag{17.17}$$

现在我们有比例变化 $\mathrm{d}S/S$ 的统计分布，但是我们也希望知道 S 绝对大小的分布，因为我们要根据 S 而不是 $\mathrm{d}S/S$ 来确定期权的收益和期权的价格，后者才是我们最终想计算出来的结果。从 $\mathrm{d}S/S$ 到 S，需要两个关键步骤：

(1) 使用随机积分，把公式(17.16b)中 $\mathrm{d}S/S$ 的 GBM 变成 $\mathrm{d}(\ln)S$ 的 GBM，并解出 $\ln(S_T)$。这需要使用伊藤引理。

(2) 使用统计分布的理论，从 $\ln(S_T)$的分布求出 S_T 的分布。

伊藤引理

让我们逐步得出完整的伊藤引理。假设我们有某个函数 $G(z)=z^2$，其中 z 是一个维纳过程。根据通常的积分理论，我们会认为 $dG=2z(dz)$，但这并不是正确的结果，因为 z 是随机的。我们需要用随机积分来处理这个问题。下面我们用“取巧”的方式分两步来得到正确的答案。首先，使用泰勒展开，我们可以得到对 $G(z)$的精确到 dz 的 2 阶项的近似：

$$dG=\frac{\partial G}{\partial z}dz+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}dz^2 \tag{17.18}$$

第二，注意到 $\mathrm{Var}(dz^2)=E(dz^2)=dt$，我们可以把 dz^2 替换成 dt。这一步其实并不成立，因为 $dz^2\neq dt$，只是两者的期望值相等，$E(dz^2)=dt$，显然这是不同的事情。但是，通过使用以上两个“小花招”，我们却得到当“z”是随机项时，关于 $dG(z)$的正确的伊藤公式：

$$dG=\frac{\partial G}{\partial z}dz+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}dt \tag{17.19}$$

公式(17.19)确实是关于 $G(z)$的伊藤公式，它是正确而且精确的式子(即它并非是一个近似)。在这里，两个错误确实造成了一个正确的结果(更严格一些的证明请看附录 17.1)。现在让我们把随机过程一般化，令股票价格服从伊藤过程：

$$dS=a(S,t)dt+b(S,t)dz \tag{17.20}$$

其中，“a”和“b”都是 S 和 t 的函数。现在假设有一个衍生品，它的价格是 $f(S,t)$，是随机变量 S 的函数。那么，应用伊藤引理，我们可以得到 $f(S,t)$的随机微分方程：

$$df=\frac{\partial f}{\partial t}dt+\left[\frac{\partial f}{\partial S}dS+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt\right] \tag{17.21}$$

第一项来自于 $f(S,t)$的关于“t”的一阶泰勒展开，方括号中的项就是我们刚刚推导出的结果，惟一不同的是多出一个 b^2，它反映了 dz 在公式(17.20)中是以 $b(dz)$形式出现的事实。我们可以把公式(17.20)中的 dS 代入公式(17.21)，得到用维纳过程 dz 来表示的 df：

$$df=\left[\frac{\partial f}{\partial t}+a\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]dt+\left\{\frac{\partial f}{\partial S}b\right\}dz \tag{17.22}$$

因此：

> 如果 S 服从伊藤过程，那么伊藤引理可以用来导出任意函数 $f(S,t)$的随机微分方程(SDE)。

函数 $f(S,t)$的漂移率是方括号中的表达式，它的波动率是花括号中的表达式。伊藤引理是极为有用的，关键之处是要注意到公式(17.20)中的 S 和公式(17.22)中的 $f(S,t)$都依赖于同样的底层不确定因素 dz。

因此，如果 S 是股票价格，$f(S,t)$是股票期权的价格，那么因为两者具有同样的不确定源 dz，

那么我们可以用它们构造出没有任何不确定性的资产组合。这个组合的收益必然与无风险利率相同。在第 8 章中，我们用同样的方法在二叉树模型中对看涨期权定价，我们在连续时间的框架下，也可以使用同样的方法（见下文）。

伊藤：两个随机变量

如果期权的收益依赖于两个随机变量 S_1 和 S_2，情况会怎样呢？比如，一个期权的收益取决于在到期日两只股票中价格较高的那一个，或是在到期日两个汇率中较高的一个。如果 S_1 和 S_2 都服从伊藤过程，那么：

$$\mathrm{d}S_1=a_1(S_1,S_2,t)\mathrm{d}t+b_2(S_1,S_2,t)\mathrm{d}z_1 \tag{17.23a}$$

$$\mathrm{d}S_2=a_2(S_1,S_2,t)\mathrm{d}t+b_2(S_1,S_2,t)\mathrm{d}z_2 \tag{17.23b}$$

这两个维纳过程 $\mathrm{d}z_i$ 的方差是 $\mathrm{d}t$，相关系数是 $-1\leqslant\rho\leqslant1$。假设一个衍生品的收益依赖于两个标的变量。把我们前面用过的“取巧”办法略微变形，伊藤引理可以给出衍生品价格 $f(S_1, S_2, t)$ 的随机微分方程如下：

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t+\left(\frac{\partial f}{\partial S_1}\mathrm{d}S_1+\frac{\partial f}{\partial S_2}\mathrm{d}S_2\right)+\frac{1}{2}\left(b_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2}+b_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_2^2}\right)\mathrm{d}t+\rho b_1 b_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_1\partial S_2}\right)\mathrm{d}t \tag{17.24}$$

实际上，“新”的一项说明了两个标的股票之间的相关性。我们也可以把上面公式中的 $\mathrm{d}S_1$ 和 $\mathrm{d}S_2$ 替换掉，这样就得到 $\mathrm{d}f$ 作为维纳过程 $\mathrm{d}z_1$ 和 $\mathrm{d}z_2$ 的直接函数。为了对冲或“消除”SDE 中的两个随机项，我们需要使用两种标的资产进行 delta 对冲。于是我们得到确定性的 PDE，可以计算出衍生品价格的解析解或数值解。

从 $\mathrm{d}S/S$ 到 $\ln(S)$

现在，让我们先把期权定价放一下。假设 $\mathrm{d}S/S$ 服从 GBM，我们使用伊藤引理推导出 $f(S)=\ln(S)$ 的随机行为。在通常的积分下，$\mathrm{d}\ln(S)$ 等于 $\mathrm{d}S/S$，那么由公式（17.17），$\mathrm{d}\ln(S)$ 的期望值应该等于 $\mu\mathrm{d}t$。然而，从 $\mathrm{d}S/S$ 到 $\mathrm{d}\ln(S)$ 需要随机积分，情况就不同了，结果会多出一项 $\sigma^2/2$。实际上，我们发现 $E[\mathrm{d}(\ln S)=v\mathrm{d}t]$，其中 $v=\mu-\sigma^2/2$。我们从 $\mathrm{d}S/S$ 的 GBM 开始对此证明：

$$\mathrm{d}S=(\mu S)\mathrm{d}t+(\sigma S)\mathrm{d}z \tag{17.25}$$

其中，$a=\mu S$，$b=\sigma S$。因为 $f(S)=\ln(S)$，那么

$$\frac{\partial f}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial S}=\frac{1}{S},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=-\frac{1}{S^2}$$

把上面各式代入伊藤 SDE，即公式（17.22）中：

$$\mathrm{d}\ln(S)=(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z=v\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{17.26}$$

其中，$v=\mu-(1/2)\sigma^2$。这样，通过伊藤引理，我们发现 $\mathrm{d}\ln(S)$ 的漂移率不是 $\mu\mathrm{d}t$，而是 $(\mu-\sigma^2/2)\mathrm{d}t$。然而，$\mathrm{d}S/S$ 和 $\mathrm{d}(\ln S)$ 具有同样的波动率 $\sigma^2\mathrm{d}t$。因为 $\mathrm{d}z=\varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t}$ 服从 $N(0,\mathrm{d}t)$，那么从公式（17.26）可以得到，在时间 $\mathrm{d}t$ 和 $\{0,T\}$ 上，$\mathrm{d}(\ln S)$ 的分布也是正态分布：

$$\mathrm{d}\ln(S)\sim N[v\mathrm{d}t,\sigma^2\mathrm{d}t]=N[(\mu-\sigma^2/2)\mathrm{d}t,\ \sigma^2\mathrm{d}t] \qquad (17.27\text{a})$$

$$\ln(S_T)\sim N[\ln(S_0)+vT,\sigma^2T]=N[\ln(S_0)+(\mu-\sigma^2/2)T,\sigma^2T] \qquad (17.27\text{b})$$

表 17—1 中给出了使用伊藤引理的另一个例子，如果 $\mathrm{d}S/S$ 服从漂移率为 μ 的 GBM，那么期货价格服从漂移率为 $\mu-r$ 的 GBM，其中 r 是无风险利率。这个例子说明了伊藤引理应用于任何衍生证券的一般性（严格地说，服从于伊藤过程的随机变量的任何函数）。

表 17—1　　**利用伊藤引理得到期货价格的 PDE**

数据： 标的于（不支付红利）股票的到期时间为 $T-t$ 的期货价格为 $F=S\mathrm{e}^{r(T-t)}$。
股票的价格服从 GBM：$\mathrm{d}S=(\mu S)\mathrm{d}t+(\sigma S)\mathrm{d}z$。

问题： 使用伊藤引理，证明 $\mathrm{d}F/F$ 也服从漂移率为 $\mu-r$，波动率为 σ 的 GBM。

答案： $F=f(S,t)=S\mathrm{e}^{r(T-t)}$

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\mathrm{e}^{r(T-t)}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=0\quad \frac{\partial f}{\partial t}=-rS\mathrm{e}^{r(T-t)}$$

替换正文中的公式（17.22）：$\mathrm{d}F=[\mathrm{e}^{r(T-t)}(\mu S)-rS\mathrm{e}^{r(T-t)}]\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{r(T-t)}(\sigma S)\mathrm{d}z$
替换 $F=S\mathrm{e}^{r(T-t)}$：$\mathrm{d}F=(\mu-r)F\mathrm{d}t+\sigma F\mathrm{d}z$
因此，$\mathrm{d}F/F$ 就是漂移率为 $\mu-r$，波动率为 σ 的 GBM。

对数正态分布

现在，我们希望通过公式(17.27)中 $\ln(S_T)$的分布得到 S_T 的绝对值的分布。这与伊藤引理本身没有任何关系，它只是相关的统计分布理论的直接应用。假设一个随机变量 u 的对数具有均值为 v，方差为 σ^2 的正态分布：

$$\omega=\ln(u)\sim N(v,\sigma^2) \qquad (17.28)$$

那么随机变量“u”被称为具有对数正态分布。u 的分布是什么样的呢？因为 $u=\mathrm{e}^{\omega}$，我们或许会认为 $Eu=\mathrm{e}^{v}$，但是这并不正确。由统计分布理论，我们可以得到

$$Eu=\mathrm{e}^{v+\sigma^2/2}\quad \text{和}\quad \mathrm{Var}\ (u)\ =\sigma^2 \qquad (17.29\text{a})$$

因此，如果

$$\ln(u)\sim N(v,\sigma^2)\qquad \text{那么}\qquad u\sim N[(v+\sigma^2/2),\sigma^2] \qquad (17.29\text{b})$$

u 的均值比 $\ln(u)$的均值大 $\sigma^2/2$，这是因为当 σ 增加时，u 将会更加分散，因为它不能小于零，所以它的均值会增加。对于波动率小的股票，$\sigma^2/2$ 项的贡献相对较小。例如，对于 $E(\ln(u))=v=0.12$，$\sigma=0.15$，那么 $\mathrm{e}^{v}=\mathrm{e}^{0.12}=1.1275$，而 $\mathrm{e}^{v+\sigma^2/2}=\mathrm{e}^{0.1315}=1.1402$。因此，计算得到的均值从每年 12.75%变为 14.02%(对于更短的时间，差异会更小)。让我们把对数正态分布理论应用于 $\mathrm{d}\ln(S)$。由公式(17.27b)我们得到

$$E[\ln(S_T/S_0)]=vT \qquad (17.30\text{a})$$

和

$$\mathrm{Var}[\ln(S_T/S_0)]=\sigma^2 T \tag{17.30b}$$

其中，$v=\mu-(1/2)\sigma^2$，因此使用公式(17.29b)

$$E(S_T/S_0)=\mathrm{e}^{(v+\sigma^2/2)T}=\mathrm{e}^{\mu T} \tag{17.31a}$$

或

$$E(S_T)=S_0\mathrm{e}^{\mu T} \tag{17.31b}$$

应用统计理论，我们可以求出股票价格 S_T 的方差，它的形式有些复杂：

$$\mathrm{Var}(S_T)=S_0^2\mathrm{e}^{2\mu T}(\mathrm{e}^{\sigma^2 T}-1) \tag{17.31c}$$

现在我们得到了 S_T 的分布。我们把所得到的结果总结起来，列于表 17—2 中。

表 17—2　　从 dS/S 的 GBM 到 S 的性质

- 假设 $\mathrm{d}S/S$ 服从漂移率为 μ、波动率为 σ^2 的 GBM：

  $$\frac{\mathrm{d}S}{S}=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z$$

- 使用伊藤引理，得到 $\mathrm{d}(\ln S)$ 的随机过程：

  $\mathrm{d}(\ln S)=v\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z$　其中，$v=\mu-\sigma^2/2$

  因为 dz 是 $N(0,1)$，那么 $\ln(S)$ 的分布是正态的（S 是对数正态）：

  $\ln(S_T/S_0)\sim N(vT,\ \sigma^2 T)$

- 统计分布理论表明，S_T 的水平具有的平均值和方差为：

  $ES_T=S_0\mathrm{e}^{\mu T}$

  $\mathrm{Var}(S_T)=S_0^2\mathrm{e}^{2\mu T}(\mathrm{e}^{\sigma^2 T}-1)$

17.2 风险中性定价、伊藤引理和 Black - Scholes 偏微分方程

本节中，我们的主要目的是把衍生品价格的伊藤 SDE 与包含股票和债券的合成（复制）组合结合起来，以消除 dz 代表的不确定性。我们会得出确定性的衍生品价格的动态偏微分方程 PDE。这就是 Black - Scholes 偏微分方程，它使衍生品价格的变化成为标的股票价格和时间的函数。在一些情况下（如不支付红利的欧式期权），通过这个 PDE 可以得到期权价格的封闭解（即著名的看涨期权或看跌期权价格的 Black - Scholes 公式）。本节的分析用到很多数学知识，我们首先用简单的单步 BOPM 来阐明一些要点。

BOPM 和风险中性定价

我们使用“无套利方法”得到看涨期权的价格，并根据“风险中性定价（RNV）”的思想来解释这一结果，从而证明这两种方法是等价的。我们在第 8 章中学习过，可以使用包含 N 股股票和 B 美元债券的一个组合来复制一个看涨期权的收益：

当 $t=0$ 时，复制组合的成本 $=(NS+B)$ 美元　(17.32)

为了保证在 $t=1$ 时，复制组合与看涨期权具有相同的收益，我们需要

$$N=\frac{C_u-C_d}{S_u-S_d}\quad 和 \quad B=\frac{C_u-(NS_u)}{R} \tag{17.33}$$

如果“股票＋债券”复制组合在 $t=1$ 时的收益与真实的看涨期权相同，那么看涨期权的价格 C（在 $t=0$ 时）必然与复制组合的成本相同。这是“无套利”方法。因此，使用公式(17.32)和公式(17.33)：

$$C=(NS+B)=\frac{1}{R}[qC_u+(1-q)C_d] \tag{17.34}$$

其中，$q=(R-D)/(U-D)$，$R=(1+r)$ 为单期无风险利率。如果我们使用连续计利的年利率 r_c，那么，$R=e^{r_c\Delta t}$，其中，$\Delta t=T/n$，因此

$$q=\frac{e^{r_c\Delta T}-D}{U-D} \tag{17.35}$$

现在我们使用一些简单的小技巧，来说明看涨期权的 BOPM 公式如何体现了 RNV 思想。让我们把 q 解释为向上移动的概率。那么期望的股票价格是

$$E^*(S_1)=qSU+(1-q)SD=qS(U-D)+SD \tag{17.36}$$

其中，E^* 表示把 q 作为向上移动概率时的期望值。把公式（17.35）中的 q 代入上式，得到

$$E^*(S_1)=S\,e^{r_c\Delta t} \tag{17.37}$$

因此，把 q 解释为向上移动的概率，等价于假设股票价格以无风险利率增长。把“q”解释为概率，就意味着在期权定价公式（17.34）中，我们假设股票价格的运动如同在风险中性的世界中一样。期权的价格是未来收益 C_u 和 C_d 的期望值（以无风险利率贴现）。但是最关键之处是，在计算期望值时，我们假设了一个风险中性世界，其中 S 的增长率等于 r。这就是为什么 q 被称为**风险中性概率**的原因，定价的原理被称为**风险中性定价**。注意 q 并不是股票在真实世界里向上移动的实际概率（$=\pi$）。实际上，看涨期权的价格独立于 π，但是它依赖于 q。因此，当使用 BOPM 定价期权时，把 q 作为向上移动的概率，我们隐含地假设股票价格以速度 r 增长。因此在从真实世界到风险中性世界的过程中，股票的期望收益发生了变化（它从真实世界中的期望收益 v 变为风险中性收益 r），但是它的波动率保持不变。这个一般性的结果被称为 **Girsanov 定理**，从真实风险的世界（π 和 v）到风险中性世界（q 和 r）被称为**测度变换**。

在第 8 章中，我们使用了单期的 BOPM，期初的股票价格 $S=100$，$K=100$，$r=0.05$（每期）。股票价格的两个可能结果是 $S_u=110$，$S_d=90$，看涨期权是 $C_u=10$，$S_d=0$。使用“无套利”方法(可参见公式(8.6)和公式(8.11))，我们发现 $q=(R-D)/(U-D)=0.75$，$C=7.143$。现在，我们重新把 q 解释为风险中性概率。如果 q 是真正的风险中性概率，股票的期望收益率必然等于无风险利率，因此 q 必然满足

$$E^*(S_1)=110q+90(1-q)=100(1.05) \tag{17.38}$$

其中，E^* 是风险中性世界里的期望运算符。从公式(17.38)，我们能推导出 $q=0.75$，从我们的“无套利”方法中，我们知道这是正确的。类似地，在风险中性世界里，看涨期权有 $q=0.75$ 的概率价值 $C_u=10$，有 $1-q=0.25$ 的概率价值 $C_d=0$。因此，它的期望值在 $t=1$ 时：

$$E^*(C_1)=0.75(10)+0.25(0)=7.5 \tag{17.39}$$

以无风险利率折现到 $t=0$ 时：

$$C=(1/R)E(C_1)=(1.05)^{-1}7.5=7.143 \tag{17.40}$$

因此，对于 C，我们使用风险中性定价和“无套利”方法得到相同的值，从而建立了两种方法的等价性。我们的主要结论是：

> **当对期权定价时，可以把“q”作为向上移动的概率，它等价于股票价格以无风险利率 r 增长。然而，所得到的期权价格在真实世界里也是成立的。这就是风险中性定价的原理。**

与以上的风险中性分析类似，我们可以知道在 $T-1$ 时看涨期权的价格是

$$C(T-1)=\frac{1}{R}E^*[C(T)] \tag{17.41}$$

其中，E^* 是使用风险中性概率 q 得到的期望值。如我们以前见过的一样，公式（17.41）是递推的。因此两个时期的问题是

$$C=\frac{1}{R}[qC_u+(1-q)C_d] \tag{17.42}$$

其中

$$C_u=\frac{1}{R}[qC_{uu}+(1-q)C_{ud}] \qquad C_d=\frac{1}{R}[qC_{ud}+(1-q)C_{dd}]$$

> **风险中性定价**
>
> **步骤 1：** 假设标的资产（如股票）的期望收益率等于无风险利率。（例如，对于 BOPM 要涉及把 q 当做向上移动的概率，它与 S 以无风险利率增长等价）。
>
> **步骤 2：** 计算衍生品在到期日的期望收益。
>
> **步骤 3：** 把期望收益用无风险利率折现，得到衍生品的价格。

利用 RNV 得到远期合约的价值

我们再给出一个使用风险中性定价的例子：计算远期合约的价值 V。我们在第 2 章中已经通过“无套利”方法得到了答案：

$$V=S-Ke^{-rT} \tag{17.43}$$

其中，$K=F_0$ 是最初远期合约的交割价（即 $t=0$ 时决定的远期价格）。现在让我们用 RNV 方法重新定价。在到期日，远期合约的收益是 S_T-K，但是，在风险中性世界里，股票价格以无

风险利率 r 增加，因此，$S_T=Se^{rt}$，因此，在 T 时刻，收益是 $Se^{rt}-K$。用无风险利率对这个风险中性的未来收益进行折现：

$$V=e^{-rt}(S\,e^{rt}-K)=S-K\,e^{-rt} \tag{17.44}$$

这与使用“无套利”原则得到的结果相同。

Black - Scholes 偏微分方程

本节中，我们使用伊藤引理推导确定性的（不支付红利的欧式）期权定价的 Black - Scholes 偏微分方程。然后我们用风险中性定价来解释这个偏微分方程。假设 S 服从 GBM：

$$dS=(\mu S)dt+(\sigma S)dz \tag{17.45}$$

期权的复制组合 A 包含标的股票和无风险债券（具有恒定利率）。后者服从

$$dB=(rB)dt \tag{17.46}$$

假设标的于 S 的衍生证券的价格是 $f(S,t)$。这里我们要注意，通常 $f(S,t)$可以是依赖于 S 和 t 的任何衍生品。伊藤引理允许我们得到 $f(S,t)$的微分方程，它也依赖于 dz 所代表的不确定性。根据伊藤引理，即公式(17.22)，并使用 $a=\mu S$ 和 $b=\sigma S$，衍生品价格 S 的公式是

$$df=\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}(\mu S)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma S)^2\right]dt+\frac{\partial f}{\partial S}(\sigma S)dz \tag{17.47}$$

然而，包含股票和债券的复制组合 A 可以具有与衍生品相同的收益（在一小段时间上），因此抵消了单独的衍生品带来的不确定性 dz。衍生证券价格的结果（见附录 17.2）是确定性的（即非随机的），被称为 **Black - Scholes 偏微分方程**：

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}(rS)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma S)^2\right]=rf(S,t) \tag{17.48a}$$

公式(17.48)与公式(17.47)非常相似，两者方括号中的项是相同的，只是公式(17.48)中 μ 被替换成 r。这又是风险中性。公式(17.48)的解与股票的期望收益率无关。最后，公式(17.47)中由 dz 代表的不确定性在公式(17.48)中被 $rf(S,t)$替换掉了。粗略地说，我们可以把 $rf(S,t)$解释如下：作为组合(包含衍生品、标的资产和无风险债券)的一部分，衍生证券的收益率是无风险利率，因此它的收益是 $rf(S,t)$。这依然是风险中性。

当股票以每年 δ 的速度支付红利时，Black - Scholes 偏微分方程与公式(17.48)非常相似，除了括号中的第二项是$(r-\delta)\partial f/\partial S$：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}(r-\delta)S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma S)^2=rf(S,t) \tag{17.48b}$$

Black - Scholes 偏微分方程的一个优点是它适用于任何收益只依赖于一种标的资产 S 和时间 t 的衍生证券。因此它适用于普通香草型的欧式看涨期权和看跌期权、美式期权和诸如标准障碍期权和回望期权的奇异期权。有时，偏微分方程（与所考虑期权的边界条件一起）具有封闭形式的解。但是如果得不到封闭解，那么可以用所谓的有限差分方法（见下文）解出公式。

需要经过复杂的运算才能得到公式（17.48）对于欧式看涨（看跌）期权的 Black - Scholes 价格。我们将在第 19 章讨论这个问题（也可参见 Wilmott，2000）。这里，我们只简单说明解方程（17.48）需要特别的边界条件。例如，对于欧式看涨期权和看跌期权：

$$\text{看涨：}\quad f(0,t)=0 \quad \text{和} \quad f(S,T)=\max(0,S_T-K) \tag{17.49a}$$

$$\text{看跌：}\quad f(\infty,t)=0 \quad \text{和} \quad f(S,T)=\max(0,K-S_T) \tag{17.49b}$$

我们可以利用这些边界条件和公式（17.48）推导出通常的 Black - Scholes 价格的封闭形式解：

$$C=SN(d_1)-K\,\mathrm{e}^{-rt}N(d_2) \tag{17.50a}$$

和

$$P=-K\,\mathrm{e}^{-rt}N(-d_2)-SN(-d_1) \tag{17.50b}$$

下面我们介绍求出以上封闭形式解的众多方法中的一种。首先，我们使用 Black - Scholes 线性抛物 PDE，即公式（17.48），并用变量替换的方式把它转换成更简单的另一个 PDE。我们得到的这个新的 PDE 被称为“热方程”，这个名称来自于它能解释一端加热的金属棒的热扩散过程。我们把这个热方程解出后，再把变量转换为原来的 Black - Scholes 偏微分方程的变量（即 S，K，r，$T-t$，σ）。我们得到积分形式的解（看上去很吓人!）：

$$f(S,t)=\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-[\ln(S/S')+(r-(1/2)\sigma^2)(T-t)]^2/2\sigma^2(T-t)}\ \text{收益}(S')\ \frac{\mathrm{d}S}{S} \tag{17.51}$$

上面的解适用于任何依赖于 S 和 t 的衍生资产。对于某些特定的到期收益函数，我们有时可以解出上式。例如，对于欧式看涨期权，收益$(S')=\max\{S'-K,0\}$。这个解与上式非常相似，除了积分限变成从 K 到∞：

$$f(S,t)=\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_K^{\infty}\mathrm{e}^{-[\ln(S/S')+(r-(1/2)\sigma^2)(T-t)]^2/2\sigma^2(T-t)}\,(S'-K)\,\frac{\mathrm{d}S'}{S'} \tag{17.52}$$

你或许会注意到，公式（17.51）中的项与累积标准正态分布非常相似：

$$\text{累积标准正态：}N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y \tag{17.53}$$

特别是我们还要记住 S 具有对数正态分布，$\ln(S_T)\sim N[\ln(S_0)+(\mu-\sigma^2/2)T,\sigma^2T]$，在风险中性世界里，$\mu=r$。实际上，我们确实可以把公式（17.51）中的项变换成标准正态分布的形式 $N(d_1)$和 $N(d_2)$，因此得到看涨期权价格的最终 Balck - Scholes 封闭形式解：

$$C(S,t)=SN(d_1)-K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{17.54}$$

其中

$$d_1=\frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad \text{和} \quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{(T-t)}$$

根据上面的分析，学术界应该很容易就得到 Black - Scholes 期权定价公式，但实际上，通往 Black - Scholes 公式的道路非常崎岖，文章 17.1 中对此进行了简要介绍。虽然 Black - Scholes 公

式是一个非常重要的突破，但很多期权并不存在封闭形式解。这该怎么办呢？幸好 Black - Scholes 偏微分方程的数值解还是可以得到的。另外，我们也可以使用 RNV 原理与蒙特卡罗模拟方法。下文我们将对这些方法进行讨论（当然也不要忘记不错的 BOPM）。

文章 17.1　粒子金融：PDE?（Pretty Damn Easy?）

衍生证券这一领域往往被称为粒子金融，这要起因于这一领域所用的数学知识，因为许多连续时间数学最初是用来解释物理现象的。一切都始于 1828 年，罗伯特·布朗（Robert Brown）先生发表了一篇关于水中花粉颗粒的论文。他注意到花粉颗粒在水中处于连续随机运动的状态。令人迷惑的是，单个的水分子看起来小得不足以移动“大的”花粉颗粒。对这个现象的解释存在于后来被称为布朗运动的数学当中。

布朗运动中，分子的速度是正态分布的，因此我们可以预期花粉颗粒先受到来自左边、然后受到来自右边的撞击后，应该停在原处。然而，如果一系列高速运动的分子（即正态分布的尾部）碰撞颗粒后，花粉将向一个方向运动。因为分子是正态分布的，下一次的“碰撞”将很小而且随机，因此花粉将停在它的新位置附近。

在 1900 年左右，法国数学家波恩凯尔（Poincaré）的博士生路易斯·巴彻勒（Louis Bachelier）对布朗运动的特性进行了研究，他首先把这个随机过程用于解释股票价格的随机运动。布朗运动数学上的难点在于花粉颗粒的运动是非连续的“之”字型（即使 $\Delta T \to 0$）。相反，正常的积分要求可导函数处处连续。是爱因斯坦在 1905 年最终解开了为什么花粉如此运动的数学问题。它被称为“扩散过程”，也可以解释为什么香烟的烟雾颗粒会向各个方向逐渐扩散（即正漂移）。因此，它可以解释为什么当你站在房间的另一端，香烟的烟雾却会进到你的眼睛里去。

1951 年，伊藤（Kiyoshi Ito）把扩散运动的数学进一步发展下去，他建立了布朗运动的“微分规则”。这使得布莱克（Black）、斯科尔斯（Scholes）和默顿（Merton）于 20 世纪 70 年代早期推导出衍生品的 SDE（标的股票服从布朗运动），于是可能把期权的 SDE 与标的资产的 SDE 结合起来，创造出无风险的组合，从而得到确定性的期权价格 PDE。一旦 PDE 建立起来，就可以使用物理学中早就使用的标准解法（如热方程）来求得期权价格的数学表达式。

因此，物理学家们对“粒子”行为的早期研究对期权定价问题有很大帮助。还有些来自于物理学的数学定理也被应用于连续时间金融当中。例如，由诺贝尔奖得主、物理学家理查德·范曼（Richard Feynman）帮助建立的 Feynman - Kac 公式以及数学上的 Girsanov 定理都能用来解决期权定价问题。

远期合约是否服从 Black - Scholes 偏微分方程

标的于标的资产 S 的任何衍生证券 $f(S,t)$ 都应该满足 Black - Scholes 微分方程(17.48)。我们通过股票远期合约的简单例子来证明这一点。远期合约的价值应该服从 PDE，即公式(17.48)，我们已经知道远期合约的价值由下式给出(见第 2 章，这里用“f”而不是“V”来表示)：

$$f=S-K\,\mathrm{e}^{-r(T-t)} \tag{17.55}$$

其中，K 为交割价格（在 $t=0$ 时远期合约的初始价格 F_0），$T-t$ 为到期时间。

这里的问题是，我们的解，即公式(17.55)是否满足公式(17.48)？我们有：

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-rK\ \mathrm{e}^{-r(T-t)} \tag{17.56a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S}=1 \tag{17.56b}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=0 \tag{17.56c}$$

用公式(17.56)对 Black - Scholes 微分方程(17.48)进行替换，使用公式(17.55)，Black - Scholes 公式的 LHS 变成

$$r[-K\ e^{-r(T-t)}+S]=rf \tag{17.57}$$

但是 Black - Scholes 公式(17.48)等于(rf)，因此，公式(17.57)给出的远期合约的价值确实满足 Black - Scholes 偏微分方程。其实，对于零息票债券(具有固定到期价值 $S=1$ 美元)，$f(S,t)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}$美元也满足 Black - Scholes 偏微分方程。(这作为简单的练习留给读者。)

17.3 使用网格来近似连续时间模型

我们的股票价格连续时间动态模型是以股票价格的自然对数变化 d(ln S) 或是比例变化 dS/S 来表示的。我们可以从两者中的任一个导出 BOPM，其中网格的上移或下移运动是所选连续时间过程的近似。因为我们希望对期权定价，我们假设一个风险中性世界，因此股票的年收益率等于年无风险利率。在一小段时间 Δt 以后 (例如 $\Delta t=1/365$ 或 1/252)，股票在风险中性世界里的期望收益和标准方差是：

$$期望收益=S\mathrm{e}^{r\Delta t} \tag{17.58a}$$

$$方差=S^2\mathrm{e}^{(2r)\Delta t}(\mathrm{e}^{\sigma^2\Delta t}-1) \tag{17.58b}$$

假设我们根据历史数据计算得到股票收益的年标准差 σ，我们现在希望选择 BOPM 中 U 和 D 的值 (因此风险中性概率为 q)，因此股票的期望增长率是 r，标准差是 σ。当 $\Delta t\to 0$ 时我们的近似更加精确。首先，我们把 T (=1 年) 分成 n 等份，$\Delta t=T/n$。在时间 Δt 上，我们让 BOPM 的一阶和二阶矩等于公式 (17.58) 中给出的已知实际值：

$$E(S_1)=qSU+(1-q)SD=S\mathrm{e}^{r\Delta t} \tag{17.59a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S_1)&\equiv E[S_1^2]-[E(S_1)]^2\\&=q(SU)^2+(1-q)(SD)^2-S^2[qU+(1-q)D]^2=S^2\mathrm{e}^{(2r)\Delta t}(\mathrm{e}^{\sigma^2\Delta t}-1)\end{aligned} \tag{17.59b}$$

使用公式(17.59a)，并简化公式(17.59b)：

$$qU^2+(1-q)D^2=\mathrm{e}^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \tag{17.60}$$

我们有三个未知数：q，U 和 D，只有两个方程：公式(17.59a)和公式(17.60)。因此，我们通

过下式来设定一维自由度：

$$D=1/U \tag{17.61}$$

公式（17.59a）给出

$$q=\frac{a-D}{U-D} \quad \text{其中 } a=e^{r\Delta t} \tag{17.62}$$

替换公式(17.62)中的$D=1/U$，然后替换公式(17.60)，整理得

$$U=\frac{1}{2}(e^{-r\Delta t}+e^{(r+\sigma^2)\Delta t})+\frac{1}{2}\sqrt{(e^{-r\Delta t}+e^{(r+\sigma^2)\Delta t})^2-4} \tag{17.63}$$

忽略公式(17.63)中比Δt高阶的项：

$$U=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{17.64a}$$

和

$$D=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{17.64b}$$

U和D的公式独立于股票的实际增长率v。因此，当我们从真实世界到风险中性世界时，股票的期望收益改变(从v到r)，但是它的波动率不变，即$2\sigma\Delta t=\ln(U/D)$，这正是 Girsanov 定理的结果。

股票指数期权、货币期权和期货期权的 BOPM

上面推导出的U和D的参数，经过修改后可以用于其他期权的定价。如果股票或股票指数支付连续红利δ，那么在风险中性世界里，股票必然具有收益为$r-\delta$。因此，公式（17.59a）中的$Se^{r\Delta t}$要被替换成$Se^{(r-\delta)\Delta t}$。表达式$U=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$和$D=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$不变，但是对于$q$，我们有$a=Se^{(r-\delta)\Delta t}$。我们已经知道，对于货币期权，$\delta$等价于国外无风险利率$r_f$，对于期货期权，$\delta$等于无风险利率$r$。因此：

外币期权：$a=e^{(r_d-r_f)\Delta t}$，标的S=汇率。

期货期权：$a=1$，标的是期货价格F。

我们可以采用通常的方法，选择合适的风险中性网格，从到期日的收益开始，向前递推，得到期权的价格。

负的风险中性概率

有时，当σ非常小时，对于q，上面的公式可能会给出负的概率，这是没有意义的。避开这个问题的一个办法是假设期权标的于价格为F的远期合约之上（即使实际上并不如此），那么，$a=1$，我们永远不会得到负的概率。F的网格建立起来后，我们可以在每一个节点t，利用$S_t=F_te^{-(r-q)(T-t)}$导出标的S的网格值（其中，q等于红利支付率或外币期权的国外利率）。

我们可以使所有的风险中性概率相等吗

在上面的推导中，我们有“一维自由度”，并使$U=1/D$（见 Cox 等，1979）。在这个约束

下，我们得到了 q，U 和 D 的确定值，从而建立起风险中性世界里的 BOPM 网格。这里，对于不同的标的资产 S，q 具有不同的值，因为这些资产具有不同的波动率。但在求出 q，U 和 D 时，我们能用另外的方法，使 q 对于所有的资产 S 都相同。这看起来与直觉相悖，但它与我们如何“分配”我们的“自由度”有关。有两个方程来决定三个“未知”的 U，D 和 q，我们可以令 $q=0.5$，以消除一个自由度。然后解方程(17.59a)和方程(17.60)，我们得到(比 Δt 高阶的项被忽略)

$$U=\mathrm{e}^{(r-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{17.65a}$$

和

$$D=\mathrm{e}^{(r-\sigma^2/2)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{17.65b}$$

显然，使用这些 U 和 D 的值得到的股票价格路径与使用 Cox 公式得到的路径不同，但使用两种方法所得到的期权价格是相同的。两个网格中 q 的差异刚好“抵消”了递推计算期权收益 U 和 D 的差异。因此，你会经常见到使上移的概率 $q=0.5$ 而建立起来的网格。然而，在这个网格中，S 在 $t=2$ 时的值(即 S_0UD，S_0DU)不再与 $t=0$ 时相等(即 S_0)，因此在计算 delta，gamma 和 rho 时会出现新的问题。

无论选择哪个网格，U 和 D 的大小(和 q 的值)都是在假设的风险中性世界里推导出来的。我们因此可以立即应用二项式公式(或通过风险中性网格的递推)来对期权定价，因为期权价格在风险中性世界里，只依赖于 U，D 和 q(和 r)的值。因此，当定价期权时，股票价格网格并不代表股票价格的实际运动(更精确地说是股票价格最初的两个运动)。

现在，如果我们愿意（这里我们不愿意!），我们可以很容易建立起二项网格，来模拟实际观察到的股票价格的运动。这将涉及 $E(S_1)=qSU+(1-q)SD=S\mathrm{e}^{v\Delta t}$，其中，$v$=股票的实际年平均收益。因此，上面关于 q 的公式的惟一变化是把 r 换成 v，得到 $q=(\mathrm{e}^{v\Delta t}-D)/(U-D)$。$U$ 和 D 的公式在真实世界和在风险中性世界里是相同的，即 $U=\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ 和 $D=1/U$。当然，正如以上阐明的，如果我们想对期权定价，我们要使用 RNV 方法，因此网格将有 $v=r$。

更多的网格

当对期权定价时，使用三项网格会比二项网格减少计算时间。在网格的每个节点，都有上、中、下三种移动。对于不支付红利的股票，可以证明在下述条件下，股票的平均增长率（=风险中性世界里的 r）与股票价格的实际标准差通过网格匹配：

$$U=\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{3\Delta t}} \tag{17.66a}$$

和

$$D=1/U \tag{17.66b}$$

$$q_{\mathrm{d}}=-\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{1}{6} \tag{17.67a}$$

$$q_{\mathrm{u}}=\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{1}{6} \tag{17.67b}$$

$$q_{\mathrm{m}}=2/3 \tag{17.67c}$$

其中，q_m 为“中间”路径的风险中性概率。我们可以沿着网格使用 RNV 方法递推，计算出期权的价格。对于支付连续红利的标的资产(速率为 δ)，我们把上面公式中的 r 替换成$(r-q)$。

17.4　使用蒙特卡罗和有限差分方法对期权定价

一般来说，RNV 的概念并不容易掌握，但是当不能得到封闭形式的解析解（如 Black - Scholes 公式）时，它是期权定价中非常有用的方法。我们已经学习了如何设定 BOPM 中“上移”和“下移”的参数，在第 16 章中，我们学习了通过二叉树来定价路径相关的期权（奇异期权）。本节中，我们主要讨论另外两种数值方法：(1) 使用蒙特卡罗方法定价欧式期权，(2) 使用有限差分方法定价美式期权。

在使用 BOPM 方法时，我们发现看涨期权在 $T-1$ 时的价值由它在 T 时的价值决定，折现因子是无风险利率 $R=1+r$，其中期望值是通过风险中性概率 q 计算的。一般来说，如果利率是非随机的，我们有

$$C_{T-1}=E^*[R^{-1}C_T]=R^{-1}E^*[C_T] \tag{17.68}$$

其中，E^* 为在风险中性概率下的期望值。对于单期的 BOPM：

$$C=\frac{1}{R}[qC_u+(1-q)C_d] \tag{17.69}$$

RNV 的概念也适用于连续时间过程。考虑标的股票价格是漂移参数为 μ 的 GBM 的情况：

$$\mathrm{d}S(t)=\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z \tag{17.70}$$

在时刻 t 股票价格的期望值是

$$E[S(t)]=S_0\mathrm{e}^{\mu t} \tag{17.71}$$

与公式(17.68)相似，$t=0$ 时的股票价格是它在时刻 t 的“风险中性价值”的现值：

$$S_0=e^{-rt}E^*[S(t)] \tag{17.72}$$

如果 $E^*[S(t)]=S_0e^{rt}$，公式(17.72)成立。因为公式(17.71)是公式(17.70)的解，所以 $E^*[S(t)]=S_0e^{rt}$ 与动态风险中性公式一致，形式为

$$\mathrm{d}S=rS\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z^* \tag{17.73}$$

其中，$\mathrm{d}z^*$ 为一个维纳过程，E^* 为在 $\mathrm{d}z^*$ 条件下的期望值，“μ” 被 “r” 替代了。不幸的是，我们无法进行更多的直观分析。此外要注意 Black - Scholes 偏微分方程 (17.48) 与 μ 无关，但包含具有 r 的项。这是因为我们导出 Black - Scholes 偏微分方程时，构造了零风险的复制组合。RNV 的结果是，一旦我们建立标的资产的合适的风险中性过程，我们就可以确定衍生品的价值。例如，使用 RNV，看涨期权的价格是

$$C=\mathrm{e}^{-rt}E^*[\max(S_T-K,0)] \tag{17.74}$$

S_T 的风险中性分布是对数正态的：

$$E^*[\ln(S_T/S_0)]=\{r-(1/2)\sigma^2\}T \tag{17.75a}$$

和

$$\text{Var}[\ln S_T/S_0]=\sigma^2 T \tag{17.75b}$$

公式(17.74)和公式(17.75)可以和一些积分结合起来，得出(无红利的)欧式期权定价的封闭解和关于 C 的 Black - Scholes 公式。我们这里没有对后者进行推导(参见第 19 章附录)。

期权定价的蒙特卡罗模拟

我们使用 RNV 的概念，可以通过 MCS 方法来决定期权的价格。当期权的收益依赖于标的资产的整个路径时（即对于某些路径相关的期权），或期权的收益取决于一种以上的标的资产时（特别是如果涉及三种或更多的标的资产），这种方法尤为有用。这种方法可以适用于标的资产的任何随机路径。然而，这种方法也有它的缺点：它的计算非常耗时，而且不能处理有提前执行可能的情况。

现在考虑使用蒙特卡罗方法对欧式看涨期权定价。首先，我们建立标的资产在风险中性世界里的随机方程，然后估计到期日的平均收益（折现）值。在连续时间情况下，描述实际股票价格动态变化的 SDE 有两种等价写法：

$$\frac{\mathrm{d}S}{S}=\mu\mathrm{d}t+\sigma\varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t} \tag{17.76a}$$

$$\mathrm{d}[\ln(S)]=v\mathrm{d}t+\sigma\varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t} \tag{17.76b}$$

其中，$v=\mu-\sigma^2/2$，μ=股票价格的实际平均增长率。这两个公式在离散时间下的递推形式是：

$$S_t=\left[1+\mu\Delta t+\sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}\right]S_{t-1} \tag{17.77a}$$

$$S_t=S_{t-1}\exp\left[(\mu-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}\right] \tag{17.77b}$$

公式(17.77a)有一个正态的随机项，但只能近似地给出 S 的对数正态分布，当 $\Delta t\rightarrow 0$ 时，它逼近对数正态。然而，公式(17.77b)对于所有的 Δt 都给出了一个精确的对数正态分布 S_T，如果期权到期日的收益只依赖于 S_T，那么公式(17.77b)可以用来给出“一步”后的 S_T 的值，这样会节省计算时间：

$$S_T=S_0\exp\left[(\mu-\sigma^2/2)T+\sigma\varepsilon\sqrt{T}\right] \tag{17.78}$$

虽然公式(17.77a)和公式(17.77b)并不完全等价，它们给出的 S_T 路径却是大体上相同的（当 $\Delta t<0.01$）。为了说明如何使用公式(17.77a)来模拟真实的路径，让我们考虑表 17—2 中的计算，其中 $\mu=0.15$，$\sigma=0.20$，$\Delta t=0.01$，因此

$$S_t=[1+0.0015+0.02\varepsilon_t]S_{t-1}$$

令 $S_0=100$，根据 $\varepsilon\sim N(0,1)$ 连续计算出 ε_1，ε_2，…，得到序列 $S_i(i=1, 2, \cdots, 100)$(见表

17—3）。

表 17—3　　**连续时间过程模拟**

数据：	年度值为 $\mu=0.15$，$\sigma=0.20$。当 $T=1$ 年时，取 $\Delta t=0.01$ 作为"一小段时间"，因此 $N=T/\Delta t=1$ 年中 100 个间隔（因此 $\Delta t=0.01$ 等价于 3.65 天）。
问题：	假设 $S_0=100$，（利用乘数模型）导出股票价格的递推公式。
答案：	$S_t=[1+\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t]S_{t-1}$ $\mu\Delta t=(0.15)(0.01)=0.0015$ $\sigma\sqrt{\Delta t}=0.20\sqrt{0.01}=0.02$ 因此 $S_t=[1+0.0015+0.02\varepsilon_t]S_{t-1}$ 令 $S_0=100$，那么从 $N(0,1)$分布中抽出 ε_1，ε_2，…，递推计算： $S_1=[1+0.0015+0.02\varepsilon_1]S_0$ $S_2=[1+0.0015+0.02\varepsilon_2]S_1$ 直到 S_{100}。

我们如何利用精确对数正态公式（17.77b），并使用 RNV 和 MCS 方法来得到欧式期权的数值解呢？首先，因为我们是对期权定价，我们假设一个风险中性世界，因此 μ 要被替换成它的风险中性值，对于不支付红利的股票，它等于 r（对于支付红利的股票，我们可以把 μ 替换成 $r-\delta$）。因此，随机方程是

$$S_T=S_{t-1}\exp\left[(r-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}\right] \tag{17.79}$$

我们可以用公式（17.78）一步计算出 S_T，这是我们为计算标准欧式期权价格所需要的全部，但为了说明问题，我们把所有 S 的值都计算出来。令 T 是期权的生命期（=1 年），那么如果我们选择 $\Delta t=0.01$（大约 3.5 天），我们需要计算出 $n=T/\Delta t=100$ 个股票价格的值。假设我们使用下面的值：

$S_0=100$，$K=105$，$\sigma=20\%(0.02)$，$r=0.05(5\%)$，$T=1$ 年

第一个蒙特卡罗模拟取 $n=100$，从 $\varepsilon_t\sim N(0,1)$得到 100 个随机值，计算出第一个模拟的最终值 $S_{100}^{(1)}(=S_T)$。看涨期权在 T 时的第一个模拟收益是

$$\text{收益 } C^{(1)}=\max\{0,S_{100}^{(1)}-100\}=25.4 \tag{17.80}$$

我们把上面过程重复 m 次，得到 m 个收益 $C^{(i)}$ 的值，列于表 17—4 中的底部：25.4，10.9，17.0，…，等等。我们使用 RNV 方法得到的看涨期权 MCS 估计值是：计算所有收益 $C^{(i)}$ 的平均值，然后用无风险利率进行折现：

$$\hat{C}=e^{-0.05(1)}\sum_{i=1}^{m}\text{收益 } C^{(i)}/m \tag{17.81}$$

表 17—4　　**用蒙特卡罗模拟为看涨期权和看跌期权定价**

初始股票价格 S	100
执行价格 K	105
利率 r	0.05
股票价格漂移 μ	0.1（注：没有用到股票价格的漂移，因为在风险中性世界里，S 以无风险利率 $\mu=r$ 增长）
波动率 σ	0.2
到期时间 T	1
时间步长 dt	0.01

时间	模拟 1	模拟 2	模拟 3	模拟 4	模拟 5	模拟 6	模拟 7	模拟 8	模拟 9	模拟 10
0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0.01	102.068 3	98.242 54	98.878 55	101.543 1	103.518 4	95.274 9	100.646 1	99.786 37	99.009 34	100.276 4
0.02	101.499 1	98.616 17	97.023 75	101.171 9	102.428 5	94.315 92	104.923 4	97.971 29	97.666 84	100.525 4
0.03	103.909 2	95.885 36	98.735 09	101.247 5	100.639 6	95.652 95	105.179 4	96.878 65	100.120 2	102.840 4
0.04	105.465 8	96.493 18	95.995 75	100.864 7	100.062 9	95.616 03	105.185 7	97.006 46	102.742 2	101.591 6
0.05	104.044 1	95.423 83	97.119 91	100.239 6	103.819 9	94.831 06	106.317 8	94.936 66	101.404 6	101.752 4
0.06	102.877 7	94.855 61	94.986 78	99.121 34	103.687 3	95.194 11	108.588 1	96.546 16	104.230 6	102.796 6
0.07	104.821 9	96.317 78	97.919 17	103.742 6	105.391 7	98.656 04	108.589 8	96.931 9	104.855 1	102.811
0.08	102.247 8	93.707 15	99.150 29	102.524	103.695 3	97.757 14	105.687 4	92.553 81	104.286 9	101.702
0.09	101.022 6	94.902 27	99.094 91	103.700 4	104.561 3	97.881 88	110.055 7	92.732 99	105.529 1	101.061 5
0.1	102.328 1	94.853 95	99.373 59	109.599 9	101.766 6	98.892 62	106.757	92.613 33	103.611 6	101.323 4
0.11	101.988 1	93.476 35	101.161 9	106.689 9	98.916 64	98.470 37	103.289 1	91.870 67	105.394 5	105.732 4
0.12	104.561 2	92.526 56	99.982 02	102.853	100.395 9	98.398 95	100.510 9	87.991 8	103.626 1	101.288 9
0.13	106.766	91.557	99.699 19	103.75	100.365	100.983 8	101.545 4	89.874 82	102.654	102.138 8
0.14	106.357	92.562 12	99.629 14	101.940 1	100.836 2	97.882 02	103.108 3	90.632 06	99.443 44	100.493 2
0.15	109.137 4	90.426 56	98.880 38	99.540 12	101.962 3	96.924 16	103.354 5	90.197 95	98.629 13	100.446 7
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0.95	132.726	115.302	121.9	93.210 48	74.426 75	104.838 2	137.051 1	83.495 3	78.388 09	106.550 5
0.96	132.000 4	115.353 4	121.933	95.048 15	75.911 56	106.485 2	138.320 2	81.601 78	77.161 47	104.565 4
0.97	133.230 9	113.445 2	125.142 1	99.454 39	74.883 03	108.097 6	138.653 1	81.650 1	77.806 83	107.273 7
0.98	131.967	110.799 2	122.894 5	98.974 97	74.822 9	106.521 4	135.377 7	84.093 24	77.139 06	108.860 8
0.99	132.025 9	112.850 1	120.084 9	97.578 11	75.523 92	106.763 6	137.235 8	84.234 62	77.618 26	109.955
1	130.420 2	115.925 9	122.066 2	97.483 44	75.877 43	105.244 3	135.098 6	85.728 14	78.285 76	108.391 5
看涨期权收益：max$[S(T)-K,0]$										
对每次模拟的看涨期权收益	25.420 17	10.925 86	17.066 18	0	0	0.244 29	30.098 59	0	0	3.391 519
平均收益	8.714 66									
平均收益的现值	8.289 641 **等于 MCS 看涨期权价格。**									
看跌期权收益：max$[K-S(T),0]$										
对每次模拟的看跌期权收益	0	0	0	7.516 557	29.122 57	0	0	19.271 86	26.714 24	0
平均收益	8.262 523									
平均收益的现值	7.859 555 **等于 MCS 看跌期权价格。**									

在 Excel 工作表中，我们会发现 $\hat{C}=8.29$，但是，因为我们只进行了 100 次模拟，这距离由 Black - Scholes公式得到的真正结果还很远。（在 Excel 工作表中，我们也使用 MCS 方法计算了看跌期权的价格。）为了使 C 接近一个稳定的值，MCS 方法需要进行大量的模拟。每次 MCS 模拟给出一个折现后的收益 $\hat{C}^{(i)}=\mathrm{e}^{-0.05(1)}C^{(i)}$ 和 $\hat{C}^{(i)}$ 的标准差 $\mathrm{Std}(\hat{C}^{(i)})$。对期权价格的标准误差的估计值是 $\mathrm{Std}(\hat{C}^{(i)})/\sqrt{m}$，期权价格的 95%置信区间是

$$\hat{C}-\frac{1.96[\mathrm{Std}(\hat{C}^{(i)})]}{\sqrt{m}}<C<\hat{C}+\frac{1.96[\mathrm{Std}(\hat{C}^{(i)})]}{\sqrt{m}}$$

其中，C 为真正的期权价格。因此，为了提高 10 倍 $\hat{C}$ 的准确性，就要把模拟的次数增加到 $(100m)$。为了使 $\hat{C}$ 稳定，需要进行的模拟次数相当大，我们发现，对于 $m=10\ 000$，最终的 MCS 值是 $\hat{C}=8.10$，这与 Black - Scholes 公式得到的值 $C^{\mathrm{BS}}=8.02$ 非常接近。有时，为了达到需要的精度，需要进行成百万次的模拟，除非我们使用一些复杂的“技巧”来加速收敛的速度。

我们可以使用一些方差减小（variance reduction）的方法来减少 MCS 的计算时间，比如控制变数方法和对偶变量方法。在对偶变量方法（antithetic method）中，每次我们得到一个 $+\varepsilon$ 的值，同时也得到一个 $-\varepsilon$ 的值，两者都用来产生股票价格的新值。因此，对每一个随机数，我们都得到两个股票的新价格。这种方法可以用在任何具有对称分布的情况下。因此每次模拟，我们使用 $+\varepsilon$ 得到 $C^{(i)}$，使用 $-\varepsilon$ 得到 $\bar{C}^{(i)}$，然后我们取两个收益的平均值作为这个模拟的收益值。如果在第 i 次模拟中得到的折现后收益是 $\hat{C}^{(i)}$ 和 $\hat{\bar{C}}$，那么我们对期权价格的第一次估计是 $C^{(i)*}=(\hat{C}+\hat{\bar{C}}^{(i)})/2$。期权的最终值是 m 次模拟得到的 $C^{(i)*}$ 的平均值。如果 $C^{(i)*}$ 的标准差是 $\mathrm{Std}(C^{(i)*})$，那么期权价格的标准误差是 $\mathrm{Std}(C^{(i)*})/\sqrt{m}$。我们从 m 对 $(C^{(i)},\bar{C}^{(i)})$ 得到的估计值要远远比通过 $2m$ 个 $C^{(i)}$ 得到的估计值更为精确。这是因为，在相对变量的情况下，收益相当于持有两个看涨期权，一个依赖于 $+\varepsilon$，另一个依赖于 $-\varepsilon$，因为它们完全负相关，两个期权构成的“伪”组合的方差要小于单一期权构成组合的方差。我们从下面一段 Gauss 程序的伪代码中，可以看到相对变量的使用，其中我们通过精确的对数正态，即公式(17.77b)，生成 S。

```
@ MONTE CARLO SIMULATION: CALL AND PUTS: RNV WITH ANTITHETICS @
nob          =tau/dt (number of stock prices generated)
runs         =number of runs in the MCS
tau          =0.3;
dt           =0.01;
r            =0.05
k            =105
sigma        =0.20;
s1[1,1]      =100;     @ current value for underlying @
s2[1,2]      =100;     @ current value for underlying -antithetic @
nob          =trunc(tau/dt);     @ truncates to whole number @
runs=10 000;
i=1;           @ count for MC runs @
m=0;            @ count for storing payoffs at maturity, T @
```

```
    @ === start of the "runs" loop in the MCS === @
do while <=runs;
    e = rndn (nob, 1);        @ generate N (0,1) errors @
                                   @ generate s using exact lognormal, RNV (r) and antithetics @
t=1;
  do while t<nob;
    t=t+1;
    s1[t,1]=s1[t-1,1]*(exp((r- sigma^2/2)*dt+sigma*sqrt(dt)*e[t]));
    s2[t,1]=s2[t-1,1]*(exp((r- sigma^2/2)*dt+sigma*sqrt(dt)* -e[t]));
  endo;
if s1[nob,1]>k;             @ call and put payoffs at maturity @
  callprof1=s1[nob,1]-k;
  putprof1=0;
else;
  callprof1=0;
  putprof1=k-s1[nob,1];
endif;
if s2[nob,1]>k;
  callprof2=s2[nob,1]-k;
  putprof2=0;
else;
  callprof2=0;
  putprof2=k-s2[nob,1];
endif;
m=m+1;
                      @ store each of the values at maturity, T @
call_T[m,1]         =0.5*(callprof1+callprof2);      @ average of payoffs at T @
put_T[m,1]          =0.5*(putprof1+putprof2);
stock_T[m,1]        =0.5*(s1[nob,1]+s2[nob,1]);
                    @ value of option for each run using antithetics @
cstar[m,1]=exp(-r*tau)*call_T[m,1];
pstar[m,1]=exp(-r*tau)*put_T[m,1];
    i=i+1;
  endo;              @ === End of the "runs" loop in the MCS ==== @
@ Final MCS values of call and put=
     present value of the mean of column entries of "call_T" @
  call_pr     =exp(-r*tau)*meanc(call_T);
  put_pr      =exp(-r*tau)*meanc(put_T);
                  @ Calculating the standard error of MCS estimates @
  sdcstar     =stdc(cstar);
  sdpstar     =stdc(pstar);
  se_call=sdcstar/sqrt(runs);
  se_put=sdpstar/sqrt(runs);
end;
```

代码“callprof1”和“callprof2”是看涨期权在 T 的收益，分别对应于 $+\varepsilon$ 和 $-\varepsilon$。这些收益的平均值是向量 call _ T=0.5*（callprof1+callprof2）。从 MCS 计算出的看涨期权最终价值“call _ pr”是向量“call _ T”的平均折现值。为了计算我们对看涨期权价格估计的标准差，我们首先要知道每次 MCS 模拟得到的看涨期权值的标准差。每次看涨期权的模拟值是由向量 cstar=exp(−r* tau)* call_T 给出，它对应于上面的 $C^{(i)*}$。$C^{(i)*}$ 标准差的计算是通过应用于 sctar 的 Gauss 命令“stdc”。看涨期权估计值的标准差是 $\mathrm{Std}(C^{(i)*})/\sqrt{m}$，对应于程序中的“se _ call=sdcstar/sqrt(runs)”。

下面，我们考虑**控制变数**的方法。假设我们想通过 MCS 方法计算一个复杂期权 A 的价值 f_A^{MCS}。我们由 Black-Scholes 公式，已经知道一个简单期权 B 的价值 f_B^{BS}，我们还可以通过 MCS 方法计算出它的价值 f_B^{MCS}，两者相近，但是不相等（由于 MCS 的样本误差）。控制变数的方法根据期权 B 的 MCS 定价误差来调整 f_A^{MCS} 的值。这个对期权 A 的“改进了的新”估计是

$$f_A^{new}=f_A^{MCS}+(f_B^{BS}-f_B^{MCS}) \tag{17.82}$$

例如，期权 A 是“复杂的”期权，是因为我们想在随机波动率的假设条件下计算它的价值，而期权 B 是它在恒定波动率条件下的价值（我们假设后者有一个类似于 Black-Scholes 公式的解法）。还有其他一些方法来对 MCS“加速”，有兴趣的读者可以参阅 Hull（2000），Wilmott（2000）和由克卢洛（Clewlow）与斯特里克兰（Strickland）合写的非常好的书（1998）。

我们在应用蒙特卡罗方法时，可以让每次模拟时标的资产具有不同的初始值，并使其他因素不变，从而计算出**对冲参数**。例如，为了计算期权的 delta 值，以新的初始值 $S_0^*=S_0+\delta S_0$ 重复蒙特卡罗模拟，其中 δ 代表 S_0 的一个很小的增加（例如 $\delta=0.001$）。保持所有其他因素不变（包括最初的随机数序列、时间间隔的数量和 MCS 的模拟次数），从而获得期权价格新的 MC 值 f^*，期权的 delta 值于是由下式得出：

$$\Delta=\frac{f^*-f}{(\delta S_0)} \tag{17.83}$$

对 Δ 的更准确的估计可以通过中央差分近似来获得（见下文）：

$$\Delta=\frac{f(S+\delta S)-f(S-\delta S)}{2(\delta S)}$$

其中，$f(S+\delta S)$ 为使用最初资产价格 $S+\delta S$ 得到的衍生品的 MCS 值。期权的 gamma 可以由下式获得：

$$\Gamma=\frac{f(S+\delta S)-2f+f(S-\delta S)}{\delta S}$$

对于影响期权价格的任何变量（例如 r，σ，t），我们可以重复上述过程，从而获得对 rho，vega 和 theta 的估计。

MCS：多元随机因素

利用 MCS 对依赖于一种以上标的资产的欧式期权定价非常直接。我们只需对每一个变量假设一个随机过程。例如，对于两种不同的股票（支付连续红利 δ），我们可以有两个 GBM：

$$dS_1=(r-\delta_1)S_1\,dt+\sigma_1 S_1\,dz_1$$

$$dS_2=(r-\delta_2)S_2\,dt+\sigma_2 S_2\,dz_1$$

其中，$dz_i=\varepsilon_i\sqrt{dt}(i=1,2)$。我们可以利用公式(17.77b)在离散时间中近似这两个 SDE，同时保证两个 $N(0,1)$随机变量具有与资产 1 和资产 2 同样的相关性(参见附录 24.2)。看涨价差期权(call ‘spread option’)的收益是 $\max\{S_{1T}-S_{2T}-K,0\}$，我们通过 MCS 得到两个值 S_{1T}和 S_{2T}，看涨期权的价值是 m 次模拟中两个收益的平均值的现值。如果上述公式中第二个是关于利率的(即用 r 替换 S_2)，那么我们可以在随机利率的假设下对标准的欧式期权定价。另一个有趣的情况是对标的于 S 的期权进行定价，但假设方差不是恒定而是随机的。这种情况下，我们需要 S 的一个 SDE 和另一个 S 的方差的 SDE，我们用 V 来表示它($=\sigma^2$，现在它是时变的)。一个很常见的 V 的 SDE 是均值回归过程(S 的 SDE 也写在下面)：

$$dS=(r-\delta)S\,dt+S\sqrt{V}\,dz_s$$

$$dV=b(\bar{V}-V)\,dt+(\xi V^{\alpha})\,dz_v$$

其中，$\bar{V}$ 为方差的长期平均值，ξ 为方差 V 的波动率。项 $\bar{V}$，ξ，α，b 是恒定的，需要被估计出来（经常令 $\alpha=1/2$）。在生成 V 和 S 的离散序列时，资产收益和它的（条件时变）波动率之间的相关系数 ρ 反映在蒙特卡罗模拟中“抽取” ε_v 和 ε_s 的过程中（即 $dz_s dz_v=\rho dt$，参见附录 24.2）。很显然，要通过第一个公式得到 S 的值，需要知道 V 的模拟值（反之亦然），而后者由第二个公式给出。对于合理的参数值，可以证明生成的 S 的序列具有真实世界里的“厚尾”的性质（某种程度上的偏度）。对于每次 MCS，看涨期权的 $\max\{S_T-K,0\}$的模拟数据得到以后，我们可以使用通常的方法来计算随机波动率条件下的看涨期权价格。我们也可以使用 GARCH 模型来计算随机波动过程。

我们可以把随机波动率下用 MCS 求得的期权价格与 Black - Scholes 公式求出的（不正确的）期权价格进行对比，这样可以看出后者给出的结果误差会多大。对于到期时间小于 1 年的标准欧式期权，随机波动率对于期权价格的影响并不十分明显（除了对于处于深虚值状态的期权），但是它的影响随着期权到期时间的增加会变大。正如我们在第 9 章中看到的，当对期权进行对冲时，随机波动率的影响将是非常大的。

以上，我们使用 MCS 方法对随机波动下的期权进行定价。有时，如果 V 的随机过程非常简单，那么有可能求出期权价格的封闭解。例如，当 V 的公式如上所示，但 V 与 S 不相关时，就能得到 V 的封闭形式解（见 Hull 和 White，1987)。另外，对于 $\alpha=0.5$ 的情况，Heston（1973）给出了期权价格 P_H 的系列展开（即近似的封闭形式解），形式为

$$P_H=f[(S,K,r,\delta,T-t):(\bar{V},\xi,\rho,a,b)]$$

第一类变量是通常的“Black - Scholes”变量，但第二类来自于随机波动率模型。它们全部有估计误差，会“溢出”到定价错误当中去。对于到期时间小于 1 年的深虚值期权，随机波动率

对于价格的影响在绝对数量上并不很大（但百分比却可能很大）。

一旦我们得到以上的封闭形式解，我们可以计算出随机波动率之下期权的 delta 值 Δ_H，从而对（在不同时期进行头寸调整的）离散 delta 对冲的准确性进行评价，这正如我们在第 9 章对 Black－Scholes 的 delta 值 Δ_{BS}所做的一样。为了达到此目的，我们模拟以上两个公式（但是 r 被股票的实际平均增长率替换掉），使用 Heston Δ_H 进行 delta 对冲（我们也可以把这个结果与使用“不正确”的 Δ_{BS}得到的结果对比）。但是现在，让我们回到使用 MCS 进行定价的讨论。

MCS：路径相关期权

作为一个例子，我们考虑一个向上敲出看涨欧式期权的定价。如果股票的价格从下方穿过上界 H，那么期权到期价值为零，否则，期权具有与标准看涨期权相同的收益。假设在每个交易日检查一次边界。为了对期权定价，我们使用 $\Delta t=1/252$ 来模拟 S 的 GBM。在每一步，我们都检查 S 是否穿过界限 H。如果是，我们结束模拟，对这次模拟返回一个零收益值。其他情况下，模拟的收益是标准的 $\max\{S_T-K,0\}$。期权的价格是这些收益的平均值的现值。我们可以通过把“连续观测到的障碍期权”的封闭形式解当做控制变数，从而对本方法加速。

MCS 方法的一个局限是它只能用来对欧式衍生品进行定价。这是因为，如果对美式期权定价，我们需要知道期权在所有 t 上所有 S 值情况下的价值（不只是它在 $t=0$ 时的价值），这样我们才能把它与内涵价值比较。MCS 出现这个“数学问题”是因为这种方法是通过前进的方式来求解(即从 S_0 模拟到 S_T)，而不是用倒退的方式来求解(例如 BOPM 和向后有限差分方法，见下文)。

有限差分方法

上面的 MCS 方法之所以可行，是因为期权是欧式期权，因此期权只在到期日才获得收益。当期权定价存在到期日之外的边界条件时（比如提前执行的美式期权），MCS 方法就无能为力了。这时，我们可以使用有限差分方法。有限差分方法对衍生品的连续时间微分方程进行近似，并可以通过数值方法解出。例如，考虑标的于不支付红利股票的期权的价格 f（S，t）。Black－Scholes 偏微分方程是

$$\frac{\partial f}{\partial t}+b(S,t)\frac{\partial f}{\partial S}+a(S,t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}-c(S,t)=0 \tag{17.84}$$

其中，$a(S,t)=(\sigma S)^2/2$，$b(S,t)=rS$，$c(S,t)=rf$。有限差分方法对上面的 PDE 进行近似，得到一系列公式，可以解出 f（S，t）。为了说明这个方法，可参看图 17—1，其中沿着横轴的时间间距是 Δt，沿着纵轴的股票价格变化是 ΔS（这里我们按照 Wilmott，2000 的思路讲解）。

每个节点代表期权的价格 f（S，t）$=f_i^k$，其中，标号 k 代表一个特别的时间点，i 代表每个节点上的 S 的值（见图 17—2）。因此

$$f_i^k=f[i(\Delta S),T-k\Delta t] \tag{17.85}$$

其中，$S=i(\Delta S)$，$t=T-k(\Delta t)$，$0\leqslant k<K_{\max}$，$0\leqslant i<I_{\max}$。请注意，在 $k=0$ 时，$t=T$(即到期日)，当 k 增加时，真实时间 t 减小。我们有 $\Delta t=T/K_{\max}$，因此在现在($t=0$)和到期日($t=T$)之间有($K_{\max}+1$)个时期：0，Δt，$2\Delta t$，$3\Delta t$，…，T。Black－Scholes 偏微分方程要对$0\leqslant S\leqslant\infty$求解，因

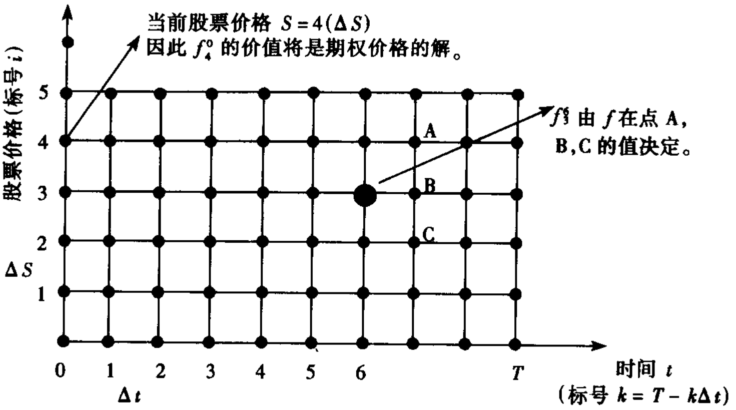

当前股票价格 $S=4(\Delta S)$
因此 f_4^0 的价值将是期权价格的解。
股票价格(标号 i)
ΔS
0
1
2
3
4
5
6
T
Δt
A
B
C
f_3^k 由 f 在点 A，B，C 的值决定。
时间 t
(标号 $k=T-k\Delta t$)

图 17—1　有限差分格点

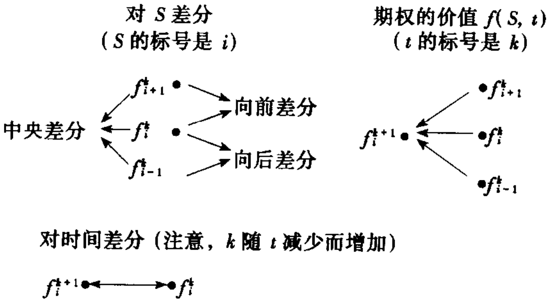


图 17—2　格点的使用

此，$S_{\max}=I_{\max}\Delta S$ 要选得大一些(比如，股票价格的 4 倍)。每个股票价格的变化是 $\Delta S=S_{\max}/I_{\max}$，($I_{\max}+1$)是纵轴上的节点数量：0，$\Delta S$，$2\Delta S$，…，$S_{\max}$。

左边纵轴上的一个节点将对应于现在的股票价格，在这个节点求出的 f_i^k 就是通过有限差分方法得到的期权价格。现在，我们给出公式 (17.84) 中导数项的近似表达式。导数 $\partial f/\partial S$ 有三种近似方法 (见图 17—2 和图 17—3)：

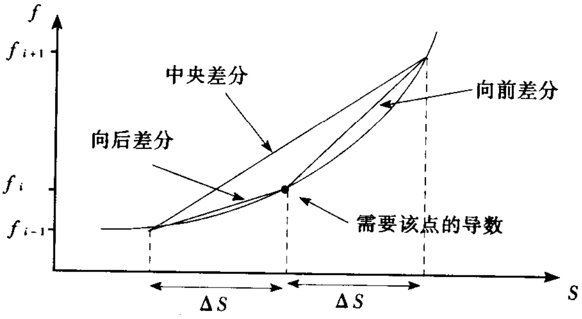


图 17—3　对 $\partial f/\partial S$ 近似

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{f_{i+1}^k-f_i^k}{\Delta S}\qquad \text{向前差分} \tag{17.86a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{f_i^k-f_{i-1}^k}{\Delta S}\qquad \text{向后差分} \tag{17.86b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{f_{i+1}^k-f_{i-1}^k}{2\Delta S}\qquad \text{中央差分} \tag{17.86c}$$

其他的导数是：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=\left[\frac{f_{i+1}^k-f_i^k}{\Delta S}-\frac{f_i^k-f_{i-1}^k}{\Delta S}\right]\bigg/\Delta S=\frac{f_{i+1}^k-2f_i^k+f_{i-1}^k}{(\Delta S)^2} \tag{17.86d}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{f_i^k-f_i^{k+1}}{\Delta t} \tag{17.86e}$$

替换 Black - Scholes PDE，见公式（17.84），把所有包含 k 的项移到右侧，我们得到差分方程：

$$f_i^{k+1}=A_i^k f_{i-1}^k+(1+B_i^k)f_i^k+C_i^k f_{i+1}^k \tag{17.87}$$

其中，$A_i^k=v_1a_i^k+(1/2)v_2b_i^k\quad B_i^k=-2v_1a_i^k+(\Delta t)c_i^k\quad C_i^k=v_1a_i^k-(1/2)v_2b_i^k$

$$v_1=\Delta t/(\Delta S)^2\qquad\qquad v_2=\Delta t/\Delta S$$

对于 $\partial f/\partial S$，我们使用了（更加精确的）中央差分，注意，只有导数 $\partial f/\partial t$ 才与时刻 $k+1$ 有关，见公式（17.86e）和图 17—1。依赖于 S 和 t 的 $\{a,b,c\}$ 的值由 $S_i=i(\Delta S)$ 和 $t=T-k(\Delta t)$ 决定，见公式（17.84）。

从公式（17.87）可知，如果我们知道在 k 时刻，f 在三个节点 i，$i-1$，$i+1$ 的值，我们就能计算出 f_i^{k+1} 的值（见图 17—1）。因此，我们如果知道边界条件，就可以通过递推的方法求出 f_i^{k+1} 的值（如同 BOPM 一样）。这就是为什么这种方法被称为**显式有限差分方法**（explicit finite difference method）。方程（17.87）的解可以从右边界（$t=T$，$k=0$）递推获得，其中，我们知道所有在到期节点的收益 f_i^0。然后我们向左边界移动，利用公式（17.87）计算出 f_i^1，f_i^2。

公式（17.87）只能得到满足 $1\leqslant i\leqslant I_{\max}-1$ 的 f_i^k 值，因为我们不知道在 $i-1$ 和 $I_{\max}+1$ 上的期权价值。对于（$I_{\max}+1$）个未知 f_i^k，我们有（$I_{\max}-1$）个方程。这是我们要用到边界条件的原因。我们需要至少两个在 $i=0$ 和 $i=I_{\max}$ 的边界条件。下面我们列出了可能的边界条件。

在 $t=T$ 时（即网格的 $k=0$ 处），看跌期权的价值：

$$f_{I_{\max}}^0=\max[K-S_T,0]=\max[K-I_{\max}\Delta S,0] \tag{17.88a}$$

在 $S=0$ 时（即 $f=Ke^{-r(T-t)}$），看跌期权的价值：

$$f_0^k=Ke^{-rk(\Delta t)}\quad k=0,1,\cdots,K_{max} \tag{17.88b}$$

其中，K＝执行价（不要与上标"k"混淆，它的最大值是 $K_{\max}$）。

当 $S\to\infty$ 时（即 $S=S_{\max}$），看跌期权的价值

$$f_{I_{\max}}^k=0\quad k=0,1,2,\cdots,K_{\max} \tag{17.88c}$$

公式（17.88a）到公式（17.88c）分别给出了看跌期权在右边界（$t=T$）、下边界（$S=0$）和上边界（$S=S_{\max}$）的价值。通过由 $t=T$ 递推的方式，差分方程（17.87）可以用来求出在网格左边界上所有

的期权价格 f_i^k。与最初（当前）股票价格对应的节点的 f_i^k 的值就是所求的期权价格。

对于边界条件 $S=0$ 和 $S=I_{max}\Delta S$，看涨期权的价值

$$\text{对所有的 } k \quad f_0^k=0, f_{I_{\max}}^k \Delta S-K\mathrm{e}^{-rk\Delta t} \tag{17.89}$$

其中，K 是执行价。因为当 $S\to\infty$时，看涨期权趋近于 $S-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}$，这就得出上面第二个边界条件。也可能有其他的边界条件，例如，对于看涨期权来说，当 S 处于上边界时，f 几乎是线性的。那么，我们利用 gamma 等于零的性质：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\to 0,\ S\to\infty \quad \text{这表明} \quad f_{I_{\max}}^k=2f_{I_{\max-1}}^k-f_{I_{\max-2}}^k \tag{17.90a}$$

对于普通香草型的期权，在 $S=0$ 时，收益是确定的，因此扩散项和漂移项都不存在，我们又得到另一种可能的边界条件：

$$\frac{\partial f(0,t)}{\partial t}-rf(0,t)=0 \quad \text{这表明} \quad f_0^k=(1-r\Delta t)f_0^{k-1} \tag{17.90b}$$

显式有限差分方程的主要问题是，它可能并不收敛，但如果真是如此，那么它的稳定性问题会非常严重，你可以很容易发现这个问题。有很多种数值方法（例如，隐式有限差分方法，Crank - Nicholson，Hopscotch 等）可以克服这个问题（见 Wilmott，2000）。

提前执行可以很容易被包含到显式有限差分之中。假设对于看跌期权，我们使用公式（17.87）计算出了所有 f_i^{k+1} 的格点值。下一步，我们可以把这些 f_i^{k+1} 与提前执行的收益 $K-S=K-i\Delta S$ 在每个节点进行比较。从 $T-1$ 递推，如果 $f_i^{k+1}<K-S$，那么我们把那个节点的 f_i^{k+1} 替换成 $K-S$。然后在 $T-2$，$T-3$ 等都重复此过程。很显然，显式有限差分方法与公式（17.87）中的二项方法非常类似，我们是通过从右向左沿着网格递推来解决问题，正如使用二项网格一样。

我们也可以使用对 d(ln S)的微分方程进行近似的有限差分方法，这样在计算上要相对简单一些。虽然有限差分方法可以用于对欧式期权和美式期权的定价，但它很难用来处理路径相关的期权，这时，因为另一个状态变量的存在（比如标的资产的平均值），我们不得不考虑“更高阶次”的问题。我们要把期权的价值写成 $f_{i,j}^k$，其中，j 是新的状态变量。此外，一些有限差分方法不稳定，或是对计算过程中的四舍五入误差非常敏感。正因为如此，人们研究出了一些定价美式期权解析近似的方法（见 Barone-Adesi 和 Whaley，1987）。

17.5 标的于不可交易“标的”变量的期权

假设我们有一个衍生证券，它标的于一个不可交易的“变量”。例如，我们可以把一个公司的股市总值看做标的于公司价值（即它的投资项目现值）的看涨期权，执行价等于现存债务的票面价值。这里的“标的”变量是公司的总价值，它是不可交易的实体（即它不是在一个有众多买主和卖主的市场上交易）。因此，为了对一个诸如互联公司这样的实体定价，我们需要一个“机制”或是公式，来对标的于不可交易资产的期权定价。另一个例子是收益决定于佛罗里达州 10

个城市每月平均气温的期权。这样的期权对于佛罗里达的橘子种植者很有用处，因为期权可以对他们的橘子收成提供保险（橘子收成受气温的影响很大）。然而，“气温”也是不可交易的。

为了对标的于“不可交易”标的变量的期权定价，要进行非常复杂的分析（有时需要专家才能胜任）。在第 19 章中，我们依据真实期权理论，通过简化的分析，利用 BOPM 和连续时间方法对互联网公司进行定价。这要涉及几个新的概念，比如风险的市场价格、等价鞅测度和远期风险中性。这些概念在对更复杂的期权定价时也非常关键，特别是在定价利率期权时，要使用标的于债券和债券期货、利率上限、利率下限、利率双限和互换期权的期权价格的连续时间封闭解，我们在下一章将对其讨论。但是，即使不知道这些概念，读者也能理解下一章的大部分内容。因此，如果读者不想更多了解更复杂问题的连续时间期权定价的，可以跳过本节剩余的部分（连同附录 17.3）。

风险的市场价格

为了理解风险的市场价格，我们考虑一个变量 θ（比如气温、石油价格、股票价格），它服从均值为 m，标准差为 s 的布朗运动：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta}=m\mathrm{d}t+s\mathrm{d}z \tag{17.91}$$

θ 可以是可交易资产（如股票），也可以是不可交易资产（如气温）。如果 θ 不可交易，它通常被称为**状态变量**（state variable）。让 $f(\theta,t)$ 代表收益依赖于 θ 和 t 的衍生证券，其中

$$\frac{\mathrm{d}f}{f}=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{17.92}$$

因此，f 与 θ 具有相同的（单一）不确定性来源 dz。可以证明，如果两个衍生品的均值和标准差是 μ_i 和 σ_i（$i=1$，2），而且两者都标的于 θ，那么

$$\frac{\mu_i-r}{\sigma_1}=\frac{\mu_2-r}{\sigma_2}=\lambda \tag{17.93}$$

对于所有依赖于 θ 和 t 的衍生品，比率 $\lambda=(\mu-r)/\sigma$ 都是相同的，这个常量被称为**风险的市场价格**（market price of risk）。整理上面的公式，我们得到

$$\mu-r=\lambda\sigma \tag{17.94}$$

因此，资产的超额收益（$\mu-r$）等于风险的市场价格 λ 乘以 f 中风险 θ 的大小（即 σ）。如果 θ 是一项**投资资产**（investment asset，拥有投资资产的目的是为了投资，投资资产可以自由买卖，例如股票），那么公式（17.93）也可以应用于 θ 本身：

$$\frac{m-r}{s}=\lambda \tag{17.95}$$

但是，如果 θ 主要用于消费（如牲畜），那么公式（17.95）对 θ 就不成立了，但公式（17.93）仍然对 θ 之上的衍生品 f 成立。注意，在风险中性世界里，$\mu=r$，根据公式（17.95），风险的市场价格是 $\lambda=0$。

风险中性定价的“新版本”

现在，我们给出风险中性定价的“新版本”，它允许我们推导出标的于不可交易变量 θ 之上的衍生品的 PDE。这个 PDE 可以用各种方法解出，从而得到衍生品的价格。利用伊藤引理(参见附录 17.3)可以证明，如果 θ 服从布朗运动，即公式(17.91)，那么衍生品的价格 $f(\theta,t)$ 遵守

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\theta(m-\lambda s)\frac{\partial f}{\partial \theta}+\frac{1}{2}\,(s\theta)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=rf \tag{17.96}$$

公式(17.96)类似于支付红利股票的期权：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+S(r-\delta)\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}(\sigma S)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf \tag{17.48a}$$

现在，令

$$(r-\delta)=m-\lambda s$$

或

$$\delta=r-(m-\lambda s) \tag{17.97}$$

我们已经知道如何利用风险中性定价来解方程（17.48a)：

- 让 S 的增长率等于$(r-\delta)$，把期望收益用无风险利率折现。

因此，解方程(17.96)的方法是：

- 把 θ 的增长率由 m 变成$(r-\delta)=(m-\lambda s)$，把期望收益用无风险利率折现。

上面的分析给出了对标的于不可交易（可交易）变量衍生品进行定价的新方法（测度变换）。为了证明以上的“测度变换方法”给出了标准的风险中性结果，假设 $\theta=S$，S 是股票的价格。我们把 m 变成 $m-\lambda s$，但因为 S 是可交易的，那么公式（17.95）适用，我们有 $m-\lambda s=r$。因此，新的“测度变换”表明，为了对期权定价，我们把 S 的实际增长率由 m 换成 r。但这正是我们最初的风险中性结果。在第 19 章中，我们将应用“测度变换”对互联网公司定价，它依赖于一个不可交易的变量，即公司的累计净利润。

因此，为了对衍生品在 $t=0$ 时定价（在恒定无风险利率下），我们有

$$f_0=\mathrm{e}^{-rT}\hat{E}(f_T) \tag{17.98}$$

其中，$\hat{E}$ 是在我们新的风险中性世界里的期望值，θ 中的真实增长率 m 被替换为 $m-\lambda s$。如果 r 是随机的，那么要像对待 θ 一样对待它，增长率 r 被替换为 $m_r-\lambda_r s_r$（λ_r 是负的，因为当 r 增加时，股票和其他资产价格会下降)，在这种情况下：

$$f_0=\hat{E}[\mathrm{e}^{-\bar{r}T}f_T] \tag{17.99}$$

其中，$\bar{r}$ 是在时期（0，T）上的利率平均值。

等价鞅测度

定价衍生品的另一个方法是等价鞅测度。如果一个变量 θ 是鞅，那么对它未来值的最佳预测是它的现值 θ_0：

$$E(\theta_T)=\theta_0 \tag{17.100}$$

例如，零漂移的随机过程

$$d\theta=\sigma dz \tag{17.101}$$

满足鞅的性质，因为 θ 的变化是围绕着零随机产生的，因此对 θ 未来值的最佳预测是 θ_0。我们下面讨论的等价鞅测度，它允许我们得到证券（即衍生品）的无套利条件，这有助于解决很多期权定价的问题，包括可交易资产期权的风险中性方法，更重要的是，它使我们得到利率期权（或债券期权）和不可交易资产期权的解。

首先考虑两个证券，价格分别是 f 和 g，它们具有同一个不确定性的来源，并且都服从布朗运动。我们把比率 f/g 表示成 ϕ：

$$\phi=f/g \tag{17.102}$$

ϕ 可以看做是以 g 作为单位（而不是美元）来衡量的 f 的价格，g 被称为记账单位。

等价鞅测度（equivalent martingale measure，EMM）说明

- 当没有套利机会时，ϕ 是风险的市场价格的一个特别选择的鞅，即 $\lambda=\sigma_g$，是 g 的标准差。
- ϕ 是所有的证券 f 的鞅。当这一条件成立时，我们处于一个远期风险中性世界当中。

因为 ϕ 是一个鞅，我们可以利用 $\phi_0=E$（ϕ_T）来求出在 $t=0$ 的"价格"（下面有详细说明）。对上面这个看起来十分深奥的结果的直观认识是，EMM 保证不存在套利机会，而后者是建立衍生品（或其他证券）的"公平价格"的本质。因此，一旦我们建立起合适的 EMM，我们就可以利用下式对证券 f 定价：

$$\frac{f_0}{g_0}=E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \quad \text{或} \quad f_0=g_0E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \tag{17.103}$$

其中，E_g 是在远期风险中性世界里的期望值。我们得到的结果又是一种"测度变换"（如同风险中性一样），它具有非常普遍的应用。鞅结果（17.103）可以用来解出衍生品的价格（特别是非常复杂的衍生品）。当收益 f_T 与标的资产的路径有关时，这个结果也成立。如果读者使用连续时间数学做进一步的研究，会发现 EMM 用途非常广泛。这里我们只给出 EMM 的两个较为简单的例子。

EMM 与标准风险中性

在标准风险中性世界里，无风险利率 r 是一个关键变量，因此让我们用 g_0 作为无风险投资，$g_0=1$ 美元：

$$dg = rg\,dt \quad 那么 \quad g_T = e^{\int_0^T r dt} = e^{rT} \tag{17.104}$$

且 $\sigma_g=0$，则 $\lambda_g=0$。

使用公式（17.103）：

$$f_0=g_0E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)=E_g[e^{-rt}f_T] \tag{17.105}$$

这是标准的风险中性定价结果，因此是 EMM 的一个特殊情况（即远期风险中性定价）。

EMM 与远期价格

假设我们采用零息票债券的价格 $P(t,T)$ 作为记账单位，那么 $g=P(t,T)$，因此

$$g_T=P(T,T)=1 美元 \quad g_0=P(0,T)=e^{-rt}$$

公式(17.103)给出

$$f_0=g_0E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)=P(0,T)E_g(f_T) \tag{17.106}$$

因此，我们可以把 $P(t,T)$ 作为一个 EMM 来计算期望收益，从而对衍生品 f 定价(以无风险利率折现)。现在我们得到关于远期价格的另一个有用结果。根据标准的“现购自运”理论，到期日为 T 的远期价格 F 是

$$F=f_0/P(0,T) \tag{17.107}$$

其中，f_0 = 标的资产的即期价格。比较公式(17.106)和公式(17.107)：

$$F=E_g(f_T) \tag{17.108}$$

因此，在 EMM（或远期风险中性定价）条件下，证券的远期价格等于期望的未来即期价格（注意，在标准风险中性定价之下，是期货的价格等于期望的未来即期价格）。下一章对利率期权定价时，我们会使用公式（17.104）的结果。

上面所有的结果都可以扩展到依赖于 n 个状态变量（θ_i 和 t）的衍生品情况，我们在附录 17.3 中对此做了简要说明。

17.6 本章摘要

本章中，我们学习了连续时间和离散时间的随机过程以及它们在衍生品定价中的应用。重要

结论如下：

- 如果连续复利计算的**股票收益**服从正态分布，那么**股票价格**本身服从**对数正态分布**。
- 股票价格的**随机运动**可以用带有正漂移的连续时间过程描述，称为**几何布朗运动 (GBM)**，是**伊藤过程**的一种特殊形式。
- 股票期权的收益可以由标的股票加上债券（即无风险资产）复制。因此，期权的价格必然等于**复制组合**的成本。同样，一个无风险组合也可以由期权和标的资产构成。这是期权定价中的**无套利方法**。
- 离散时间中对期权定价的无套利方法（即 BOPM）表明，期权“今天”（t）的价格是期权“明天”（$t+1$）价格的加权平均值。权重“q”可以理解为**风险中性概率**，因为它说明，在定价期权时，可以假设股票价格以无风险利率增长。这被称为**风险中性定价 (RNV)**。
- RNV 也出现在连续时间情况下，因为我们可以把标的股票 S 和债券的随机伊藤过程结合起来，从而复制出期权的收益。期权价格 $f(S,t)$的随机过程由**伊藤引理**给出。S 和 $f(S,t)$的随机过程中共同的随机项 dz 互相抵消，得到一个确定性的 PDE，被称为 **Black - Scholes PDE**。这个 PDE 依赖于无风险利率 r，但与股票的实际增长率 μ 无关。
- 有时 **Black - Scholes PDE** 具有**封闭形式解**（比如对于几种欧式看涨期权和看跌期权）。如果不能得到封闭解，线性抛物 Black - Scholes PDE 通常可以通过数值方法解出。这个过程与 BOPM 所用的方法类似，因为 PDE 最初由期权的边界条件“固定”，然后使用有限差分方法递推解出这个 PDE。
- 在二项网格中，股票价格“上移”或“下移”的值可以通过对标的资产的波动率和漂移的实证估计求出。我们也可以利用离散时间的模拟来近似标的资产的连续时间过程（即 $\ln S_t$ 的伊藤过程），这在 MCS 方法中有用。当使用 BOPM 或 MCS 来定价期权时，我们令股票价格的增长率等于无风险利率（即 $\mu=r$）。这是**风险中性定价**原理的应用。
- 一般来讲，Black - Scholes（类型的）PDE 的**数值解法**对于很多期权是准确快速的，即使期权具有三个以上的变量或“维度”（比如，时间和两个标的随机变量 S_1，S_2）时也是如此。当问题的维度大于 3 时，MCS 是更有效的方法。
- 当对标的于**不可交易的（状态）变量**（如气温、公司的收入）的期权进行定价时，我们使用“测度变换”的方法，PDE 中状态变量的实际预期增长率“m”被替换成“$m-\lambda s$”，其中 λ 是风险的市场价格，s 是状态变量的标准差。这个 PDE 可以通过已知的方法求解。
- **等价鞅测度 (EMM)** 方法允许从鞅的性质得到期权的价格，$f_0=g_0E_g(f_T/g_T)$，其中 g 是“特别选择”的记账单位资产（风险 f 的市场价格被设为等于σ_g）。EMM（也被称为**远期风险中性定价**）在对利率相关期权的定价中非常有用。

章末练习

1. 维纳过程的基本特性是什么？

2. 为什么 BOPM（或其他的“树型方法”）比 Black - Scholes 公式这样的封闭解有更大的灵活性？

3. 使用有限差分方法计算期权价格具有什么优势和不足？

4. 什么是随机微分方程 SDE？试举一例。

5. 什么是偏微分方程 PDE？试举一例。SDE 和 PDE 之间的关键区别是什么？

6. 在单期的 BOPM 中，什么是风险中性概率？证明这个风险中性概率与假设标的资产 S 以无风险利率增长一致。

7. 详细说明使用蒙特卡罗模拟（MCS）来对一个欧式看跌期权定价的步骤。

附录 17.1　伊藤引理

在正文中我们发现用一般的微分将 dS/S 遵循的几何布朗运动转换成关于 $d(\ln S)$的偏微分方程是很困难的。我们需要运用伊藤引理来推导，该定律会得出另外一个变量 $\sigma^2/2$，该变量是用于描述 $d(\ln S)$漂移行为的一个术语。正如我们在下文中将要看到的那样，引用这一变量是因为随机变量 $dx(=dS)$的阶数为$\sqrt{dt}$，因此 x 的平方(也就是 x^2)的阶数就是 dt，并且在用于推导伊藤引理的泰勒级数展开式中不能被忽略。下面我们给出的是伊藤引理的一个启发式的证明。伊藤过程为(这里 $\Delta t \to 0$)

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\Delta z \tag{A17.1}$$

我们要证明的是对于任何函数 $f(x,t)$都满足伊藤公式(这里 $\Delta t \to 0$)

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}b\Delta z \tag{A17.2}$$

在公式(A17.1)中，dx 依赖于 $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$，所以$(dx)^2$ 的阶数为 dt。忽略 dt 的更高阶小量，我们将可以得到 $\Delta f(x,t)$的泰勒级数展开式

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 \tag{A17.3}$$

利用公式(A17.1)来替换 Δx 和$(\Delta x)^2$，我们可以得到

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}(a\Delta t) + (b\Delta z) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[a\Delta t + b\Delta z]^2 \tag{A17.4}$$

含有方括号的这一项为

$$[a\Delta t + b\Delta z]^2 = a^2(\Delta t)^2 + 2ab\Delta t\Delta z + b^2(\Delta z)^2 = O_p(\Delta t^2) + O_p(\Delta t^{3/2}) + b^2\varepsilon^2\Delta t \tag{A17.5}$$

这里 $O_p(.)$代表的是变量的“概率阶数”。前两项是 $O_p(\Delta t)$的更高阶小量，而最后一项 $b^2(\Delta z)^2 = b^2\varepsilon^2\Delta t$ 的阶数为 Δt，因此必须保留。ε 是从标准正态分布 $N(0,1)$中抽取的一个随机值，所以 $\mathrm{Var}(\varepsilon) \equiv E(\varepsilon^2) - (E\varepsilon)^2 = 1$。但是当 $E(\varepsilon) = 0$ 时，$E(\varepsilon^2) = 1$，$\varepsilon^2\Delta t$ 的期望值等于 Δt。还可以证明 $\mathrm{Var}(\varepsilon^2\Delta t)$的阶数为 Δt^2，所以“$\varepsilon^2\Delta t$”也就变成了非随机变量，其大小等于其期望值，即 Δt，这样一来：

$$b^2(\Delta z)^2 = b^2\varepsilon^2\Delta t \to b^2\Delta t \qquad (\Delta t \to 0) \tag{A17.6}$$

所以

$$[a\Delta t+b\Delta z]^2\to b^2\Delta t \tag{A17.7}$$

这是我们将随机项 $b^2(\Delta z)^2$ 简单地替换为 $b^2\Delta t$ 这一技巧的基础。将公式(A17.7)代入公式(A17.4)中，且令 $\Delta t\to 0$，我们就得到了伊藤公式

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}a+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2\right)dt+\frac{\partial f}{\partial x}b\,dz \tag{A17.8}$$

附录 17.2　Black - Scholes 微分方程的推导

我们用复制两个投资组合的办法推导出了 Black - Scholes 偏微分方程，该方法最初应用于二项式模型（BOPM）的推导。BOPM 模型用来为期权定价，在第 8 章中我们做了详尽的讨论。在这里我们在连续时间的状态下，简单地重复一下这个分析过程。

例 A：利用股票和债券（也就是无风险资产）复制一个衍生证券（很短时间段上）的收益

假设股票价格服从几何布朗运动：

$$dS=(\mu S)dt+(\sigma S)dz \tag{A17.9}$$

且债券服从

$$dB=rBdt \tag{A17.10}$$

由伊藤引理可知衍生证券的价格 $f(S,t)$ 随机微分方程为

$$df=\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}(\mu S)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma S)^2\right]dt+\frac{\partial f}{\partial S}(\sigma S)dz \tag{A17.11}$$

在我们复制的投资组合中，我们持有 N_s 股股票和 N_B 数量的债券。在时间 t，复制的投资组合的价值与衍生证券的价值相同：

$$V_t=N_S S_t+N_B B_t=f(S,t) \tag{A17.12}$$

所以，我们就可以得出持有的债券数量为

$$N_B=\frac{1}{B}[f(S,t)-N_S S] \tag{A17.13}$$

复制的投资组合的价值的瞬间变化为

$$dV=N_S dS+N_B dB \tag{A17.14}$$

将公式(A17.9)和(A17.10)带入公式(A17.14)：

$$dV=NS(\mu_S dt+\sigma S dz)+N_B(rB)dt \tag{A17.15}$$

我们要求复制的投资组合价值的变化与衍生证券价值的变化相同：

$$dV = df \tag{A17.16}$$

在公式(A17.15)中，dz 的系数为 $N_S(\sigma S)$，在伊藤随机微分方程(A17.11)中是$(\partial f/\partial S)(\sigma S)$，所以公式(A17.16)意味着

$$N_S = \frac{\partial f}{\partial S} = \Delta(S,t) \tag{A17.17}$$

这样一来在每一期间内所持有的股票数等于期权的 delta，$\Delta = \partial f/\partial S$，它是 S 和 t 的函数。由公式(A17.13)和公式(A17.17)我们可以得出

$$N_B = \frac{1}{B}\left[f(S,t) - \frac{\partial f}{\partial S}S\right] \tag{A17.18}$$

它等于 dt 的系数。将 N_B 带入公式（A17.15）中，并且利用 $N_S = \partial f/\partial S$，然后让公式中 d$t$ 项的系数等于公式（A17.11）中 dt 项的系数：

$$\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{B}\left[f(S,t) - \frac{\partial f}{\partial S}S\right]rB = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma S)^2\right] \tag{A17.19}$$

经过抵消，我们就可以得到标的资产为不支付红利股票的衍生证券的 Black - Scholes 偏微分方程。我们可以看出该偏微分方程是确定性的且与股票价值增长率 μ 无关：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma S)^2 = rf(S,t) \tag{A17.20}$$

假设我们事先知道怎样去复制一个无风险的投资组合，那么我们就可以很简单地推导出 Black - Scholes偏微分方程。

例 B：考虑这样一个投资组合：它由一个 $N_S = \partial f/\partial S$ 股股票的多头和一个衍生证券($N_f = -1$)的空头组成。

这是一个更为简单的证明，因为我们假设我们知道卖空多少股票，即$\partial f/\partial S$(期权的 delta)。投资组合 A 的价值及其变化分别为：

$$V = -f + \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)S \tag{A17.21}$$

$$dV = -df + \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)dS \tag{A17.22}$$

利用 GBM 方程(A17.9)和伊藤方程(A17.11)，我们对方程(A17.22)中的 dS,df 进行替换。显然，含有 dz 的项被抵消了，我们只剩下

$$dV = \left[-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma S)^2\right]dt \tag{A17.23}$$

投资组合 A 的价值变化是确定性的。因此除非该投资组合获取的是无风险利率，无风险套利就会发生：

$$dV = Vr\,dt \tag{A17.24}$$

利用公式(A17.23)和公式(A17.21)对公式(A17.24)进行替换，我们可以得到

$$\left[-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma S)^2\right]\mathrm{d}t=\left[-f+\frac{\partial f}{\partial S}S\right]r\,\mathrm{d}t \tag{A17.25}$$

公式(A17.25)是一个简单的变形，它也给出了与公式(A17.20)等价的 Black - Scholes 偏微分方程。

支付股息的股票

如果我们持有 $N_S=\partial f/\partial S$ 股股票，该股票的股息支付率为 δ，那么在时间间隔为 $\mathrm{d}t$ 时，(以美元支付的) 股息额为 $\delta(\partial f/\partial S)S\mathrm{d}t$，我们将它放在公式(A17.23)的右边，其他的分析保持不变，就得到了支付股息股票的 Black - Scholes 偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}(r-\delta)S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma S)^2=rf(S,t) \tag{A17.26}$$

惟一的变化就是$(r-\delta)$取代了 r(不支付股息的股票的收益率)。这可以被解释成在风险中性的世界里股票价值的实际增长率变成了$(r-\delta)$。

附录 17.3　风险的市场价格和等价鞅测度

θ 的偏微分方程

我们想要建立一个 (可能是) 价格为 θ 的不可交易资产的衍生产品的偏微分方程。假设 θ 和衍生品 $f(\theta,t)$ 都遵循同样不确定风险源 $\mathrm{d}z$ 的布朗运动，其中 $f(\theta,t)$ 是 θ 和 t 的函数：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta}=m\mathrm{d}t+s\mathrm{d}z \tag{A17.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{f}=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{A17.28}$$

如果 f 用 θ 来表示，应用伊藤引理，则它遵循如下过程：

$$\mathrm{d}f=\left[m\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}(s\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right]\mathrm{d}t+\frac{\partial f}{\partial\theta}s\theta \tag{A17.29}$$

对比公式(A17.28)和公式(A17.29)，我们可以看出：

$$\mu f=m\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{1}{2}(s\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} \tag{A17.30a}$$

$$\sigma f=s\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} \tag{A17.30b}$$

将公式(A17.30a)中的 μ 和 σ 代入

$$\mu-r=\lambda\sigma \tag{A17.31}$$

这里 $\lambda=$ 风险的市场价格，我们发现 f 必须满足

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}(m-\lambda s)+\frac{1}{2}(s\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}=rf \tag{A17.32}$$

对于一个股息支付率为 δ 的股票衍生品来说，偏微分方程（参见公式（17.48a））为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+S\frac{\partial f}{\partial S}(r-\delta)+\frac{1}{2}(\sigma S)^2\frac{\partial f}{\partial S^2}=rf \tag{A17.33}$$

通过比较上面的这两个方程，我们可以发现偏微分方程(A17.32)和方程(A17.33)是等价的：

$$\delta=r-(m-\lambda S) \tag{A17.34}$$

为了求解方程(A17.33)，我们用 $r-\theta$ 来代替 S 的实际增长率，这样，我们就可以用 $m-\lambda S$ 来代替 m，以解出不可交易变量的衍生品的方程(A17.32)。由于：

$$r-\delta=m-\lambda s \tag{A17.35}$$

这样一来，我们就找到了一种方法来求解（可能是不可交易的标的资产的）衍生品的价格，利用

$$f_0=\hat{E}[\mathrm{e}^{-\bar{r}T}f_T] \tag{A17.36}$$

这里 $\hat{E}$ 是预期值，标的资产价值的实际增长率（$=m$）被 $m-\lambda s$ 代替（且 $\bar{r}$ 是 $t=0$ 和 $t=T$ 两个时期间的平均利率）。

等价鞅测度

我们想要说明当风险的市场价格为 σ_g 时：

$$\phi=f/g \tag{A17.37}$$

是一个鞅。f 和 g 的随机过程有着相同的不确定风险源 $\mathrm{d}z$：

$$\mathrm{d}f=(\mu_f f)\mathrm{d}t+\sigma_f f\,\mathrm{d}z \tag{A17.38}$$

$$\mathrm{d}g=(\mu_g g)\mathrm{d}t+\sigma_g g\,\mathrm{d}z$$

当风险的市场价格为 $\lambda=\sigma_g$ 时，期望收益率为

$$\mu_f=r+\lambda_f\sigma_f=r+\sigma_g\sigma_f \tag{A17.39}$$

因此

$$\mu_g=r+\lambda_g\sigma_g=r+\sigma_g^2$$

将 μ_f 和 μ_g 代入公式（A17.38）：

$$\mathrm{d}f=(r+\sigma_f\sigma_g)f\mathrm{d}t+\sigma_f f\,\mathrm{d}z \tag{A17.40}$$

$$dg=(r+\sigma_g^2)g\,dt+\sigma_g g\,dz$$

利用伊藤引理，我们可以转换成 $\ln f$ 和 $\ln g$ 的 SDE：

$$d(\ln f)=(r+\sigma_f\sigma_g-\sigma_f^2/2)dt+\sigma_f dz \tag{A17.41}$$

$$d(\ln g)=(r+\sigma_g^2/2)dt+\sigma_g dz$$

因此

$$d[\ln(f/g)]=\frac{-(\sigma_f-\sigma_g)^2}{2}dt+(\sigma_f-\sigma_g)dz \tag{A17.42}$$

现在我们再一次利用伊藤引理，将 $\ln(f/g)$ 的随机微分方程转换成 (f/g) 的随机微分方程：

$$d(f/g)=(\sigma_f-\sigma_g)(f/g)dz \tag{A17.43}$$

公式（A17.43）表明（f/g）是一个零漂移的随机过程，因此满足鞅的性质。这使得证明更加完整，我们可以将衍生品的价格写成

$$f_0=g_0E_g(f_T/g_T) \tag{A17.44}$$

多个状态变量

上面得出的结论可以扩展到有 n 个状态变量 θ_i 的情况。这里我们简要地给出关键的几个结果。每个 θ_i 的随机过程的形式为

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i}=m_i dt+s_i dz_i \tag{A17.45}$$

利用伊藤引理，一个收益依赖于所有的状态变量 θ_i（和时间 t）的衍生品可以用如下形式来表示：

$$\frac{df}{f}=\mu dt+\sum_{=1}^{n}\sigma_i dz_i \tag{A17.46}$$

这里 μ 是关于 $\partial f/\partial t$，$\partial f/\partial\theta_i$，$\partial f/\partial\theta_i\partial\theta_j$，$m_i$ 和 s_i 的一个复杂函数，而 σ_i 取决于 $\partial f/\partial\theta_i$ 和 s_i。这样，如果存在 $n+1$ 种可交易证券（包括我们将要定价的这一种），那么我们就可以有

$$\mu-r=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sigma_i \tag{A17.47}$$

显然，这是“单个状态变量”例子的一般化。在 n 个状态变量的情况下，衍生品的预期超额收益率（expected excess return）就等于每个风险 θ_i 的市场价格乘以风险大小后的总和。这里给定风险大小为 σ_i。λ_i 可以为正，也可以为负。一些读者可能会发现，公式(A17.47)与 Ross 的套利定价理论或当 $i=1$ 时与连续时间状态下的资产定价模型(CAPM)很相似。(这里 λ_i 与 θ 的收益率和市场收益率之间的相关系数成比例，参见 Cuthbertson 和 Nitzsche，2001)。

把公式(A17.47)中的 μ 代入公式(A17.46)中，再把得到的结果与对 f 的微分方程(A17.45)

应用伊藤引理后的结果相对比，可以表示为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\theta_i(m_i-\lambda_i s_i)\frac{\partial f}{\partial\theta_i}+1/2\sum_{ij}\rho_{ij}s_is_j\theta_i\theta_j\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_i\partial\theta_j}=rf \tag{A17.48}$$

这里 ρ_{ij} 是 θ_i 和 θ_j 的相关系数，只要我们知道恰当的边界条件，该微分方程就可以（通过很多不同的方法）求解了。通过与原来的分析对比，我们可以发现，在为衍生品定价时，我们只是将每一状态变量的实际增长率 m_i 变成$(m_i-\lambda s_i)$，而状态变量的波动率 s_i 和它们之间的相关系数 ρ_{ij} 没有发生改变(Cox 等,1989)。

通过解偏微分方程，我们可以为期权来定价，一种求解的方法是

$$f_0=\hat{E}[\mathrm{e}^{-rT}f_T]$$

另外一种方法就是利用 EMM，对于多状态变量来说，当我们用 EMM 时（也就是说我们处于一个未来风险中性的世界里），$\phi=f/g$ 也是一个鞅，所以，我们也可以通过鞅来为该衍生品定价，即公式（A17.44）：

$$f_0=g_0E_g(f_T/g_T)$$

第18章

利率衍生证券的定价

学习目标

- 演示如何采用 **Black 模型**（Black's model）对长期国债期权、长期国债期货、利率上限、利率下限、利率双限和欧式互换期权进行定价。
- 介绍 BOPM 在对利率上限、利率下限、利率双限和互换期权定价中的应用。
- 推导出与目前的利率期限结构一致的**利率网格**（interest rate lattice），这个利率网格排除了任何（沿着期限结构的）无风险套利。这是利用**无套利方法**（no arbitrage approach）对利率衍生证券定价所需的基础。
- 分析瞬时短期利率的不同**均衡期限结构模型**（equilibrium term structure model），并且解释如何导出总的期限结构模型。根据短期利率模型中估计的参数，可以使用连续时间数学对利率衍生证券进行定价。
- 利用**蒙特卡罗模拟**对利率期权进行定价。

在前面的章节中，我们讨论了利用长期国债期权和欧洲美元期货期权进行对冲和投机的策略。我们也介绍了如何利用利率上限、利率下限、利率双限、互换期权和抵押担保证券对利率敏感性的标的资产和负债（如浮动利率贷款）进行对冲。在本章中，我们集中讨论如何对这些衍生证券定价。有三种方法得到了普遍的应用。

第一种方法假定标的资产的“价格”在期权到期日服从 GBM。因此可以通过 **Black 模型**（经过少许修改）得到一个封闭形式的解 。第二种方法称为**无套利方法**，由一个短期利率（或是标的资产的价格）的连续或是离散的随机过程开始。例如，我们可以为单期的利率建立一个网格，然后通过 BOPM 对利率衍生证券进行定价。我们提出“无套利”是因为利率网格具有这样的性质：通过沿着收益率曲线的交易（不同的债券）是不可能获得无风险利润的。在无套利方法中，利率网格是经过校准的，因此它是当前观察到的期限结构的精确模拟。

第三种方法是**均衡收益率曲线方法**（equilibrium yield curve approach）。它对于每个单期（短期）利率假定了一个连续时间随机过程。这个过程的参数由过去短期利率的时间序列数据估计得出。债券的价格或是衍生证券的价格可以用数学的方法得出（例如一个 PDE 的解），这些价格直接取决于这个短期利率的随机过程中估计出的参数。因此在这个均衡方法中，当前的期限结构是根据一个短期利率模型得到的输出变量。然而在无套利方法中当前的期限结构是作为校准这个短期利率过程的一个输入变量。

给利率衍生证券定价比给股票期权、货币期权和远期合约定价要复杂得多，因为我们必须做出的一些假设可能与最初的 Black - Scholes 公式中的假设不一致。特别是：

(1) 短期利率的随机过程比股票价格的随机过程复杂得多（例如，利率可能是均值回归的，因此不遵循 GBM)。

(2) 为了对利率衍生证券定价，我们不仅需要短期利率的路径，还需要利率的整体期限结构。

(3) 利率的波动率不稳定，并且对于不同的到期日，利率的波动率可能不同。

(4) 由于利率是随机的而不是确定的，因此我们不能用一个固定的利率对由期权收益所得到的未来现金流进行折现。

18.1 Black 模型

Black 模型（1976）最初用于对一般的商品期货期权进行定价，对它经过适当的变换，可以得到一个确定形式的解，来决定欧式债券期权、期货期权、利率上限、利率下限以及欧式互换期权的价格。利率期权的现金收益有时发生在期权的到期日 T，但是对于一些期权，支付的价值 V_T 在 T 时刻决定，但是支付要延期到 T^* 时才实际发生（见图 18—1)。我们采用下面的一些符号：

V_T＝在 T 时刻标的“资产”的现金价值（价格）

F_0＝在 T 时刻进行交割的标的资产在 $t=0$ 时刻的远期价格

T ＝期权距到期日的时间

R ＝零息债券的利率（连续复利）

K ＝执行价格

σ $=F$ 的波动率

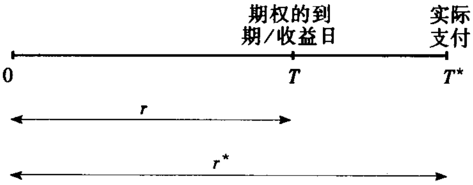


图 18—1　获得期权收益的时间

Black 模型并没有假设标的物是一个 GBM，但是有一个相对较弱的假设：$\ln(V_T)$在到期日是对数正态的，标准差是 $\sigma\sqrt{T}$，期望值是 V_T 并且等于远期价格 F_0。如果期权在到期日 T 的收益是 $\max\{0, V_T-K\}$，并且马上得到支付，那么 Black 模型（用 F_0 替代 $E(V_T)$）给出了看涨和看跌期权的价格：

$$C=e^{-rT}[F_0N(d_1)-KN(d_2)] \qquad (18.1a)$$

和

$$P=e^{-rT}[KN(-d_2)-F_0N(-d_1)] \qquad (18.1b)$$

其中：

$$d_1=\frac{\ln(F_0/K)+\sigma^2(T/2)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

如果期权的收益在 T 时刻决定，但是实际的支付要推迟到 T^* 才进行，那么上面关于 d_1 和 d_2 的公式仍然成立（即用 T），但是折现因子就不再是 e^{-rT}，而是 $e^{-r^*T^*}$（见图 18—1）。

如果利率不是随机的，那么 EV_T 就等于远期的价格，也等于期货的价格（我们可以对公式(18.1）中的 F_0 应用后者）。如果利率是随机的，那么 EV_T 就不等于期货价格，因此应用后者只是一个近似。另外，对于随机利率，像在 Black 公式中那样假设一个固定的利率来折现，严格地说是不正确的。然而，可以证明对于债券的欧式期权、利率上限、利率下限、利率双限以及互换期权来说，这两种近似可以完全互相抵消。

长期国债和长期国债期货期权

当我们用 Black 公式对长期国债期权定价时，我们必须设定执行价格 K 等于在期权到期日支付的现金价格。这个现金价格“B”等于净价加上应计利息。另外，对于债券期权，用 Black 模型所衡量的波动率是

$$\sigma=\mathrm{Std}[\ln B_T]/\sqrt{T} \qquad (18.2)$$

其中，Std [.] 为在期权的到期日 $\ln(B_T)$的“标准差”。对于欧式长期国债期货期权，期货价格由 $F_0=[B_0-PV(C)]e^{rT}$ 给出，其中 PV(C)是在 $t=0$ 到 $t=T$ 期间所支付利息的现值。B_0 是当前债券的即期价格，F_0 是期货合约的即期价格（即不是行情报价）。在对长期国债期权定价时，我们在公式(18.1)中应用这个 F_0 的价值。

利率上限和利率下限

在 n 个重置日期中，名义本金为 Q 美元的利率上限（总的有效期是 T）的收益取决于 LIBOR 利率 R_k 和执行利率 K（%）之间的差别。假设重置日期是 t_1，t_2，…，t_n，并且 $t_{n+1}=T$，收益就是

$$(m_kQ)\max\{0,R_k-K\} \tag{18.3}$$

其中，m_k 为票期，即重置日期之间的时间间隔 $t_{k+1}-t_k$（例如 $m_k=90/360$），R_k 为在 t_k 时刻的实际LIBOR利率（票期为 m_k）。收益是在 t_k 时刻计算的，但是直到一期以后才实际支付，即在 $t_{k+1}(k=1,2,\cdots,n)$时刻进行支付。如果 $\ln(R_k)$是标准差为 $\sigma_k\sqrt{t_k}$的对数正态分布，那么这个上限期权的价值就是

$$V(\text{上限期权})=(m_kQ)\mathrm{e}^{-r^{*}(t_{k+1})}[f_kN(d_1)-KN(d_2)] \tag{18.4}$$

其中，$d_1=\dfrac{\ln(f_k/K)+(\sigma_k^2)t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}}$，$d_2=d_1-\sigma_k\sqrt{t_k}$，$f_k$ 为在 $t=0$ 时计算的 t_k 至 t_{k+1}之间的远期利率，r^* 为在 t_{k+1}到期时的零息债券利率。

注意 r^* 是连续复利的，然而，K 和 f_k 是指 m_k 期的单利，以年利表示。对于（单一的）下限期权价格的计算公式是

$$V(\text{下限期权})=(m_kQ)\mathrm{e}^{-r^{*}(t_{k+1})}[KN(-d_2)-f_kN(-d_1)] \tag{18.5}$$

为了对利率上限进行定价，每个上限期权必须单独进行定价，原则上这要求不同的远期—远期波动率 σ_k。然而，实际中利率上限/利率下限的价格是经纪商利用平坦波动率进行的报价，即假设对于所有的利率期权，σ_k 是相等的。

欧式互换期权

一个“支付固定—收到浮动”的互换等价于卖出（做空）固定利率债券，同时买入浮动利率债券。因此，**支付者互换期权**（payer swaption）（即支付固定—收到浮动）是关于固定利率债券的看跌期权，并且他的执行价格等于互换中的本金金额 Q。相反，如果你是**收取者互换期权**（receiver swaption）（即收到固定—支付浮动）的多头，那么这相当于固定利率债券的看涨期权，并且它的执行价格等于本金。我们应用下面的这些符号（见图 18—2），并且假设在 T 时刻的互换利率是对数正态的：

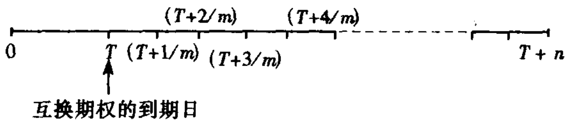
K ＝在这个互换期权中固定的执行（息票的百分比）利率（每年）（单利）
T ＝互换期权的到期日（即互换开始的时间）
N ＝互换的年数（从 T 时刻开始）
M ＝在互换中每年支付的次数
cp_T ＝在互换期权到期日的互换利率（每年）（单利）
Q ＝互换中的名义本金

支付者互换期权产生了一系列的现金流：

$$\frac{Q}{m}\max\{0,cp_T-K\} \tag{18.6}$$

在到期日的互换利率 = cp_T

K = 执行利率



m 是在互换中每年支付的次数(这里 $m=4$)。

n 是互换的年数。

Q 是互换中的名义本金。

如果在到期日 $cp_t > K$，那么支付者互换期权在每个 m-期具有正的现金流 $(Q/m)(cp_t-K)$，这个现金流持续到 $T+n$ 时。

图 18—2　支付者互换期权

这是从目前算起，到 t_1，t_2，…，t_{mn}年累计的值（其中 $t_i \approx T+(i/m)$），参见图 18—2。在 $t=0$时，任何一个这样的现金流（在 t_i 时刻得到）的价值都由 Black 公式给出：

$$V(\text{单一现金流})=\frac{Q}{m}e^{-r_it_i}[cp_fN(d_1)-KN(d_2)] \tag{18.7}$$

其中，$d_1=\dfrac{\ln(cp_f/K)+\sigma^2(T/2)}{\sigma\sqrt{T}}$，$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$，$cp_f$＝在 $t=0$ 时的远期互换利率（每年）（单利），r_i＝（连续复利）在到期日 t_i 的零息债券利率。

在 $t=0$ 时我们可以计算出远期互换利率 cp_f，这就是使互换的预期价值等于零的利率（在 T 时刻）。我们在第 15 章中解决了这个问题。由于支付者互换期权是一系列的现金流，因此目前（$t=0$）它的价值就是

$$V_{\text{支付者互换期权}}\ \text{美元}(t=0)=\sum_{i=1}^{mn}e^{-r_it_i}\left[\left(\frac{Q}{m}\right)[cp_fN(d_1)-KN(d_2)]\right] \tag{18.8}$$

如果我们有一个接受者互换期权（即收到固定—支付浮动），那么收益就是$(Q/m)\max\{0,K-cp_T\}$，它是一个执行价格为 K 的关于cp_T 的看跌期权，在 $t=0$ 时的价值是

$$V_{\text{接受者互换期权}}=\sum_{i=1}^{mn}e^{-r_it_i}\left[\left(\frac{Q}{m}\right)[KN(-d_2)-cp_fN(-d_1)]\right] \tag{18.9}$$

注意这个求和仅应用到 $e^{-r_it_i}$项，他们的和等于以间隔 t_i 支付的 1 美元的年金的价值（利用利率 r_i 进行折现）。这个年金也在 BOPM 中出现，下面我们将会看到这一点。

Black 模型的局限性

Black 模型在实际中得到了广泛的应用，因为它对于长期国债、长期国债期货、欧洲货币期权和互换（即互换期权）等的欧式期权的价格提供了一个封闭形式的解。然而，Black 模型也具有它自身的局限性。首先，它假设在期权的到期日，债券的价格、债券期货的价格、短期利率和互换利率都服从对数正态分布，这是不合理的。再者，实际中，债券的价格（或是利率）在期权的有效期内，波动率并不恒定，但是 Black 模型却假设它们是不变的。例如，在接近债券的到期日时，债券价格的波动率趋近于零。然而，如果期权的期限 T 与可交割的标的债券的有效期相比非常小，那么，波动率恒定的假设提供了一个合理近似。还要注意到 Black 模型仅仅对欧式期权提供了解决方法，对于美式期权和一系列其他“更加新型的”期权并不适用。

上面的诸多限制导致了其他利率衍生证券模型的出现。其中一种方法被称为**均衡收益率曲线方法**（**equilibrium yield curve method**），它对于短期利率假设一个特定的随机模型，这个模型的参数可以通过历史数据进行估计。给出这些参数后，我们可以用解析的方法推导出整体利率期限结构。下面我们就简单地描述这些想法。值得注意的是实际操作者对这种均衡方法抱有怀疑态度，因为我们所使用的这个短期利率模型往往不能准确地与目前的期限结构相“吻合”。实际收益率曲线中1%的误差可能会造成一些利率期权定价中的巨大误差（可能是20%）。

另外一种可选择的方法就是应用我们所说的**无套利模型**（**no arbitrage model**）。需要说明的是，这个模型与目前的期限结构是一致的（也排除了沿着收益率曲线得到套利利润的可能性）。我们通过一些基于单期利率BOPM模型的简单例子来研究这种方法。

18.2 无套利方法和BOPM

BOPM也可以用于对利率衍生证券定价，方法基本类似于对股票定价，但是其中有几点不同。首先，我们要求一个关于单期即期利率序列的网格（见图18—3），但是这个网格不允许沿着收益率曲线产生任何套利利润。这就意味着，给定所选择的一个序列单期即期利率时，要通过卖出（卖空）一个零息债券，再买入另外的零息债券，从而获得无风险利润是不可能的。而且，一旦选定一个序列单期的即期利率，我们可以很容易地在每个节点上推导出所有的期限结构（参见附录18.1）。

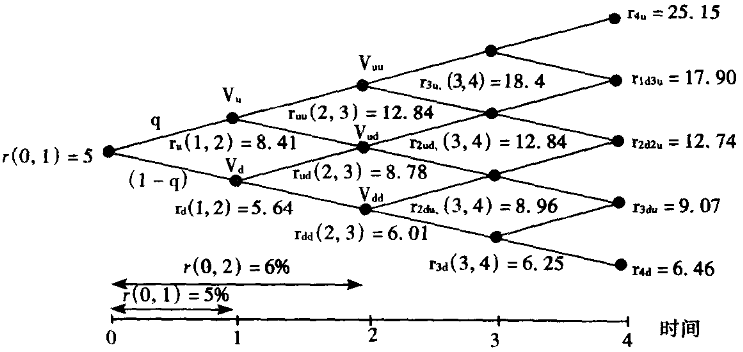


图 18—3　短期利率网格

在图18—3中，网格给出了在这4期中所有可能的单期利率，其中q是价格向上变动的风险中性概率。正如在前面章节中所说明的，当对期权进行定价时，我们可以假定在风险中性世界中，$q=1/2$。那么我们可以导出单期利率向上和向下变动的规模，但要与下面几点相一致：（1）目前所发现的1年期、2年期等即期利率的期限结构；（2）对于这些1年期、2年期等的即期利率的期限结构波动性的经验估计。这可以与在股票期权的BOPM模型中对U和D的计算直接类比。然而，对于利率来说，怎样来计算向上和向下变化的细节稍微有些复杂，我们暂时假设这个网格中所有的单期利率都是已知的。例如V_{uu}（见图18—3）等项表示在这个节点上衍生证券的价值。在附录18.1中我们会介绍在每一个像uu这样的节点上，在$t=2$时，我们不仅知道单期

利率 r_{uu}（2，3），还知道整体的期限结构，即 $r_{uu}(2,4)$、$r_{uu}(2,5)$等，但是后者并没有在图 18—3 的网格中标出。

符号

现在需要将符号简化。在网格（见图 18—3）中最重要的就是沿着横轴的时期 t 的数目和向上以及向下变动的数目。我们可以利用符号 r_{ti}，其中 t 代表时间，i=u，d，uu，dd，ud 等。很明显这是十分笨拙的方法，因此，更通常的情况是用 i 来表示在表中向上变动的次数。这表示在很多情况下我们可以应用下面的这些等价的符号：

$$r_{1d}=r_{10},\ r_{1u}=r_{11}\quad 和\quad r_{2dd}=r_{20},\ r_{2ud}=r_{21},\ r_{2uu}=r_{22}$$

这样的话，当我们应用 r_{ti}时，i 代表了价格向上变化的数目（例如 uu=2，ud=1，dd=0），并且向下变化的次数是给定数目零，从几何上来看，这是水平或者说是平坦的变动（见图 18—4）。所有这些都是与表中各点十分吻合的符号（并且这可以用于计算机编程）。我们用这个符号来表示在每个节点上的单期利率（在更高级的书中这点是广泛应用的）。因此从 $t=0$ 时来看，任何单期的利率，比如像 r_{10}和 r_{11}等就很像单期的远期利率。当然，如果在每一个节点上利率应用的范围比单期要长，比如是这个节点之后的两期$(t,\ i)=(2,\ 1)$，我们就可以将其表示成 $r_{21}(2,4)$。（注意图 18—4 只是图 18—3 在锥形顶点 $r(0,1)$处进行的逆时针旋转。）

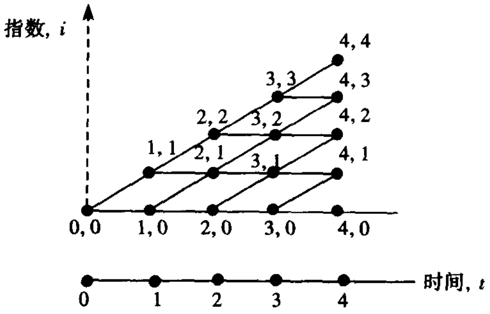


图 18—4　短期利率网格 r_{ti}

利用在图 18—4 的短期利率网格中应用的新符号，我们可以进一步研究无套利方法，包括：

- 说明无套利利润条件；
- 解释在表中如何使利率向上和向下变动的规模与 $t=0$ 时的利率期限结构相一致，以及如何与期限结构的波动率相一致。

短期利率网格和利率的期限结构

这个表的横轴表示的是时间（$=t$），纵轴表示的是向上变动的次数（$=i$）。在每一个节点$(t,\ i)$处，我们规定一个从 t 到$t+1$ 的单期短期利率 $r_{ti}\geqslant 0$（见图 18—4）。从图形上看，这个表实际上是有向上和水平的两种形式，但是标号才是真正重要的。在时间 t 总共有 $t+1$ 个节点，由 $i=0$ 到 t 来标识。很重要的一点就是我们没有规定短期利率的每次“上升”（或是“水平”的）的实际概率。因为我们是在对期权进行定价，因此我们可以假设这是一个风险中性的世界，并且

可以任意规定风险中性概率，为了方便起见，我们把它设为 1/2。

考虑任何一种利率债券（例如一个 3 年期的附息债券），在表中某处的一个节点（t，i）上它的价值是 V_{ti}，利用风险中性概率，V_{ti} 只与它下两个节点处的价值相关（见图 18—4），因此

$$V_{t,i}=\frac{1}{(1+r_{ti})}\left(\frac{1}{2}V_{t+1,i+1}+\frac{1}{2}V_{t+1,i}\right)+D_{t,i} \tag{18.10}$$

其中，$D_{t,i}$ 为在节点（t，i）处的现金流（例如利息的支付），这仅仅取决于 t 和 i（即不是路径依赖型的）。下面我们将要用递推公式来推导出短期利率网格，因此，它与我们所观察到的 1 年期、2 年期等的零息债券到期日的价格一致。

套利机会

这个网格完全没有套利机会吗？答案是肯定的。为了最简单地证明这一点，考虑现在处于节点（t，i）时，在单期的时间内可能出现的套利机会。我们知道

$$V_{t,i}=\frac{1}{2}\left[\frac{V_{t+1,i}+V_{t+1,i+1}}{(1+r_{t,i})}\right] \tag{18.11}$$

在单期内进行套利要求 $V_{t,i}\leqslant 0$ 和 $V_{t+1,i}\geqslant 0$，$V_{t+1,i+1}\geqslant 0$，其中的一个不等式要严格成立。由于括号中所有 V 的系数都为正，因此这是不可能的。所以，在这段时间内不可能进行套利，并且可以推出在更长的时间轴（t，$t+2$），（t，$t+3$）等上，这个结论都是正确的。

包含数据的网格

单期利率的网格必须呈现真实观测到的利率。但是这个“呈现”意味着什么呢？考虑在 1 年末的这个网格（见图 18—3）。首先，在 $t=1$ 时，r_d 和 r_u 之间的价差应该表示所观测到的这些 1 年期利率的波动率。当从 $t=0$ 时起，指的就是在 $t=1$ 到 $t=2$ 这段时间内所观测到的远期利率的波动率，这可以用 σ_{12} 来表示。第二，在网格中（1 年期）的即期利率应该可以复制到 $t=0$ 时观测到的 2 年期、3 年期等的即期利率的期限结构（或是说与其一致）。下面我们来看一下这是怎么实现的。这可以说是简化的 Black - Derman - Toy 或是 **BDT 模型**（1990）。（这是将在下面进行讨论的 Ho-Lee 模型的对数形式）。现在，我们知道目前的即期利率、相应的零息债券的价格（面值是 1 美元，其中 $P_{0,i}=1$ 美元$/(1+r_i)^i$，$i=1, 2, 3$）以及远期利率的隐含波动率。

注意 1 年期债券的价格 $P_{01}=0.9524$ 仅由 1 年期的即期利率 $r=5\%$ 决定。我们的目标是建立一个与这些数据相一致的单期利率的网格（并且沿着这个收益率曲线没有套利机会）。为了做到这些，我们沿着网格向前。首先，我们需要找到 r_d 和 r_u（见图 18—3，下面为了方便，我们去掉了“(1, 2)”的符号）。在 DBT 模型中，假设利率是对数正态分布的，因此

$$\ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right)=2\sigma_{12}\sqrt{\Delta t} \tag{18.12}$$

其中，$\sigma_{12}=20\%$ 为所观察到的 $t=1$ 到 $t=2$ 之间的远期利率的波动率。这里 $\Delta t=1$ 年。因此，正如我们所期待的。σ_{12} 决定了 r_d 和 r_u 之间的差别。一旦我们固定了 r_d，那么 r_u 就由上面的方程所决定。我们根据试算（即递推）确定 r_d，那么，r_d 和 r_u 是与所观测到的 2 年期的即期利率和

债券价格 $P_{02}=0.890\,0$ 是一致的。假设我们任意选定的 $r_d=5.64\%$，那么

$$r_u=e^{2(0.20)(1)}(5.64)=1.49(5.64)=8.41\%$$

因此 $r_u=1.49\,r_d$，并且这两个利率之间的差距是由经验波动率 $\sigma_{12}=20\%$ 所决定的。根据 r_d 和 r_u 的这些试验数据，我们现在可以利用公式（18.10）（其中设 $D_{t,i}=0$）计算出 2 年期零息债券的价格：

$$V_u=\frac{1}{1.084}\left[\frac{1}{2}(1\text{ 美元})+\frac{1}{2}(1\text{ 美元})\right]=0.922\,4 \tag{18.13a}$$

$$V_d=\frac{1}{1.056\,4}\left[\frac{1}{2}(1\text{ 美元})+\frac{1}{2}(1\text{ 美元})\right]=0.946\,6 \tag{18.13b}$$

$$V_0(T=2)=\frac{1}{1.05}\left[\frac{1}{2}(0.924\,4)+\frac{1}{2}(0.946\,6)\right]=0.89 \tag{18.13c}$$

所计算出的 2 年期债券价格 V_0（$T=2$）$=0.89$，等于实际的债券价格 $P_0(T=2)=0.89$。因此，我们最初的猜测 $r_d=5.64$ 与图 18—3 中所观测到的 2 年期的即期利率是一致的。如果我们发现 $V_0(T=2)$ 不等于 $P_0(T=2)$，那么就要对 r_d 采用另外一个试验数值。实际操作中，我们拥有两个方程即公式(18.12)和公式(18.13c)以及两个未知数(r_d 和 r_u)，一般说来这可以利用递推方法(比如说 Newton - Raphson 方法)解出来(或通过如 Excel 中“solver”解法得到)。得到 r_d 和 r_u 之后，我们就可以沿着这个网格继续前进了，因此

$$r_{ud}=r_{dd}\,e^{2\sigma_{23}\sqrt{\Delta t}} \tag{18.14a}$$

和

$$r_{uu}=r_{ud}\,e^{2\sigma_{23}\sqrt{\Delta t}} \tag{18.14b}$$

因此

$$r_{uu}=r_{dd}e^{4\sigma_{23}\sqrt{\Delta t}} \tag{18.14c}$$

一旦我们固定了 r_{dd}，那么我们就可以通过在公式(18.14a)和公式(18.14b)中使 $\sigma_{23}=19\%$ 来决定 r_{ud} 和 r_{uu}。然后，我们随意选择一个 r_{dd} 的数值，利用这个网格通过使用从 $t=2$ 开始的递推公式，计算出 3 年期附息债券的价值 $V_0(T=3)$(其中 r_d 和 r_u 是已知的)。我们改变 r_{dd}，直到 $V_0(T=3)$ 等于 3 年期零息债券的实际价格，比如说是 $P_0(T=3)=0.816\,3$。那么我们的(单期)利率网格就与表 18—1 中的最初的利率期限结构(5%，6%，7%)和远期波动率(20%，19%)是一致的。图 18—3 给出了最终得到的“无套利”网格。如果给定了 $t=0$ 时 4 年期、5 年期等零息债券的即期利率和波动率，我们就可以直接将这个网格扩展到 $t=3$ 之后。上面，对于每个 1 年期、2 年期的债券，我们必须通过这个网格得到一列独立的向后递推的数列，并且经过精密的计算。然而，利用向前的递推，我们每次仅“扫过”网格一次，从而计算所有的单期即期利率也是可能的。(参见 Clewlow 和 Strickland，1998，第 5 章以及我们的网站中所提供的内容)。

表 18—1　　**初始期限结构（即期利率和波动率）**

	即期利率（r_i）	债券价格（P_i）	远期利率波动率（σ_{ij}）
第 1 年	5%	0.952 4	$\sigma_{12}=20\%$
第 2 年	6%	0.890 0	$\sigma_{23}=19\%$
第 3 年	7%	0.816 3	$\sigma_{34}=18\%$
第 4 年	8%	0.735 0	$\sigma_{45}=17\%$
第 5 年	9%	0.649 9	

18.3 对利率衍生证券定价：附息债券

考虑利用图 18—3 中的单期利率网格（它是表 18—2 的复制）来对一个 5 年期、10%息票利率、面值为 100 美元的债券进行定价。

表 18—2 **短期利率网格**

向上变动的次数					
4					25.15
3				18.40	17.90
2			12.84	12.84	12.74
1		8.41	8.78	8.96	9.07
0	5.00	5.64	6.01	6.25	6.46
时间	0	1	2	3	4

我们知道，在 $T=5$ 时的收益是最终的息票支付 10 美元加上本金 100 美元，在 $T=5$ 时每个节点上总的支付都是 110 美元（见表 18—3）。为了对这个附息债券进行定价，我们现在简单地通过网格递推计算。例如在节点$(t, i)=(4, 4)$上债券的价格是

$$V_{4,4}=\frac{(1/2)110\text{ 美元}+(1/2)110\text{ 美元}}{(1+0.2515)}=97.90(\text{美元})$$

通过沿着网格往回计算，最终得到这个 5 年期附息债券目前的价值 $P_{00}=105.43$（每 100 名义美元）。

我们可以利用无套利利率网格和 BOPM 对其他一些利率衍生证券进行定价，比如关于长期国债、长期国债期货和欧洲美元期货的欧式和美式期权。由于这样的网格提供了利率的整体期限结构（因此也可以得到远期利率），它保证我们可以在期权合约的到期日（$=T$）对每个节点上的标的工具进行定价。在 T 时刻，我们可以确定衍生证券在网格每个节点上的收益。例如对于看涨期权，在到期日 $T=2$ 时，$V_i=\max\{Z_i-K, 0\}(i=\text{uu}, \text{ud}, \text{dd})$。对于长期国债期权，$Z_i$=在期权合约到期日可能出现的债券价格，对于债券期货的期权或是欧洲美元的期权，Z_i=在期权合约的到期日 $t=T$ 时每个节点上的期货价格。得到期权在到期日 T 的收益之后，我们可以再通过利率网格往回计算，利用风险中性概率并且以适当的单期利率进行折现，这样就可以得到 $t=0$ 的期权的价值。一些简单的例子可以解释清楚这个过程。

表 18—3 **对一个 10%的息票利率、5 年期的名义本金为 100 美元的债券定价**

向上变动的次数						
5						110
4					97.9	110
3				94.9	103.3	110
2			97.9	103.4	107.6	110
1		105.1	108.2	110.2	110.85	110
0	105.4	116.3	116.5	115.5	113.33	110
时间	0	1	2	3	4	5

附息债券的期权

下面的例子考虑了一个标的于上述附息债券的欧式期权的定价过程，这个期权的执行价格是 $K=110$ 美元，在 $T=4$ 年后到期。表 18—3 给出了 $t=4$ 时这个附息债券在每个节点上的价值。看涨期权在每个节点上的收益是

$$\text{看涨期权的收益}(t=4)=\max(0, P_i^B-110)$$

这些通过表 18—4 中 $T=4$ 时的记录{0，0，0，0.85，3.33}给出。这个债券的看涨期权在例如（3，0）这样节点上的价值由通常的公式给出，并用单期利率（见表 18—2）来对结果折现。例如：

$$V_{30}=\frac{(1/2)\ 0.85+\ (1/2)\ 3.33}{(1+0.0625)}=1.967\ (\text{美元})$$

表 18—4　　**关于 5 年期附息债券的欧式看涨期权**

向上变动的次数					
4					0
3				0	0
2			0	0	0
1		0.083	0.179	0.390	0.85
0	0.330 4	0.611	1.111	1.967	3.33
时间	0	1	2	3	4

其他节点也可以用类似的方法进行计算，我们可以看到 4 年期、执行价格为 $K=110$ 美元的欧式看涨期权（标的于 5 年期债券）的价值是 $V_{00}=0.3304$（每 100 美元的名义本金）。

为了对标的于债券的**美式看涨期权**定价，我们仅仅需要在每个节点上比较期权的内涵价值 $IV_i=\max(0,\ P_i^B-K)$和由上面的递推公式给出的看涨期权的价值 $V_{t,i}$。如果内涵价值超过看涨期权的递推价值，那么提前执行是有利可图的，$V_{t,i}$ 可以用 P_i^B-K 来代替。例如，在节点（3，0）上，看涨期权的递推的价值是 $V_{30}=1.967$（见表 18—5），同时内涵价值是 $P_{30}^B-K=115.5-110=5.5$。因此在节点（3，0）上，我们用内涵价值 5.5 来代替 1.967，这就是表 18—5 中方括号内的项。

表 18—5　　**关于 5 年期附息债券的美式看涨期权**

$K=110$ 美元，$T=4$，每 100 美元名义本金的看涨期权价格

向上变动的次数					
4				0	0
3				0	0
2			0	0	0

续前表

$K=110$ 美元，$T=4$，每 100 美元名义本金的看涨期权价格

向上变动的次数					
1		0.082 [0.0]	0.178 8 [0.0]	0.389 7 [2.30]	0.85
0	3.039 [0.0]	3.136 [6.34]	2.771 6 [6.47]	1.967 [5.50]	3.33
时间	0	1	2	3	4

注：(1) 在 $T=4$ 的收益是 max（0，P_i^B-K），这对于欧式期权和美式期权是相同的。

(2) 在 $T-1$ 的每个节点上，我们可以计算出递推的价值 $V_i=[(1/2)V_u+(1/2)V_d]/(1+r_i)$。内涵价值 $IV_i=\max(P_i^B-K, 0)$。这个内涵价值由方括号中的内容给出，如果 $IV_i>V_i$，那么我们就可以在网格中用 V_i 来代替 IV_i（否则我们还是保留 V_i），然后我们可以计算出在 $T-2$ 时的 V_i，这是在 $T=3$ 时，IV_i 与 V_i 中的较大的那一个，然后在$T=2$的节点上重复 $IV_i>V_i$ 的过程。

在节点（3，1）上，内涵价值 $P_i^B-K=2.3$ 要比递推得出的看涨期权的价值0.389 7大，因此我们在这个表中用 2.3 这个值。所以在节点（2，0）上，不考虑提前执行，看涨期权新的递推价值是 $V_{20}=2.77=[(1/2)5.5+(1/2)2.3]$（见表 18—5）。但是在节点（2，0）上，内涵价值是 $P_{20}^B-K=116.5-110=6.5$（6.47 经过四舍五入），因此在表中要用来代替 2.77。因此，在考虑下一组节点之前，就可以计算出在每个节点上提前执行的概率。可以得到美式期权的价值是 $V_{00}=3.039$（见表 18—5）当然，这必须保证它至少比欧式期权的价值 0.330 4 大（见表 18—4）。

可赎回债券

可赎回债券是一类发行者可以在债券有效期内的某个时间以一个固定的价格购回的债券，我们在这里假设，一个 5 年期的债券可以在 1 年至 4 年中的任何一年赎回。如果你是一个持有可赎回债券的投资者，那么这就类似于持有一个常规的债券，但是同时还出售了一个标的于这个债券的隐含的美式看涨期权（由债券的发行者持有）。如果发行者决定买回债券，那么投资者就得到这个债券的面值，再加上应计的利息。债券的面值就等于这份隐含的看涨期权的执行价格。因此我们预期：

常规债券的价值＋出售的看涨期权的价值＝可赎回债券的价值

一般说来，如果债券的到期收益率低于息票利率，那么债券的发行者就会赎回债券。如果发行者愿意，他可以以更低的到期收益率再发行新的债券。赎回债券的等价条件是如果当前债券的价值比债券到期的价值/面值 M（加上任何累计的应计利息）高。因此：

赎回债券的条件：V_i^B(递推)$>M+C$，那么我们可以在网格中用 $M+C$ 来代替 V_i^B（递推）。

然后通过常用的方法，我们沿着网格递推计算，折现这些收益，但是在每个节点处要应用上

面的条件。我们由 $T=4$ 的债券价格开始，其中 $T=4$ 是债券可以赎回的最后一年(见表 18—3)。在节点(4，0)和(4，1)处，债券价格是 V_t^B(递推)=113.3 和 110.8，它们都比 110 大，因此在这些节点上，债券都要被赎回，因此在表 18—6 中节点(4，0)和(4，1)的记录都是 110。在表 18—3 中的节点(4，2)、(4，3)和(4，4)上，V_t^B(递推)<110，因此在表 18—6 中，对于可赎回债券我们将继续使用这些数值。在表 18—6 中的节点(3,0)，V_{30}^B(递推)=[(1/2)110+(1/2)110]/1.0625+10=113.5，它大于 110，因此债券将要被赎回，在这个节点上我们使用 110。在表 18—2 中的下半部分，短期利率比息票利率 10%低，因此，表 18—6 中递推的债券价格比 $M+C$ 大，因此债券在节点(1，0)、(2，0)、(3，0)、(4，0)和(4，1)上被赎回，所以在这些节点上我们记录 110。在这个网格中的其他节点上，记录是 V_t^B(递推)。通过这个网格向后计算，我们得到 $t=0$ 时 V_t^B(可赎回)=102.4。从表 18—3 中，我们得到 V_t^B(常规)=105.4，同时我们从表 18—5 中得到“看涨期权(美式)价值”=3.0。因此：

常规债券的价值+出售的看涨期权的价值=可赎回债券的价值

105.4+(−3.0)=102.4

对于我们考虑过的三个网格中的所有节点，上面的关系都是成立的。

表 18—6　　**对 5 年期的可赎回债券的定价**

向上变动的数目					
4					97.9
3				94.9	103.3
2			97.9	103.4	107.6
1		104.9	108.0	109.8	110
0	102.4	110	110	110	110
时间	0	1	2	3	4

注：债券只有在 1 年至 4 年中可赎回。

利率上限的定价

为了对利率上限定价，我们首先要对上限期权进行定价。考虑每 1 美元名义本金的单期($T=1$) 上限期权。利率上限的收益在 $t=1$ 时就被确定，但是在 $t=2$ 时才得到支付。因此，如果上限期权的执行价格是 $K=5\%$ (见图 18—3)，那么在 $t=1$ 时上限期权的价值是

$$V_u=\frac{\max\{0,r_u(1,2)-K\}}{[1+r_u(1,2)]}=\frac{8.41-5.0}{1.084}=3.1457 \qquad (18.15a)$$

以及

$$V_d=\frac{\max\{0,r_d(1,2)-K\}}{[1+r_d(1,2)]}=\frac{5.64-5.0}{1.0564}=0.6058 \qquad (18.15b)$$

因此利用 BOPM 往后递推得到

$$V_0=\frac{qV_u+(1-q)V_d}{[1+r(0,1)]}=\frac{(1/2)3.145\,7+(1/2)0.605\,8}{[1+0.05]} \tag{18.15c}$$

其中，q（$=1/2$）为价格向上变动的风险中性概率。这里我们使用了与 BOPM 在股票的应用中非常类似的原理，惟一的不同是折现率是不确定的。这些折现率取决于在每一个存在两种可能性的节点上 r（1，2）的值（在 $t=1$ 时），并且取决于目前的单期利率 r（0，1）。这个单期上限期权的价格是0.017 88（每 1 美元的名义价值），也就是说价格大约是本金的 1.8%。如果上限期权的本金是 $Q=100\,000$美元，那么这个上限期权的价格就是 1 788 美元。

对于一个两期的上限期权（其中现金支付在 $t=3$ 时进行）的定价是很简单的，一旦我们知道了 V_{uu}、V_{ud}和 V_{dd}，它们的值由下面方程给出：

$$V_i=\frac{\max\{0,r_i(2,3)-K\}}{[1+r_i(2,3)]} \tag{18.16}$$

其中，对于 $t=2$ 时这三个节点的每一个，$i=$uu 或 ud 或 dd（见图 18—3）。在 $t=2$ 时相对于 $K=5\%$的三次支付，由 $\max(0,r_i(2,3)-K)=(7.78,3.78,1.01)$给出，其中分别有 $V_i=$（6.95，3.48，0.95）。然后我们往回计算得到：

$$V_u=\frac{[qV_{uu}+(1-q)V_{ud}]}{[1+r_u(1,2)]}=\frac{(1/2)6.95+(1/2)3.48}{1.084\,1}=0.048\,099 \tag{18.17a}$$

$$V_d=\frac{[qV_{ud}+(1-q)V_{dd}]}{[1+r_d(1,2)]}=\frac{(1/2)3.48+(1/2)0.95}{1.056\,4}=0.020\,956 \tag{18.17b}$$

那么上限期权的价格是

$$V_0=\frac{[qV_u+(1-q)V_d]}{[1+r(0,1)]}=\frac{(1/2)0.048\,099+(1/2)0.020\,956}{1.05}=0.032\,88 \tag{18.18}$$

注意，尽管上面的表达式看上去很复杂，但是对于一个两期的上限期权来说，价格 V_0 仅仅取决于在网格中一直到 $T=2$ 的所有单期利率（以及假设 $q=1/2$）。我们得到单期上限期权和两期上限期权的价格分别是0.017 88和0.032 88，那么一个包括在 $T=1$ 和 $T=2$ 时到期的上限期权（它们的现金支付分别是在 $t=2$ 和 $t=3$）的**利率上限的价格**（每 1 美元的名义价值）将会是 0.050 76($=0.017\,88+0.032\,88$)，即两个上限期权的价格之和。对**欧式下限期权**定价的过程与上面类似，只是在每个节点处的收益是 $\max(0,K-r_i)/(1+r_i)$。

假设我们将要对一个 4 年期的**美式上限期权**定价，同样我们应该通过利率网格往回计算。在 $t=3$的所有节点上，我们先计算出“递推”价值 $V_{ti}=[(1/2)V_{t+1,i+1}+(1/2)V_{t+1,i}]/(1+r_{t,i})$，以及在每个节点上的内涵价值 $IV_{t,i}=(r_{t,i}-K)/(1+r_{t,i})$。如果在任何一个节点上 $IV_{t,i}$超过了 $V_{t,i}$，那么就要在这个节点上用 $IV_{t,i}$来代替 $V_{t,i}$。因为在这个节点上执行期权是更划算的。然后我们对于 $t=2$ 重复上面的过程，在这个网格中对于 $t=1$ 和 $t=0$ 往回计算（因为可能它是值得立即执行的）。在 $t=0$ 处，这个网格的记录就是美式上限期权的价值。因此 BOPM 可以用于计算**路径依赖型**的利率衍生证券。

对 FRA 定价

FRA 的支付取决于在到期日利率 r_i 的实际值与在 $t=0$ 时商定的 FRA 利率（我们用 r_{FRA}来表

示）之间的差别。这里，为了使符号简化，我们假设 FRA 利率是一个年利率，因此收益是（$r_i - r_{FRA}$）。假设 FRA 在 $T=2$ 年到期，并且它的名义本金是 1 美元。那么这个 FRA 的公平价格是能保证 FRA 收益的预期价值为零的 r_{FRA} 的值，这是从 $t=0$ 时来看的。我们如何计算这个期望值呢？

再想想第 8 章中提到的 BOPM，遵从某一条特定路径的概率是 $q^k(1-q)^{n-k}$，其中 n 是网格中的时期，k 是价格向上变化的次数。例如，沿着路径 UD 的概率是 $q^1(1-q)^1$，可以达到节点 UD 的路径的个数可以通过二项式分布的系数 $\binom{n}{k}$ 给出。因此对于 $n=2$，我们可以达到 UD 的方法有 $\binom{2}{1}=2$ 种。（即从 U 到 D 或从 D 到 U）。因此，在 n 期内发生 k 次价格上升的总的概率可以由一个二项式概率给出：$q_i^n=\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}$，其中 $i=$uu，ud，dd，并且分别与 $k=2$，1，0 相对应。例如，对于 $q=0.5$，达到节点 UD 的概率（即在第 2 步之后，$k=1$ 次价格向上的变动）就是 $q_{ud}^2=0.5[=(2!/1!\ 1!)(0.5)(0.5)]$。类似地，$q_{uu}^2=0.25$，$q_{dd}^2=0.25$。当我们将一个 FRA 的收益（现金支付要延迟到 $T=2$ 时）的预期价值设为零时（见图 18—3 和表 18—2）就有下面的结果。

预期收益：1×2 FRA

$$q_{uu}^n(r_{uu}-r_{FRA})+q_{ud}^n(r_{ud}-r_{FRA})+q_{dd}^n(r_{dd}-r_{FRA})=0 \tag{18.19}$$

$$0.25(12.84-r_{FRA})+0.5(8.78-r_{FRA})+0.25(6.01-r_{FRA})=0$$

惟一未知的就是 r_{FRA}，并且很容易得到结果（注意所有的概率之和是 1）：

$$r_{FRA}=\sum_i q_i^n r_i=9.1044 \quad 其中 \quad n=2,\ i=\text{uu, ud, dd} \tag{18.20}$$

因此公平的 FRA 利率是在 FRA 合约的到期日所有可能的单期利率的期望价值。如果 FRA 的收益是在 $T=2$ 时发生，但是支付要一直到 $T=3$ 时才发生（有时我们称之为延迟结算的 FRA），那么我们得到

$$q_{uu}^n(r_{uu}-r_{FRA})(1+r_{uu})^{-1}+q_{ud}^n(r_{ud}-r_{FRA})(1+r_{ud})^{-1}+q_{dd}^n(r_{dd}-r_{FRA})(1+r_{dd})^{-1}=0$$

利用在图 18—3 中的 $t=2$ 时的短期利率，我们可以得到延迟支付的 r_{FRA} 的结果：

$$r_{FRA}^{\text{迟延支付}}=\frac{\sum_i q_i^n r_i/(1+r_i)}{\sum_i q_i^n/(1+r_i)}=0.0905(9.05\%) \tag{18.21}$$

其中　$n=2$，$i=$uu，ud，dd

另外，FRA 的价格是在 FRA 的到期日利率网格中所有短期利率按照概率加权的平均值。很明显，我们可以非常容易地将上面的过程扩展到在网格中任何时刻进行支付的 FRA（实际支付延迟到不同的时期不会引起任何问题）。

互换期权的定价

考虑一个互换期权，它的到期日是 $T=2$，并且是“支付固定，收到浮动”的互换，互换的执行利率是 $K\%$，互换的到期时间等于 2 年（在 $T=2$ 时开始计算）。这是一个支付者互换期权。

我们如何在 $t=0$ 时对这个互换期权进行定价呢？关键的因素是在 $t=2$ 的三个节点上得到这个互换期权的收益的价值$\{V_{uu}, V_{ud}, V_{dd}\}$。那么我们所需要做的就是利用 BOPM 往回递推。具体步骤如下（见图 18—3）。

第一步

$t=2$ 时，在三个节点($i=$uu，ud，dd)中的每个节点上，给定那个节点上利率的期限结构（参考前面的章节），我们计算这个 2 年期互换的息票利率 cp（%）：

$$cp_i(T=2)=[1-1/\{1+r_i(2,4)\}^2]\mathrm{AN}_{2-4}$$

$$\mathrm{AN}_{2-4}=\left[\frac{1}{[1+r_i(2,3)]}+\frac{1}{[1+r_i(2,4)]^2}\right]$$

其中，$i=$uu，ud 和 dd。AN 是在互换的生命期即 $t=3$ 和 $t=4$ 支付的 1 美元的年金的价值。与我们前面关于远期互换的讨论相比，前面应用的是远期利率，而这里我们应用的是网格中的单期利率。现在，在 $T=2$ 时，这个息票互换利率有三种可能的价值：cp_{uu}，cp_{ud}，cp_{dd}。

第二步

在 $T=2$ 时，每个节点上互换期权的收益取决于这个 2 年期的年金的价值 $\max\{0, cp_i-K\}$。因此

$$V_i=\max\{0, cp_i-K\}\mathrm{AN}_{2-4}$$

现在我们知道在 $T=2$ 即到期日时，互换期权的价值为 V_{uu}，V_{ud}，V_{dd}。注意 V_i 仅仅取决于 $r_i(2,3)$和 $r_i(2,4)$(当然还有 K)，即取决于从 $t=2$ 到期权的到期日 $t=4$ 之间的利率期限结构。这个结果很好，因为在每一个节点 i 上，我们可以从网格中的单期利率得到整体的利率期限结构(参见附录 18.1)。

第三步

下面就是直接通过一般的 BOPM 来对互换期权进行定价。给定了 V_i 之后（$i=$uu，ud，dd)，我们通过常规的公式（18.13）来计算 V_u，V_d，和 V_0。互换期权 V_0 的价格是关于每 1 美元的名义本金。例如，如果 $V_0=0.0140$（即互换中名义本金的 1.4%)，互换中的名义本金是 1 000万美元，那么价格就是140 000美元。

注意，当我们利用 BOPM 对上限期权进行定价的时候，我们只需要得到网格中一系列单期的利率。但是为了对互换期权进行定价，我们需要知道在每个节点上整体的利率期限结构（即直到期权标的的互换到期)，原因就是互换有多期的现金流。

对 FRN 的利率上限和利率下限进行定价

普通的在 T 时刻到期的 FRN 在每一个重置日期（我们假设是在网格中的每一个节点上）都要回归面值（$=100$)。这是因为在 T 时刻 FRN 的收益是本金 $Q=100$ 美元加上浮动的利息($100r_i$ 美元)。在折现到 $T-1$ 期时为$(100+100r_i)/(1+r_i)=100$ 美元。FRN 中的浮动利率可能会高于表 18—2 的网格中的无风险单期利率，这是因为可能有流动性风险和交易对手的信用风

险。或是简单地解释为 FRN 定价时的利率与我们的短期利率网格中的利率不同。这个差额可能是 25 个基本点的量级。然而，我们将会假设这个差额是零，并且继续利用我们最初的短期利率网格来对具有一个隐含期权的 FRN 进行定价。

假设我们考虑一个 5 年期的 FRN，它具有 $K_{cap}=16\%$ 的浮动利率上限。如果短期利率上升到 K_{cap} 之上，那么在重置日期（即节点上）这个持有 FRN 的投资者就只能收到 $K_{cap}=16\%$，而不是相对更高的市场利率。因此，FRN 的价值就会小于它的面值 100 美元（在这个节点上）。有利率上限的 FRN 等价于一个标准的 FRN 再加上一个隐含利率上限的空头。这是因为当利率上升到这个利率上限之上的时候，FRN 的持有者失去了基于“高”的市场利率的收益，这等价于一个关于 LIBOR 的利率上限的空头。如果利率要比 $K_{cap}=16\%$ 低，那么一个利率上限的多头就处于虚值状态，那么 FRN 的持有者就收到了当前的（低）利率。在到期日（$T=5$），FRN 在所有的节点上的价值都是 100 美元。现在考虑 $t=4$ 时有利率上限的 FRN 网格中的每个节点。对于有利率上限的 FRN，我们得到：

如果 $r_i>K_{cap}$：

得到息票$=100$（K_{cap}）美元；

有利率上限的 FRN 的价值是 $V_i^{cap}-\text{FRN}=[100(1+K_{cap})]/(1+r_i)$ 美元。

如果 $r_i\leqslant K_{cap}$：

得到息票＝（r_iK_{cap}），因此 $V_i^{cap}-\text{FRN}=100$ 美元

在节点（4，4）处，$r_i=25.1$（见表 18—2），它要比 $K_{cap}=16\%$ 大，因此 $V_i^{cap-FRN}=[100$ 美元$(1+K_{cap})]/(1+r_i)=92.7$（见表 18—7）。同样，在节点（4，3）上，$r_i>K_{cap}$，并且 $V_i^{cap-FRN}=98.4$。在节点（4，0）、（4，1）和（4，2）上，我们都有 $r_i<16\%$（见表 18—2），因此 FRN 的价值是 100 美元。在节点 $t=3$ 上，我们计算出的 FRN 的递推价值是 $V_{3,i}^{递推}=[(1/2)V_{4,i+1}+(1/2)V_{4,i}]/(1+r_{3,i})$，这没有包括任何的利息支付。然后我们来看一下在这个节点上利率上限关于息票支付是否有效。

在 $t=3$，如果 $r_i>K$，那么

$$V_{3,i}^{cap-FRN}=V_{3,i}^{递推}+K(100\text{ 美元})/(1+r_i)$$

在 $t=3$，如果 $r_i<K$，那么

$$V_{3,i}^{cap-FRN}=V_{3,i}^{递推}+100\text{ 美元}[r_i/(1+r_i)]$$

例如在节点（3，3）处，$r_{33}=18.4>K_{cap}=16\%$，因此（见表 18—7）

$$V_{33}^{cap-FRN}=\frac{(1/2)92.7+(1/2)98.4}{(1.184)}+\frac{16}{1.184}=94.2$$

在节点（3，2）处，$r_{32}=12.8<K_{cap}=16\%$，因此（见表 18—7）

$$V_{32}^{cap-FRN}=\frac{(1/2)98.4+(1/2)100}{(1.128\,4)}+\frac{12.84}{1.284}=99.3$$

我们沿着利率网格往回计算就可以得到在 $t=0$ 时的具有利率上限的 FRN 的价值是 99.22。因此这个隐含的利率上限（多头）的价值就必须等于 100－99.22＝0.78。

表 18—7　　对于一个 5 年期的具有利率上限的 FRN 进行定价

上限利率 $K_{cap}=16\%$

向上的次数					
4					92.7
3				94.2	98.4
2			97.1	99.3	100
1		98.5	99.6	100	100
0	99.22	99.8	100	100	100
时间	0	1	2	3	4

通过类似的过程我们可以对具有一个隐含的利率下限的 FRN 进行定价，$K_{FL}=8\%$。如果在 $t=4$时 $r_i<K_{FL}$，那么这个 FRN 的持有者就可以得到 $100K_{FL}$美元的息票支付，并且 FRN 的价值是高于面值的：$V_i=100$ 美元$(1+K_{FL})/(1+r_i)$。这些在表 18—2 中节点(1,0)、(2,0)、(3,0)、(4,0)上成立，因此在表 18—8 中的这些节点上，V^{fl-FRN}的价值是高于面值的。如果 $r_i>K_{FL}$，那么 FRN 的持有者就可以收到一个等于市场利率的息票支付，那么 FRN 的价值就等于面值（见表 18—8），“具有利率下限的 FRN”等价于一个标准的 FRN 再附带一个隐含的关于 LIBOR 的看跌期权的多头。在网格中往回计算，就可以得到在 $t=0$ 时具有利率下限的 FRN 的价值是 104.59，并且这个隐含的看跌期权的价值是 4.59。

隐含的看跌期权的价值＝具有利率下限的 FRN 的价值－纯粹的 FRN 的价值

4.59＝104.59－100

表 18—8　　对于一个 5 年期的具有利率下限的 FRN 进行定价

下限利率 $K_{fc}=8\%$

向上的次数					
4					100
3				100	100
2			100	100	100
1		100	100	100	100
0	104.59	103.6	102.9	102.3	101.1
时间	0	1	2	3	4

表 18—9 中给出了一个具有利率双限的 FRN 的价值，利率上限是 16%，利率下限是 8%。在每一个节点上的记录或者是标准 FRN 的面值，或者是具有利率上限或利率下限的 FRN。沿着网格往回计算，在 $t=0$ 时的利率双限 FRN 的价值是 103.81。无疑我们得到：

> **利率双限 FRN 的价值＝纯粹的 FRN 的价值＋看涨期权空头的价值＋看跌期权多头的价值**
>
> $$103.81=100+(-0.78)+4.59$$

这就完成了一系列的例子，其中我们应用了无套利短期利率网格和 BOPM 来对很多种依赖于利率未来路径的证券定价。这种方法非常灵活，可以处理很多种路径依赖型利率期权。

表 18—9　　对于一个 5 年期的具有利率双限的 FRN 进行定价

上限利率 $K_{cap}=16\%$

下限利率 $K_{fl}=8\%$

向上的次数					
4					92.7
3				94.2	98.4
2			97.1	99.3	100
1		98.5	99.6	100	100
0	103.81	103.6	102.9	102.3	101.4
时间	0	1	2	3	4

完全的期限结构

在衍生证券的短期利率网格中，最关键的因素就是，我们要在 $t=T$ 的所有节点上，知道一个给定到期日的债券的期末价格。我们把它看做是一个面值为 1 美元的债券。我们可以利用这个信息在网格的每一个节点上来推导整体利率期限结构。我们知道一个两期的债券在 $t=2$ 时支付 1 美元，无论我们处在哪一个节点 (2，i)。在前两个节点 (1，0) 和 (1，1) 上，即 $t=1$ 时债券的价格是：

$$V_{10}(T=2)=\frac{1}{(1+r_{10})}\left(\frac{1}{2}1\text{ 美元}+\frac{1}{2}1\text{ 美元}\right)=\frac{1}{1+r_{10}} \tag{18.22a}$$

$$V_{11}(T=2)=\frac{1}{(1+r_{11})}\left(\frac{1}{2}1\text{ 美元}+\frac{1}{2}1\text{ 美元}\right)=\frac{1}{1+r_{11}} \tag{18.22b}$$

往回计算一个时期得到

$$V_{00}(T=2)=\frac{(1/2)V_{10}+(1/2)V_{11}}{(1+r_{00})}=\frac{1}{2(1+r_{00})(1+r_{10})}+\frac{1}{2(1+r_{00})(1+r_{11})} \tag{18.22c}$$

假设我们通过公式(18.19)计算出 $V_{00}(T=2)$，这就意味着在节点(0，0)上，2 年的即期利率

$r_{00}(0, 2)$由下式给出：

$$[1+r_{00}(0,2)^2]=1\text{ 美元}/V_{00}(2) \tag{18.23}$$

然后我们“调整”r_{10}和r_{11}，使$r_{00}(0, 2)$或是等价地使债券价格$V_{00}(2)$等于它们所观测到的价值。注意到在节点(0，0)上，这个两期的即期利率仅仅取决于到节点$t=1$为止的单期利率。即$r_{00}(0, 2)=f(r_{00}, r_{10}, r_{11})$。通过选择$V(T=3)$等于1美元，我们可以重复相同的过程来保证所计算出的$t=0$时的3年期的债券的价值和它相对应的即期利率$[1+r_{00}(0,3)]3=1/V_{00}(3)$等于它们实际所观察到的结果。我们可以发现$r_{00}(0, 3)$取决于到$t=2$时为止的所有的单期即期利率，即$r_{00}(0, 3)=f(r_{00}, r_{10}, r_{11}, r_{20}, r_{21}, r_{22})$。

通过上面的递推方法，最终结束时的短期利率网格与$t=0$时所观察到的收益率曲线（以及所观察到的远期利率的波动率）相一致。在点（0，0）上进行计算后，我们就可以假设我们现在处于网格上的点（1，0)，并且以这点开始重复计算全部过程。这导致了一系列从点（1，0）开始的即期利率，也就是说$r_{00}(1, 2)$、$r_{00}(1, 3)$，…。同样，我们可以在网格中的每个节点进行计算，因此对于网格中的每一个节点，我们可以得到一列完整的即期利率。这样我们就可以在每个节点上得到整体的利率期限结构，它们仅仅是基于单期利率r_{ti}的。

我们在上面运用BDT模型推导单期利率的过程中所用到的关系如下：

$$\ln r_{ts}=at+bts \qquad s=0,\ 1,\ \cdots,\ t$$

其中，$bt=2\sigma_t\sqrt{\Delta t}$，$\sigma_t$为在$t$到$t+1$这段时间内所观测到的单期远期利率的波动率。时间步长是$\Delta t=1$（年)。下面考虑如何使上面的递推方法变得更清晰一些，这样我们就可以有办法来设计一个通用的计算机算法来产生这个单期的利率网格。我们将要在模型中采用**Ho－Lee模型**(1986)（这是BDT模型的线性形式，因此这个网格很容易用于这个框架)。在Ho－Lee模型中，网格是根据

$$r_{ts}=a_t+b_ts$$

变化的。其中$t=0$，1，…，n期，在任何时间t，$s=0$，1，…，t。如果我们确定了a_t和b_t（对于所有的t)，那么我们就可以构建这个完整的网格。我们沿着水平时间轴移动，那么$s=0$，因此$r_{00}=a_0$，$r_{10}=a_1$，等等，因此a_t就是在保持状态$s=0$的情况下r关于时间的总漂移的量度。现在保持t是固定的，比如说$t=4$，考虑一个在任何两个相邻的状态之间的变动，比如说$s=1$和$s=2$，那么

$$r_{41}=a_4+b_4(1) \quad \text{并且} \quad r_{42}=a_4+b_4(2)$$

因此在任何两个相邻的节点（在任何给定的时间中）之间的差别就是$r_{42}-r_{41}=b_4$。因此b_4就是“价差”或是波动率参数，那么我们应该如何选择b_t呢？在Ho－Lee模型中，我们知道$b_t=2\sigma_t\sqrt{\Delta t}$，其中$\Delta t=1$，并且$\sigma_t$是所观察到的远期利率的波动率。例如，如果我们假设1年的时间段，并且通过经验我们发现$\sigma_4=0.01$/年（即1%/年)，那么$b_4=0.02$。

那么a_t呢？我们选择a_t要使在$t=0$时由我们的网格所推导出的即期利率的期限结构等于在$t=0$时实际观测到的即期利率。为了说明这是怎样计算的，我们注意到在$t=0$时，我们可以观测到所有的即期利率的价值：$r_{00}(0, 1)$、$r_{00}(0, 2)$、$r_{00}(0, 3)$…。现在我们可以进而计算a_t的价值，以a_0开始：

$$r_{00}(0,1)=a_0+b_0(0)=a_0 \tag{18.24a}$$

因此，我们使a_0等于所观测到的1年期的利率r_{00}（0，1)。现在在$t=1$处：

$$r_{10}=a_1+b_1(0)=a_1 \tag{18.24b}$$

并且

$$r_{11}=a_1+b_1(1)=a_1+2(\sigma_{12}) \tag{18.24c}$$

其中，σ_{12}为我们已知的所观测到的远期利率的波动率。我们在前面已经发现两期的即期利率 r_{00}（0，2）仅仅取决于 r_{00}，r_{10}，r_{11}，更复杂的方法可以参见公式（18.20），因此，利用公式（18.24），我们发现

$$r_{00}(0,2)=f(r_{00},r_{10},r_{11})=g(a_0,a_1,\sigma_{12}) \tag{18.24d}$$

其中，f 和 g 为括号内的变量或是参数的函数。参数 a_1 是公式（18.24d）中惟一的未知数。因此我们现在可以找出一个 a_1 的价值使它能保证网格可以“复制”2 年期的即期利率 r_{00}（0，2）的观测值。我们可以对 $t=2$ 处的三个节点重复这个过程，得到：

$$r_{20}=a_2+b_2(0)=a_2 \tag{18.25a}$$

$$r_{21}=a_2+b_2(1)=a_2+(2\sigma_{23}) \tag{18.25b}$$

$$r_{22}=a_2+b_2(2)=a_2+(4\sigma_{23}) \tag{18.25c}$$

再者，由于 $r_{00}(0,3)$取决于到 $t=2$ 时为止的所有的单期利率，那么 $r_{00}(0,3)=f(r_{00},r_{10},r_{11},r_{20},r_{21},r_{22})=g(a_0,a_1,a_2,\sigma_{12},\sigma_{23})$，并且我们可以由此得出能够使网格复制所观测到的即期利率 $r_{00}(0,3)$的 a_2 的值。这样我们就可以随之计算出所有其他的 a_t 的值，这可以通过上面的递推过程得出（实际中，我们经常使用一种比上面所解释的方法更为有效的代数方法，参见 Clewlow 和 Strickland，2000）。我们可以看到在这个网格中短期利率移动的平均方向（近似地）等于远期利率曲线的斜率（参见附录 18.1）。

当然，很重要的一点就是，一旦我们对于单期的短期利率进行了选择并且校准了一个合适（无套利利润）的网格，就可以很容易地应用 BOPM 来对一系列范围很广的利率衍生证券进行定价。我们将要在后面的部分中遇到连续的利率，它们类似于这些离散时间的利率网格。正如股票价格一样，在这些利率过程的连续时间公式和用 BOPM 的短期利率网格之间存在着直接的关系。

更多的网格

Ho - Lee 模型和 Black - Derman - Toy（BDT）模型都不能表现出均值回归，因此如果利率非常高（或非常低），它们没有趋势回到平均值上。利用一个三项网格而不是二项网格就可以加快计算的速度，并且也可以使包含利率均值的回归变得比较容易（另外可以证明利用一个三叉树等价于有限差分的方法）。图 18—5 中给出了一个对于 $t=2$ 时的三叉树，其中每个时间期限等于一年。在每一个节点上，我们给出了连续复利的（1 年期）短期利率，并且分别假设向上变动、水平变动、向下变动的概率是 $q_i=(0.25,0.50,0.25)$。更一般地说，我们选定这些概率以保证网格可以与短期利率的期望变化以及短期利率变化的方差相匹配（这与我们在关于股票价格 BOPM 网格中选择 q 的值的方法是相同的）。

三叉树的方法与二叉树极其相似，因此我们考虑对一个欧式上限期权进行定价，它的 $K=12\%$，并且在 $t=2$ 时进行支付。在 $t=2$ 时的收益是 $V_{2i}=\max(r_{2i}-12,0)$，这表示在图 18—5 中的括号中，在节点 B 上，上限期权的价值是（即 $t=1$，$s=2$ 向上移动的次数）

$$V_{12}=[0.25(4)+0.50(2)+0.25(0)]e^{-0.14(1)} \tag{18.26}$$

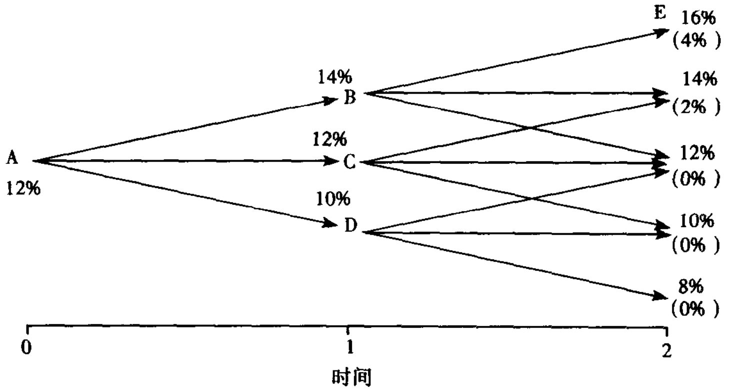


图 18—5 三项网格

我们可以通过相同的方法计算 V_{11} 和 V_{10}，那么我们用这些价值来确定目前上限期权的价值 V_{00}。赫尔（Hull）和怀特（White）在 1994 年解释了如何对三叉树进行调整，来使它与现实中所观测到的均值回归的现象相适应。例如，如果在图 18—5 中利率服从向上的路径 A，B 和 E，那么如果存在均值回归，很可能在下一期，单期利率将要下降（向着长期均值的方向移动）。我们通过在节点 E 从 0.25 开始增加（发生价格向下变动的概率）q_3 来在网格中实现。（参见 Hull，2000，第 17 章中的第 13 节给出了更详细的内容）。Hull - White 网格也给出了计算对冲参数的方法，因此交易者可以建立一个 delta 和 vega 的中性头寸来对它们的利率期权投资组合进行对冲。一般来说，我们可以看到 delta 的价值取决于 a_t，vega 取决于 $b_t/2$（$=\sigma_t$）。读者如果对短期利率各种模型中的详细算法感兴趣，或是希望了解如何建立一个无套利的网格以及它们在衍生证券定价中的应用，可以参考 Clewlow 和 Strickland（1998）的书。

尽管我们用离散时间的树和网格解释了无套利方法，但是值得注意的是，这些方法可以用于连续时间的框架，但是在这里我们没有继续介绍。相反，我们将要介绍怎样在期限结构的均衡模型中应用连续时间方法。

18.4 期限结构的均衡模型

在应用无套利方法时，我们所观测到的最初的利率期限结构是模型的输入变量，它用来决定离散时间网格的“形状”。当我们利用均衡模型的方法时，期限结构是模型的一个输出变量。这种方法的步骤如下：

均衡模型

- 选择一个短期利率过程的连续时间公式，并且运用即期利率的历史数据估计这个过程中的未知参数。
- 利用选择出的短期利率模型，通过数学方法推导出整体期限结构。
- 利用连续时间的数学方法为所要考虑的利率衍生证券建立 PDE。解这个 PDE，根据短期利率模型中估计的参数，给出衍生证券价格的封闭形式解。

首先值得注意的是，如果所估计的这个短期利率时间序列模型与目前的实际利率期限结构模型吻合得并不好，那么对于衍生证券价格的封闭形式解也是不准确的。这是这种方法最主要的失败之处，也是无套利方法更常用的原因。均衡模型的数学方法非常复杂，因此我们只能对这个方法进行启发性的叙述。

从短期利率到期限结构

瞬时短期利率 $r(t)$ 是无穷小的时间段内的利率（即从 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 时间内，并且 $\mathrm{d}t$ 趋近于零）。衍生证券的价格取决于 $r(t)$ 在一个风险中性世界中的过程，因此，如果衍生证券在 T 时的收益是 V_T，那么目前衍生证券的价格（价值）V_t 就是

$$V_t = E^*\left[\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{av}}(T-t)}V_T\right] \tag{18.27}$$

其中，E^* 为在风险中性世界中的预期价格，r_{av} 为 r 的平均价值（在 t 到 T 这段时间内），它是一个随机变量。为使问题简化，我们可以将公式（18.27）用于对一个在 T 时支付 1 美元的零息债券进行定价（我们假设这个债券是它自己的衍生证券）：

$$P(t,T) = E^*\left[\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{av}}(T-t)}1\text{ 美元}\right] \tag{18.28}$$

但是我们也知道，如果 R（t，T）是这个零息债券的连续复利，那么

$$P(t,T) = \mathrm{e}^{-R(t,T)(T-t)} \tag{18.29}$$

然后得到

$$R(t,T) = -\frac{1}{(T-t)}\ln P(t,T) \tag{18.30a}$$

以及

$$R(t,T) = -\frac{1}{(T-t)}\ln E^*\left[\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{av}}(T-t)}\right] \tag{18.30b}$$

因此，如果我们知道风险中性世界中的短期利率 r 的时间路径，我们就可以应用公式（18.30b）来决定对于所有零息债券利率 R（t，T）的完整的时间路径。即在所有时期上的完整期限结构（这种在均衡模型中获得完整的期限结构的方法与前面所讨论的通过单期利率网格的方法是两个等价的过程）。我们现在的任务是考察其他极短期利率的模型。

短期利率模型

在下面的讨论中，我们假定“今天”就是 $t=0$ 的时刻，其中 t 是在“今天”和到期日 $t=T$ 之间的任意一个时间点。刻画瞬时短期利率表现的一个普遍的随机方程就是伊藤过程：

$$\mathrm{d}r = \mu(r,\ t)\mathrm{d}t + \sigma(r,\ t)\mathrm{d}\hat{z} \tag{18.31}$$

其中，$\mathrm{d}\hat{z}$ 为在风险中性世界中的一个维纳过程，并且最初始的值 $r(0)$ 是已知的。注意公式（18.31）是一个单因素模型，因为我们有一个独立的维纳过程 $\mathrm{d}\hat{z}$。最关键的一点就是如何选择公式（18.31）的简单形式，而且这个形式要很恰当地符合实际的短期利率随机表现。短期利率是否表现出（非常缓慢的）均值回归或者是否是非平稳的呢？这是一个被广泛讨论的话题，尤其是自从协整（cointegration）的概念出现以后，参见 Cuthbertson，(1996)。因此，我们应用了包括和不包括均值回归的短期利率的模型。下面给出了一些可选择的方法。

Rendlemann - Bartter（1980）

由于我们假设公式（18.31）中的参数 μ 和 σ 是不变的参数，因此 r 服从一个 GBM。后者意味着短期利率 r 可能是负值，因此这个模型就有些不符合实际，因为我们所观测到的名义利率是不会为负值的。

Ho - Lee（1986）

Ho - Lee 模型没有涉及均值回归，但是它允许依赖于 t 的利率变动：

$$\mathrm{d}r=\Theta(t)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{18.32}$$

我们选择一个函数 $\Theta(t)$，使最终所得到的远期利率的曲线与目前的远期利率的价值（隐含在我们所观测到的即期利率的期限结构中）是非常吻合的。“σ”这一项就是瞬时短期利率的标准差。（我们在上面已经讨论过 Ho - Lee 模型的离散时间的形式，其中 $a_t=\theta(t)$，并且 $b/2=\sigma$。）函数 $\theta(t)$ 表示的是移动项，代表了短期利率随着时间变动的平均方向，它和 r 的水平相互独立（即没有均值回归）。我们可以看到近似的有 $\theta(t)=\partial F(0, t)/\partial t$，其中 $F(0, t)$ 是瞬时远期利率。很不幸的是 Ho - Lee 模型中的 $r(t)$ 也可能会出现负值，在这个方面，Hull - White 模型是一个很大的改进。

Hull - White 模型

相比 Ho - Lee 模型，Hull - White 模型表现了均值回归：

$$\mathrm{d}r=[\Theta(t)-ar]\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{18.33}$$

是方括号中的一项造成了**均值回归**（mean reversion），其中 r 有向均衡利率 $r^*=\Theta(t)/a$ 移动的趋势。这样，如果没有随机扰动，那么 r 将会接近于 $\Theta(t)/a$，可能是通过上升的变化（如果 $\Theta(t)>ar$），也可能是通过下降的变化（如果 $\Theta(t)<ar$）。

Black - Derman - Toy（1990）

这个模型与 Ho - Lee 方程非常相似，但是 d(ln$r$) 不是一个独立的变量，因此在这个模型中没有均值回归：

$$\mathrm{d}(\ln r)=\Theta(t)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{18.34}$$

利用伊藤引理，我们可以看到，利用 dr 这一项可以写出

$$\mathrm{d}r=[\Theta(t)+(1/2)\sigma^2]r\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{18.35}$$

Black - Karasinski

$$\mathrm{d}(\ln r)=(\Theta(t)-a\ln r)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{18.36}$$

上面的公式是 Black - Derman - Toy 模型，但是没有包含均值回归，因此如果没有随机波动，$\ln(r)$ 将会接近均衡价值 $\ln(r(t))=\theta(t)/a$。

Vasicek（1997）

这个模型含有均值回归，并且这个均值是固定在利率的均衡水平 $r^*=b$ 上的。短期利率 $r(t)$

是正态分布的，因此 $r(t)$ 可能是负值：

$$dr=a(b-r)+\sigma dz \tag{18.37}$$

Cox - Ingersoll - Ross（1985）CIR

它具有一个固定的均衡利率 $r^*=b$，这与 Vasicek 模型相同，但是标准差是与 $\sqrt{r}$ 成比例的，因此当 r 趋近于零时，标准差接近于零，并且利率总是非负的。这个关于 r 的风险中性过程是

$$dr=a(b-r)dt+\sigma\sqrt{r}dz \tag{18.38}$$

在均衡模型的方法中，上面方程中的参数通过数据的时间序列估计得出。例如，在 CIR 模型中就要求对于 a，b，c 和 σ 的计量经济学估计。

18.5 利用连续时间模型进行定价

要从数学上得到衍生证券的一个严格形式的解是十分困难的（虽然并不是不可能），尤其是对于那些标的短期利率是由前面的某一个动态方程所决定的时候。因此，我们考虑一些具有解析形式解的简单的例子，当然，正如读者所看到的，这在很大程度上只是为了解释说明的目的。所有的解都把短期利率方程当做已知的，并且这形成了对于衍生证券的 PDE。然后这个 PDE 的解就给出了衍生证券价格的封闭形式的解析解。接下来衍生证券的价格必须取决于参数 a，b，c，σ 的估计值以及到到期日所需的时间 $T-t$ 和标的资产的价值（例如，目前的短期利率或者是零息债券的价格）。当封闭形式的解不可获得时，我们可以使用数值方法（如有限差分）来求解 PDE 以得到衍生证券的价格。

Black - Scholes 公式

假设衍生证券的价格是 $f(r,t)$，并且衍生证券在最终日期 T 之前没有任何支付（即欧式期权）。我们可以看到如果 $r(t)$ 服从公式（18.31）中的伊藤过程，那么相应的 Black - Scholes 公式就是

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial r}\mu+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\sigma^2-rf=0 \tag{18.39}$$

其中，σ 和 μ 本身就是 r 和 t 的函数。我们还假设在到期日（$t=T$ 时）的收益条件是已知的，例如 $f_T=\max(0,V_T-K)$。V_T 是标的资产的价格，为了讲解方便，我们现在用前面的 Black - Scholes PDE 来对一个零息债券进行定价，其中假设利率是随机的或者是不变的。因此，我们把债券看成是它自己的衍生证券。（注意如果假设更加复杂，例如随机波动率，就可能无法得到一个封闭形式的解，那么我们就必须使用数值解法。）

解法一：零息债券，短期利率不变

一个不变的短期利率暗示着 $\partial f/\partial r=0$，并且因此得到 $\sigma^2=0$，因此公式（18.39）变成

$$\frac{\partial f}{\partial t}-rf=0 \quad 或 \quad d(\ln f)=rdt \tag{18.40}$$

它的解是

$$\ln f(t)=rt+k \tag{18.41}$$

其中，k 为任意常数。临界条件是 $f(T)=M$，债券的到期价值可以通过公式(18.41)得到：

$$\ln[f(T)]=rT+k=\ln(M) \tag{18.42}$$

因此 $k=\ln(M)-rT$。将 k 的值带入公式（18.41）可以得到

$$\ln[f(t,T)]=-r(T-t)+\ln(M) \quad 那么 \quad f(t,T)=Me^{-r(T-t)} \tag{18.43}$$

这就是当利率是不变的时候，对于一个面值为 M，并且到期日是 $T-t$ 的零息债券价格的简单表达式。通常我们可以假设 $M=1$ 美元。

解法二：零息债券，随机变化的利率

假设短期利率服从下面的 Ho - Lee 模型：

$$dr=a dt+\sigma dz \tag{18.44}$$

其中，“a”和 σ 为已知的常数（估计出的）。首先我们假设一个零息债券（到期价值是 1 美元）价格的解是

$$f(t,T)=k(t,T)e^{-r(T-t)} \tag{18.45}$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial r}=-k(T-t)e^{-r(T-t)},\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=+k(T-t)^2e^{-r(T-t)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=kre^{-r(T-t)}+\frac{\partial k(t,T)}{\partial t}e^{-r(T-t)}$$

将 $\mu=a$ 带入 Black - Scholes 公式，并且进行整理，得到

$$\frac{\partial k(t,T)}{\partial t}=(T-t)ka-\frac{1}{2}(T-t)^2\sigma^2k \tag{18.46a}$$

或

$$d(\ln k)=\left[(T-t)a-\frac{1}{2}(T-t)^2\sigma^2\right]dt \tag{18.46b}$$

现在我们必须对公式（18.46b）从 t 到 T 进行积分，并且结合临界条件 $\ln k(T,T)=1$，得出在 t 时 k 的解：

$$\ln[k(t,T)]=\frac{1}{2}(T-t)^2a+\frac{1}{6}(T-t)^3\sigma^2 \tag{18.47}$$

把公式（18.45）代入公式（18.47）后，我们得到一个关于零息债券的价格 $f(r,t)$的显式解。这取决于到到期日 $T-t$ 的这段时间上的非线性路径以及短期利率过程的参数“a”和 σ。这个价格会使沿着收益率曲线进行的套利不具有可能性（给定对于短期所假定的随机过程）。把公式(18.45)中的 $f(r,t)$代入公式(18.30b)的长期利率：

$$R(t,T)=-\frac{1}{(T-t)}\ln f(t,T)=\frac{-1}{(T-t)}\ln k(t,T)+r(t) \tag{18.48}$$

因此，在 Ho - Lee 模型中，短期利率的瞬时变化导致了所有长期利率的等同变化，也就是说收益率曲线的平行移动。这是一个相当严格的期限结构模型，但是正如上面所解释的，通过使用其他的短期利率的随机过程（如下文所述），可以使它更加灵活（并且更加现实）。

债券定价和衍生证券的价格

Vasicek 模型涉及均值回归，并且我们可以看到这个模型给出了零息债券的价值：

$$f(t,T)=k(t,T)\mathrm{e}^{-B(t,T)r(t)} \tag{18.49}$$

函数 k 和“B”是涉及（T，t）和短期利率方程的参数 a，b 和 σ 的更加复杂形式的表述：

$$k(t,T)=\exp\left[\frac{[B(t,T)-T+t](a^2b-\sigma^2/2)}{a^2}\right]-\frac{\sigma^2B(t,T)^2}{4a} \tag{18.50a}$$

$$B(t,T)=\frac{1-\mathrm{e}^{-a(T-t)}}{a} \tag{18.50b}$$

这些 k 和 B 的表达式要比 Ho - Lee 模型中的表达式复杂得多，并且它们允许收益率曲线（在 t 时）向上或是向下倾斜（平滑的），或者是展现出一个驼峰分布。长期利率的表达式是

$$R(t,T)=-\frac{1}{(T-t)}\ln f(t,T)=\frac{1}{(T-t)}\ln k(t,T)+\frac{1}{(T-t)}B(t,T)r(t) \tag{18.51}$$

通过上面方程的 $r(t)$ 的系数可以清楚地看出，当 $r(t)$ 每变化 1% 的时候，长期利率并不会变化相同的数量，因此收益率曲线的移动并没有平行性约束。要基于 Vasicek 模型推导出关于利率衍生证券的封闭形式的解要求更为复杂的连续时间的数学方法。但是，Jamshidian（1989）就给出了如何对关于零息债券（或是附息债券）的欧式看涨或是看跌期权进行定价的方法。例如，关于零息债券的看涨期权的价格 $C(t,\ T)$ 就具有如下形式的封闭解：

$$C(t,\ T)=Qf(t,\ s)N(h)-Kf(t,\ T)N(h-\sigma_{\mathrm{p}}) \tag{18.52}$$

其中，Q 为债券本金，K 为在期权合约中的债券的执行价格，$f(t,\ s)$ 为在 t 时刻可交割债券的价格，这个债券在任何时间 s 或是在 $s=T$ 时到期日价值是 1 美元，$N(.)$ 为累计正态分布函数，T 为期权的到期日（$T<s$）。

“h”和 σ_{p} 的形式更为复杂，它们的表达式取决于 T，t，Q，到期日 s 和 T 债券的价值，即 $f(t,\ s)$ 和 $f(t,\ T)$，以及短期利率方程中 a，b 和 σ 的参数估计值。我们还需要注意的是，Cox - Ingersoll - Ross 和 Hull - White 关于短期利率的方程中也给出了关于债券价格以及长期利率 $R(t,\ T)$ 的解，它们与 Vasicek 模型（公式（18.37））所给出的解十分类似。另外，长期利率 $R(t,\ T)$ 与短期利率 $r(t)$ 的值是线性相关的。因此，$r(t)$ 决定了利率期限结构的水平，同时利率期限结构的形状取决于独立于 $r(t)$ 的 $k(t,\ T)$ 和 $B(t,\ T)$ 的不同函数形式。

在 Hull - White 模型中，债券价格的波动率、即期利率和远期利率（关于零息债券）也是随着距到期日时间的变化而变化的。CIR 和 Hull - White 短期利率模型也可以应用于关于零息债券的欧式看涨和看跌期权的定价，修改以后也可以用于附息债券的期权的定价（Jamishidian，1989）。为了进一步研究均衡模型，我们可以假设短期利率受到两个随机变量的影响，例如我们可以假设 σ 也是一个随机变量。我们也可以通过这个基于更复杂的两因素的短期利率期限结构模型推导出债券价格和利率衍生证券价格的封闭形式的解（例如，Longstaff 和 Schwartz，1992）。

注意，随后就会出现关于上面两个可选择的短期利率模型的实际问题。每个模型都会对于衍生证券给出一个不同的理论价格，但是到底哪一个是正确的呢？这没有一个简单直接的答案。能最好地吻合时间序列数据的短期利率模型应该最具有价值，因为所给出的衍生证券的理论价格最接近于它们所观测到的价格。然而，不能这么简单地确定哪一个是最好的短期利率模型，而且，

从经验上来说，最好的模型可能随着时间而变化。另外还有一种可能性就是，无论使用什么模型，导出的债券价格公式中一个很小的误差通常就会引起衍生证券价格的极大的误差。这就是我们为什么通常不使用均衡模型的方法，而是更倾向于使用无套利的方法的原因（实际操作人员通常认为它更加精确并且具有灵活性）。

18.6 蒙特卡罗方法

MCS 有时提供一种对于某些利率衍生证券定价的更加合理、快速、简单有效的方法，它基于公式（18.27），即 $V_t = E^*\left[e^{-r_{av}(T-t)}V_T\right]$。例如，考虑对执行价格为 $K=10\%$，并且到期日是 $T=1$年的上限期权(关于短期利率，比如说是 90 天的 LIBOR)进行定价。为了应用蒙特卡罗方法，我们需要得到一个关于短期利率的数据列。假设我们选择一个对于 Vasicek 均值回归模型的离散近似：

$$r_t - r_{t-1} = a(b - r_{t-1})\Delta t + \sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t} \tag{18.53}$$

其中，ε 服从 $niid$（0，1），长期利率的均值是 b（$=5\%$），并且收敛率是 $a=0.20$。我们采用 $\Delta t = T/n = 0.01$，因此我们可以把 1 年分成 $n=100$ 个时间单元。假设目前的短期利率是 $r_0=10\%$。MCS 涉及如下的步骤（见表 18—10）：

表 18—10　　蒙特卡罗模拟（上限期权）

在 T 时上限期权的收益为 max {r（T）$-K\%$，0}。

上限期权的价格＝“exp（$-r$ 的平均值）×在 T 时的收益”的平均值。

即期利率	0.1
执行利率	0.1
平均利率	0.08
回归利率	0.2
波动率	0.007
距到期日的时间	1
时间步长	0.01

时间	模拟 1	模拟 2	模拟 3	模拟 4	模拟 5	模拟 6	模拟 7	模拟 8	模拟 9	模拟 10
0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.01	0.100 962	0.099 702	0.100 878	0.101 152	0.099 994	0.101 134	0.101 148	0.099 607	0.101 382	0.100 58
0.02	0.100 997	0.100 108	0.101 014	0.101 368	0.100 223	0.102 544	0.100 359	0.099 58	0.099 995	0.101 086
0.03	0.101 209	0.100 315	0.099 847	0.101 943	0.100 185	0.103 433	0.102 352	0.098 562	0.099 414	0.102 296
0.04	0.100 874	0.098 944	0.099 73	0.102 206	0.100 438	0.102 865	0.102 867	0.097 889	0.099 676	0.103 254
0.05	0.100 277	0.098 539	0.099 387	0.101 13	0.100 376	0.102 667	0.102 368	0.097 715	0.099 429	0.103 741
0.06	0.098 985	0.098 342	0.099 01	0.100 782	0.099 642	0.102 948	0.101 776	0.097 838	0.097 99	0.104 406
0.07	0.098 891	0.096 593	0.098 462	0.101 66	0.099 352	0.102 972	0.101 356	0.097 794	0.097 708	0.104 194
0.08	0.098 801	0.097 628	0.097 462	0.101 514	0.099 222	0.104 224	0.100 657	0.097 322	0.097 996	0.103 307
0.09	0.098 607	0.097 18	0.097 052	0.101 926	0.099 731	0.102 789	0.100 539	0.096 812	0.098 889	0.102 605
0.1	0.097 945	0.097 135	0.096 844	0.101 46	0.099 538	0.102 839	0.0999 15	0.098 512	0.099 237	0.103 065
0.11	0.097 991	0.098 419	0.096 137	0.102 722	0.099 474	0.104 021	0.099 253	0.097 849	0.099 709	0.103 411

0.12	0.097 381	0.098 549	0.096 394	0.102 646	0.098 123	0.103 741	0.099 378	0.097 74	0.100 059	0.103 439
0.13	0.096 891	0.098 38	0.096 772	0.101 9	0.097 414	0.103 32	0.098 607	0.097 769	0.101 545	0.104 143
0.14	0.096 196	0.097 545	0.096 918	0.101 809	0.096 793	0.102 498	0.098 776	0.097 668	0.101 718	0.104 318
0.15	0.097 474	0.098 182	0.096 463	0.103 468	0.097 664	0.103 484	0.099 303	0.098 425	0.100 878	0.104 754
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0.95	0.096 945	0.091 831	0.084 345	0.097 583	0.106 482	0.100 327	0.105 537	0.097 414	0.099 266	0.108 934
0.96	0.097 597	0.091 306	0.084 058	0.097 659	0.106 316	0.099 535	0.104 636	0.097 412	0.099 627	0.109 236
0.97	0.098 211	0.090 948	0.083 912	0.097 433	0.106 5	0.099 786	0.104 307	0.096 889	0.099 344	0.108 279
0.98	0.097 475	0.090 811	0.083 291	0.098 019	0.107 702	0.100 985	0.104 151	0.097 701	0.099 053	0.108 414
0.99	0.096 654	0.089 917	0.083 349	0.097 319	0.108 652	0.100 42	0.103 612	0.097 688	0.099 218	0.109 023
1	0.096 714	0.089 756	0.083 55	0.097 21	0.106 554	0.100 153	0.103 202	0.097 982	0.098 666	0.108 563
平均利率	0.097 879	0.096 542	0.090 113	0.098 749	0.103 083	0.103 281	0.102 4	0.095 32	0.097 509	0.106 041
收益$=\max\{r(T)-K,0\}$	0	0	0	0	0.006 554	0.000 153	0.003 202	0	0	0.008 563
收益的 DPV	0	0	0	0	0.005 912	0.000 138	0.002 891	0	0	0.007 701

期权价格（=0.001 664）等于“收益的 DPV”的平均值。

（1）产生一列关于 r 的 $n=100$ 的观测值，并且计算 r 的平均值，即在横轴 $t=1$ 到 $t=T$ 上 $r_{\mathrm{av}}=\sum_{i=1}^{n}r_i/n$。

（2）计算在到期日上限期权的价值是 $\max(r_{100}-K,0)$。因此对于第一次蒙特卡罗模拟，得到上限期权的价值就是 $V^{(1)})=\mathrm{e}\ -r_{\mathrm{av}}T\max(r_{100}-K,0)$。

（3）重复步骤（a）和（b）$m(=20\ 000)$次，那么对于上限期权的 MCS 价值就是 $C=(1/m)\sum_{i=1}^{m}V^{(i)}$，很容易看出，这个方法可以用于我们前面所讨论的其他利率衍生证券。

例如，利率上限的价值就是每个单独的上限期权的 MCS 价值的简单加和。

当然这个价格取决于我们所采用的关于短期利率特定的随机模型。因此就出现了关于估计的问题。但是期权可以通过蒙特卡罗模拟来进行定价，在这种方法下，利率所服从的随机过程是可以选择的，并且价格关于这些可选择的过程的敏感度是可以估计的。这也是情景分析的一种形式。

18.7　本章摘要

本章中我们介绍了一系列的思想和概念，尽管我们仅仅介绍了关于利率衍生证券定价这个复杂领域的表层知识。然而，读者现在应该能够理解关于这些领域的学术和专业杂志上的文章了。我们的主要结论归纳如下：

- **Black（1976）**模型可以对某些利率期权的定价给出一个封闭形式解，这只需要我们假设在到期日的利率，或是债券价格，或是期货价格是对数正态分布的。对于所有这三类“价格”，后者不能同时成立，但是在实际中，由于 Black 模型的简单形式，这一点常常被忽略。

- **无套利方法**从短期利率 r 的一个模型开始，这个模型已经经过校准，并且精确地符合目前的期限结构（例如目前即期利率的水平以及波动率），然后“无套利”债券价格和利率衍生证券的价格可以通过解析方法（对于连续时间过程）或是数值方法获得（通过沿着“无套利”网格往回递推得到，比如利用 BOPM）。
- **无套利模型**经过校准后精确地符合最初债券价格，或者是即期利率，或者是远期利率的利率期限结构。最容易处理的是短期利率模型，但是它严重限制了波动率（期限）结构。因此，无套利模型不能模拟期限结构中所有可能的运动。
- **无套利方法**可以用于短期利率的**离散时间模型**，也可以用于短期利率的**连续时间模型**。这种方法可以用于对美式或欧式衍生证券进行定价，另外还可以对很多其他**路径依赖型**的利率期权进行定价。
- **三项网格**提高了计算速度。这些网格可以模拟短期利率的均值回归，这更接近于现实世界中的行为。
- 在**均衡模型**方法中，所选择的短期利率模型的参数需要估计。可以运用连续时间的数学方法推导出债券的价格和利率衍生证券价格的精确解。它们取决于所选择的短期利率方程中所估计出的参数。均衡方法最大的问题在于在估计短期利率参数时很小的误差就可能导致对衍生证券定价时很大的误差。
- **蒙特卡罗模拟**提供了一种更为灵活的方法来对多种利率期权进行定价，包括对（一些）路径依赖型期权进行定价。当然，只有关于利率的随机模型能够合理预测利率未来的运动时，这些衍生证券的价格才是准确的。
- 当然，价格取决于关于短期利率**特定的随机模型**。因此引出了有关估计的问题。但是期权可以通过蒙特卡罗模拟进行定价，有很多关于利率的随机过程可以选择，并且可以估计对于可选择的随机过程的**价格敏感度**，这是**情景分析**的一种形式。
- 利率衍生证券对于我们**未来的研究**提出了一些重要问题，比如在连续时间数学方法方面，在设计基于网格/树的结构的一些有效、高速、准确的数值解法方面，以及在用数值方法解决 PDE 方面等。

章末练习

1. 为什么当标的债券是一个 15 年期的长期债券时可以利用 Black 模型对一个 1 年期的长期国债期权进行定价，而当标的债券是一个 1 年期的国债时这种方法却是不可行的？

2. 利用 Black 模型对下面的互换期权进行定价。互换期权是一个 4 年期的互换，从第 3 年开始，支付是每年进行一次，并且互换的本金是 100 000 美元。互换利率的波动率是每年 20%。这时执行价格是 7.5%（互换利率）的支付者期权。收益率曲线目前保持在 8%的水平（连续复利）。

3. 通过直觉判断，在无套利方法中，单期的利率网格是如何与所观测到的利率期限结构和它们的波动率保持一致的？（假设网格中的单期利率具有相同的波动率。）

4. 当对利率衍生证券进行定价时，相对于一个二项的网格，三项网格的好处体现在什么

地方？

习题 5 至习题 7 的数据：

下面所给出的数据可用于对习题 5 至习题 7 进行解答。三期内的利率网格是：

			16% (0.216)
		14% (0.36)	
	12% (0.6)		13% (0.432)
10%		10% (0.48)	
	8% (0.4)		9% (0.288)
		7% (0.16)	
			6% (0.064)

价格向上变动的风险中性概率是 $q=0.6$，价格向下变动的风险中性概率是 $(1-q)=0.4$。括号中的数字是达到每个节点的概率，乘以能够达到这个节点的次数。因此它们是 BOPM 中的一项：

$$q_k^n=\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}$$

因此，对于 $t=2$ 和 $k=1$（价格向上变动的次数），我们在节点 ud 处（或者是等价的 du 处），并且

$$q_1^n=q_{ud}^n\binom{2}{1}(0.6)^2(0.4)^1=0.48$$

同样

$$q_2^n=q_{uu}^n\binom{2}{2}(0.6)^2(0.4)^0=0.36$$

5. 那么一个 $K_c=10\%$的 2 年期欧式利率上限的价格是多少？

6. 如果利率上限是美式的利率上限，那么在对这个 2 年期的利率上限定价的分析中会有些什么变化？

7. 对于一个实际的现金支付发生在 $t=3$ 时的 2 年期的 FRN，它的价格是多少？有时我们把它称为“延迟交割的 FRN”。

附录 18.1 利率期限结构的 Ho－Lee 模型

我们现在有很多的利率模型，它们价格向上变动和向下变动的次数是由单期利率的历史波动率所决定的。这些模型使我们可以在网格的每一个节点上构造出整体的利率期限结构。在 Ho－

Lee 模型中（1986），利率的不确定性通过对远期利率的影响表现出来，而不是通过对即期利率的影响。当然，对于远期利率的随机振动也暗示着即期利率本身的随机振动，因为这两类利率是紧密联系在一起的。

我们规定 $r_{t,j}$表示在网格中每一个节点上的单期利率，其中时间 t 标识在横轴上，而 i 是价格向上变动的次数。我们在使用符号时也意识到，在每一个节点上，利率可能应用于比单期更长的时间。例如，我们用 r_{1u}（1，3）代表在第一个价格向上变动的节点上 $t=1$ 时的利率，并且在横轴上可以用于一个 2 年期的期限，可以是从 $t=1$ 时开始到 $t=3$ 时结束。但是略微有所不同的是，r_{1u}（1，3）是在节点（1，u）上的一个 2 年期的即期利率，同样，r_{1u}（1，4）是在节点（1，u）上的一个 3 年期的即期利率。

在 $t=0$ 时（节点 0），我们知道目前的即期利率期限结构 $r_{00}(0,1), r_{00}(0,2), r_{00}(0,3), \cdots$，并且因此我们可以得知现在的远期利率，也就是说 $f_{00}(1,2), f_{00}(1,3), f_{00}(1,4), \cdots, f_{00}(2,3), f_{00}(2,4), \cdots$等，例如

$$[1+f_{00}(1,2)]=\frac{[1+r_{00}(0,2)]^2}{[1+r_{00}(0,1)]} \tag{A18.1}$$

如果没有利率的随机振动（即不存在不确定性），那么在 $t=1$ 时，在每一个节点(1，u)或是(1，d)上，单期的即期利率 $r_{1,i}(1, 2)$就等于在 $t=0$ 时构建的远期利率，也就是 $f_{00}(1, 2)$。然而，更实际的做法是，在 $t=0$ 时到 $t=1$ 时的单期利率服从于一个单期的振动，这个振动或者是向上的 u(1)，或者是向下的 d(1)。因此对于在 $t=1$ 时 $r_{1,i}(1, 2)$可能出现的两种结果就涉及向上和向下的节点

$$1+r_{1u}(1,2)=[1+f_{00}(1,2)]u(1) \tag{A18.2a}$$

以及

$$1+r_{1d}(1,2)=[1+f_{00}(1,2)]d(1) \tag{A18.2b}$$

另外在 $t=1$ 时，在每一个节点上的一个两期即期利率 $r_{1,i}(1, 3)$可能是由不同规模的振动 u(2)和 d(2)所产生的移动而引起的，因此

$$1+r_{1u}(1,3)=[1+f_{00}(1,3)]u(2) \tag{A18.3a}$$

以及

$$1+r_{1d}(1,3)=[1+f_{00}(1,3)]d(2) \tag{A18.3b}$$

因此一旦我们确定了在每一个横轴上（$k=1$，2，…直到期限结构中的 m 年）u（k）和 d（k）的大小，我们就可以在 $t=1$ 时构建整体的利率期限结构。在简单的 Ho-Lee 模型中，u（k）和 d（k）的规模是建立在对单期利率的波动率 σ 的经验估计值之上的。另外，我们可以任意规定价格向上变动的风险中性概率的价值，比如说 $q=0.5$。如果知道 σ 和 $q=0.5$，我们首先可以计算出

$$\ln\Omega=\sigma/\sqrt{q(1-q)} \tag{A18.4}$$

为了计算 u（k）和 d（k），我们需要用到

$$d(k)=\frac{q+(1-q)\Omega^k}{\Omega^k} \tag{A18.5a}$$

以及

$$u(k)=d(k)\Omega^k \tag{A18.5b}$$

我们如何在利率网格中“向前移动”来建立在 $t=2$ 时的利率期限结构呢？这涉及三个可能出现的节点 uu，ud 和 dd。在 $t=1$ 时（见图 A18—1），我们知道在每一个节点($i=$u，d)上的 $r_{1,i}(1,2)$ 和 $r_{1,i}(1,3)$，因此我们可以利用它们来计算在 $t=1$ 时的单期的远期利率，也可将其用于从 $t=2$ 时到 $t=3$ 时，也就是 $f_{1,i}(2,3)$(在每一个节点上 $i=$u 或 d)。例如在节点(1，u)上，我们可以得到

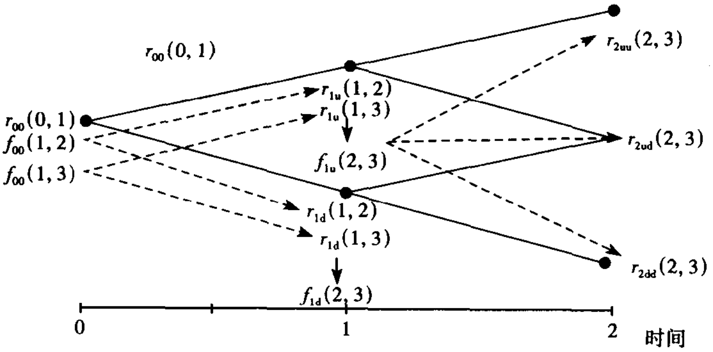


图 A18—1　期限结构：利率网格

$$[1+f_{1u}(2,3)]=\frac{[1+r_{1u}(1,3)]^2}{[1+r_{1u}(1,2)]} \tag{A18.6}$$

然后我们应用价格向上或是向下的因素 $u(1)$、$u(2)$、…，$d(1)$、$d(2)$…等，再在 $t=2$ 时，在每个节点上来建立整体的利率期限结构。例如(见图 A18—1)，在 $t=2$ 时，对于这三个节点，新的单期利率是：

$$1+r_{2uu}(2,3)=[1+f_{1u}(2,3)]u(1) \tag{A18.7a}$$

$$1+r_{2ud}(2,3)=[1+f_{1u}(2,3)]d(1) \tag{A18.7b}$$

$$1+r_{2dd}(2,3)=[1+f_{1d}(2,3)]d(1) \tag{A18.7c}$$

但是我们也可以通过对远期利率应用这些不同的震动因素 $u(k)$ 和 $d(k)$(其中 $k=2,3,\cdots$)，在 $t=2$ 时在每个节点(uu，ud，dd)上建立整体的利率期限结构。

一旦我们在每个节点上得到整体的期限结构，那么就像在上文中所描述的那样，我们就可以应用它来对利率上限、利率下限、利率双限和互换期权以及很多路径依赖型的利率期权进行定价。注意，利率网格是根据在 $t=0$ 时一系列所观测到的即期和远期利率来构建的，因此它与现在的利率期限结构一致。

第19章

实物期权

学习目标

- 甄别公司在众多**战略决策**中的“期权”。
- 比较**实物期权**（real option）和金融期权的相似之处。
- 说明通过考虑**隐含在公司投资决策**中的实物期权，投资估价的NPV准则被加以扩展。
- 阐释如何利用BOPM进行**实物期权**的定价。
- 介绍当某些决策涉及行业中其他竞争对手所采取的行动时，公司利用实物期权理论进行投资决策的**实际困难。**
- 演示实物期权是如何被用来**对互联网公司**进行估价的（其中进行扩张的嵌入期权在决定价值方面起到了重要的作用）。

实物期权理论是期权定价技术在公司财务上的应用，特别是对公司的资本预算和投资决策。**实物期权**指的是管理弹性的价值，做出新决策或修

改前期决策的期权。这样的例子包括：

- 是否在广告和营销方面投入更多的资金？
- 该为哪一个研发项目进行融资？
- 是否对现有业务进行扩张。
- 是否缩小业务规模以期减少损失。
- 是否放弃现有的一个投资项目。

我们应该考虑上述所有的实物期权的例子，以及它们是如何影响 NPV 准则和其他投资战略的选择的。在下面的章节中，我们会讨论一些实际的案例，其中一个特殊的投资项目可能暗含一些实物期权，即未来的选择在某种意义上取决于前期项目的结果。接下来我们会分析“修正 NPV”投资规则，修正 NPV 在开始讨论某个特定实物期权（比如扩张或放弃的期权等）的收益前，会考虑可能嵌入项目中的所有“实物期权”。然后我们会转向实物期权定价方法的学习（集中于 BOPM），但是我们也会利用连续时间框架（和蒙特卡罗模拟方法一起）来对互联网公司“Amazon. com”（Schwartz 和 Moon，2000）进行定价。我们也会讨论到在现实世界投资项目中应用实物期权理论的困难。

19.1　概述

在讨论实物期权理论前，我们会提供一些例子来帮助读者建立实物期权的直观看法。作为开始，一个很好的例子就是 Ewing 石油公司（与“JR”和 20 世纪 80 年代的电视连续剧《达拉斯》(Dallas) 毫无关系。《达拉斯》是 20 世纪 80 年代美国最出名的肥皂剧，又名《朱门恩怨》，剧情围绕 J. R. Ewing 在他父亲创立的 Ewing 石油公司的故事展开，这部电视剧当年在美国的影响力简直无法想像——译者注）。Ewing 石油公司计划投资于一个叫做“Black Gold”的新油田。当利用传统的 NPV 方法进行计算时，石油公司需要估计未来石油价格的变动和世界石油供给情况，以及对项目期间（假设为 12 年）内预期自由现金流的现值进行估计。然后将该现值与资本成本（例如购买钻探用的机器等）的现值进行比较。我们会用公司的风险调整折现率对现金流进行折现。假设“传统”NPV＝－1 000万美元。那么这个项目是否应该放弃，还是我们忽略了一些该项目的重要优势？

假设我们正在考虑的油田项目与另外一个叫做 Crude Hole 的油田很接近，Crude Hole 油田的石油质量很差，且难于开采。显然，如果 5 年后石油价格比预计的 Black Gold 油田的平均水平高的多的话，那么开发 Crude Hole 油田很可能是值得的。然而，假设只有在 Black Gold 已存在基础设施和专家的情况下，对 Black Gold 进行扩张开发才有利可图。于是 Black Gold 油田项目拥有了一个嵌入期权，也就是 5 年后对 Crude Hole 油田可能的扩张。

这个**扩张期权**（option to expand）是有价值的，而该价值应该包含在 Black Gold 油田 NPV 的计算中。当然，在 $t=0$ 时刻我们并不知道开发 Crude Hole 油田的期权在 5 年后是否会执行，因为我们不知道未来的油价。然而，这种扩张期权在 $t=0$ 的时刻仍然是有价值的。事实上，如果扩张期权的价值大于1 000万美元，那么我们应该决定投资 Black Gold 油田这个项目。

当然，上述勾勒的数字可能有一个下行风险，因为如果石油价格在 5 年后较低，那么扩张期

权的价值就将为零（即我们不会开发 Crude Hole 油田）。但是需要注意该下行风险不会低于零。事实上，扩张的嵌入期权是一个关于 Black Gold 油田价值的看涨期权，执行价格等于开发 Crude Hole 油田（$t=5$）的追加投资额。

这个期权和其他所有的期权一样，未来石油收入的不确定性 σ 越大，该看涨期权的价值越高。所以，在其他情况相同的情况下，我们有一个某种意义上有点似非而是的结论：未来的石油收入不确定性越高，今天的 Black Gold 油田（包括它的嵌入期权）就越值钱。

让我们进一步研究这个问题。现在我们假设把 Crude Hole 油田作为一个独立项目投资得出的期望 NPV 为负值。那么这会改变我们上面希望投资于 Black Gold 油田的分析吗？不，不会的！即使在“平均”意义上，Crude Hole 油田项目的 NPV 为负，但是它仍然会为 Black Gold 油田项目提供一个有价值的“期权”。如果在 $t=5$ 时刻，石油价格攀升，你将会从 Crude Hole 油田项目中赚到大钱，但是这在不投资 Black Gold 油田的情况下是不可能实现的。没有 Black Gold 油田，即使油价上涨，Crude Hole 油田也是不能够存活的，因为从头开始需要一笔昂贵的投资成本。

我们很容易发现上述对于石油公司的分析也可以用到对“dot. com”（网络）公司的分析上。对于大多数这样的公司，即使它们的收入相对来说较低，利润通常为负，以至于它们的“传统”NPV 值为负，但它们的股价大多数仍然很高。股价反映了它们在经营好现有业务的情况下，扩张进入其他相似互联网商业领域的可能性。这种嵌入的扩张期权反映在了现行股票价格上。（在另一方面，注意最近上市互联网公司中百万富翁的数量，一个愤世嫉俗的人可能建议进行下面的互联网投机活动：倘若顾客们承诺每个月点击网站 10 分钟并持续 6 个月，那么公司可以对顾客寄来的 10 美元寄回 20 美元作为交换。于是该公司在上市前可以宣布较高的收入，庞大数量的用户，并且不像其他的“dot. com”公司那样当前的利润为负。我想知道如果这样的话，上市价格应该是多少？）

让我们来考虑另外一个最近比较有争议的案例。在 6 年前的英国，德国宝马汽车公司（BMW）接管了英国路华（Rover）汽车公司。当时，一些人认为宝马为路华付出了过高的代价。果然，在 2000 年的时候，宝马宣布卖掉路华。但是这就意味着最初关于购买行为的批评是正确的吗？答案是不一定的。

当宝马接管路华的时候，它知道它对于这个项目有“放弃期权”。也就是说，如果将来的某个时间，成本增加或者市场对于路华车的需求降低的话，它可以以“持续经营”假设下的价钱将路华卖出。这种放弃行为的价值应该等于期权的执行价格。放弃项目的嵌入期权是有价值的，宝马在计算“传统 NPV”的时候应该将该价值加在其中。在宝马接管路华后，这个“调整后 NPV”（即加入了放弃期权的价值）可能就是一个正值，从而使得此时该项目是一个“正确”的决策。后来，路华没有赚到正的净收入，于是在 2000 年的时候宝马执行其放弃期权。但是，当时没有人能够确切地预测到后者将会发生。所以说当初宝马接管路华可能是正确的，即便后来在 2000 年的时候放弃这个项目也依然是正确的，因为这个时候期权的执行价格超过了路华的“持续经营价值”。该放弃期权就像是对路华的一个看跌期权，执行价格等于 2000 年的时候路华在“持续经营”假设下出售的价格。下面我们将会给出三个关于实物期权的更深入的例子。

- Zippy 公司是生产跑车的厂商，其目标是引进一种有大量市场的车型。Zippy 已经为一家新的工厂找到了厂址。目前经济处于萧条的边缘。因此 Zippy 可以选择在今天建厂，但是

面临一个不确定的销售额，或者将建厂时间推迟 18 个月，因为届时经济可能会复苏。Zippy 持有了延迟期权，当未来收入高度不确定时该期权是有价值的。通过执行这个期权，Zippy 为它观望未来的发展形势赢得了时间。

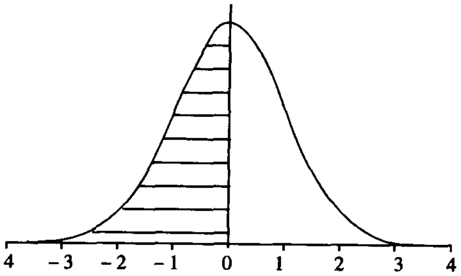
- Black Gold 石油公司已经开发了一个海上油田“Very Deep”，但是此时石油价格已经低于“Very Deep”止亏点的石油售价。那么 Black Gold 石油公司可以执行其**暂时停产的期权**。当石油价格回升并超过了止亏点的价格时，公司就可以执行恢复生产的期权。
- 一家高科技电子公司 Photon 正在考虑投资于一项 NPV 为负的第一代研发（R&D）项目。投资获得的基础设施、经验和副产品都是很有价值的，并且可能成为高质量、低成本的产品，甚至可能成为 Photon 公司的新产品。研发成本就是获得关于一个**期权**（即找到一个新的应用）**的期权**（即开发一个更好的产品）的期权金。为这种实物（复合性）期权定价是相当复杂的。

表 19—1 强调了金融期权与实物期权的相似性。一家有**投资机会**的公司拥有了一个获得该项目未来现金流现值的看涨期权。为获得这项收益，在该投资项目到期前公司必须付出投资成本（即执行价格）。

表 19—1　　金融期权和实物期权的相似点

参数	金融期权	实物期权
S	当前股票价格	预期现金流的现值
K	执行价格	投资成本
R	无风险利率	无风险利率
σ	股价波动性	项目的现金流波动性
$\tau=T-t$	距离到期日时间	投资机会消失前剩余时间

就像持有金融期权一样，实物期权的价值随着时间接近到期日和标的物价值波动性的增大而增加。这意味着当预期结果（销售量、收入和价格）不确定性增加的时候，管理弹性（即制定和改进决策的能力）具有较高的价值。与持有金融期权相同，实物期权有一个损失的底限（即投资成本），这有效地缩短了收益的概率分布区间（如图 19—1 所示）。



阴影区域中的情况不会出现，因为你会“一走了之”而不执行期权。
一个实物看涨期权的收益底限是(扩张的)附加投资成本。

图 19—1　来自期权的截断收益

只有当收益是正值的时候，金融期权才会得到执行。依此类推，只有当预期净收益（现值）为正的时候，管理者才会执行他们的实物期权，即制定某个特定决策或者采取一个特定行动方针。

所有权、**复合性**（期权的期权）、不同可能的选择之间的**相互影响**以及**竞争者**行为问题使得实物期权的定价复杂化了。最简单的例子就是当实物期权的所有权是私人所有的时候。我们的意思是只有一个公司持有该期权，所以该公司会根据它自己的便利选择是否执行该期权。然而，如果这个期权是在几个公司间**共享**的，那么博弈理论就变得非常重要了。一家公司可能为了获得“率先行动者优势”从而支配整个市场而提前执行它的实物期权。

实物期权的定价技术通常是数值方法，因为很多实物期权固有的相互影响通常不可能用封闭解的形式获得。上述 Photon 公司的例子阐释了这类问题。这些复合型期权的相互影响是非常重要的，因为执行（或不执行）前期的期权（即继续研发活动）会影响到接下来的过程，乃至后期期权的价值（例如新的创新型副产品的可能性）。

19.2 实物期权的应用

净现值（NPV）最初是为了给一个**被动**的投资策略（例如是否投资于债券）估值而发展起来的。但是随后它就被用在了**项目估值**上，因为它是基于现金流的，处理了多期问题，而且应用起来也很容易。通常，NPV 方法假定公司可以无限制地借入资金，并且所考虑的新项目和公司现有的其他项目拥有同样的风险特征。投资一个新项目并不会改变公司原有的风险特性。NPV 决策准则为：

当 NPV>0 的时候，接受一个项目或进行一项投资。

NPV 是**一次性**的决策方法，并且不考虑条件怎么变化，该方法意味着管理者不会变更他们的投资计划。这显然是错误的。因为 NPV 假定先前制定的决策是不可撤销的，但是“基于静态的投资计划而采取一次性决策的理念体系使得眼界趋于狭窄”（Leslie 和 Michaels，1997）。因此，当条件改变的时候，NPV 方法使得管理者很难做出快速并正确的反应。

当一个项目正在进行的时候，经理们可以观察他们的预测精度、总体市场特征以及竞争者的反应。实际上，如果必要的话，经理们会采取行动。他们会改变他们的**战略决策**。换句话说，他们执行实物期权是为了使损失最小化，或是使收益最大化。这样的例子包括提升价格（**提高价格**的实物期权），依比例增加或减少产量（分别是**扩张**和**缩减**的实物期权），或者撤出风险投资（**放弃**的实物期权）。假设实物期权（投资机会）是私人所有的（只由一个公司拥有或持有），那么在执行实物期权前，管理者可能能够增加实物期权的价值。举例来说，通过提高售价或者延长项目的持续期间（牢记期权价值随时间临近到期日而增加），或者通过降低投资成本（即执行价格），经理们可以增加他们实物期权的价值。当然，当标的物资产在流动性好、透明度高的市场中交易的时候，这样的投资行为是不可能实现的，就像金融期权的情形一样。但是很显然，如果管理层具有某种自主判断权，我们则可以处理公司的实际投资决策。

NPV 方法忽略了管理弹性的价值，因此它可能导致不正确的投资决策。NPV 方法是一种静态的“做或者不做”的工具，但由于项目是动态的，我们要求一个能够反映弹性价值的决策准则。图 19—2 总结了 NPV 方法和实物期权估价的输入要素之间的差别，并且从中可以看出实物期权定价方法囊括了投资项目的更多特征。更加重要的是，实物期权考虑到了预计现金流的变动性以及由此带给投资决策战略的附加价值。

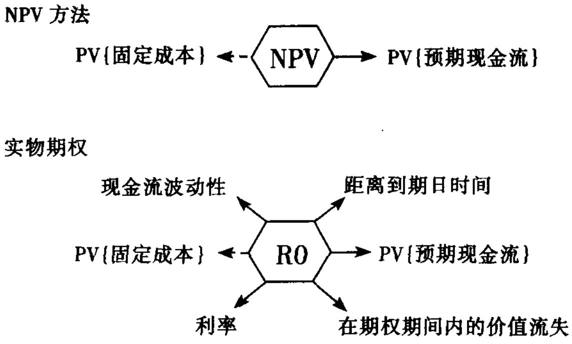


图 19—2　NPV 方法和实物期权的影响因素

由于考虑到战略可能性的重要性，Trigeorgis（1996）提出了一种投资决策修正的 NPV 方法（modified NPV）。在这种**修正 NPV**（＝NPV*）方法下，投资决策准则为：

修正 NPV 方法

当修正 NPV*（＝传统 NPV＋期权价值）大于零的时候，接受一个项目或者进行一项投资。

通过**嵌入的实物期权**的价值来增强通常 NPV 方法的理由是，实物期权数量化了投资项目中固有的管理弹性价值（当新信息出现的时候能够修正决策）。根据朱迪・卢恩（Judy Lewent）（Merck 的财务总监）的说法，所有的商业决策都是实物期权，因为它们赋予了决策者在将来采取一些主动行为的权利而非义务（参见 Leslie & Michaels，1997）。

当现在研究的投资项目有一个很大的正值（负值）的时候，无论如何应该投资于（拒绝）该项目，所以在这个项目中为一个嵌入期权定价并不是非常复杂。在下述情境下，利用实物期权理论可能会非常有用：

- 当必须做出中期决策的时候。
- 当未来的结果具有高度不确定性，即未来现金流具有高度波动性的时候。
- 如果像本章第 3 节所描述的情况，一项投资有一个或多个期权的时候。
- 当该项目未来的现金流的不确定性取决于两个或多个因素的时候（例如天然气田的价值取决于储量和最终售价的不确定性）。
- 以高投资水平为特征的行业只需要保持盈利性（例如重型机器制造业）。

试图确定并接下来为实物期权定价迫使经理们去寻找价值创造的机会。他们可能会确定能为成倍增加随后发生的投资机会“敞开大门”的那种投资。另外一种可供选择的方法是，他们可以将可撤销的和不可撤销的投资决策分离开来。而且，在寻找实物期权的时候，经理们可能会考虑

到未来的结果，于是会花费更多的时间来考虑战略决策。Luehrman（1988）指出战略管理和一系列期权是类似的。确定了期权，那么战略也就被确定了下来，因为所做决策限定了战略方向。事实上，根据不同的结果，经理们会执行各种期权的不同组合，也就是说，当周围环境发生变化的时候，他们也会改变他们的战略决策。但幸运的是，当事件发生的时候，通过考虑这些实物期权，我们就能够得到一个最优的战略。这个过程的结果就是使得经理们事前对于可能发生的情况和在这些结果下做出的决策（即执行哪一个实物期权）有了一个更完全的认识。接下来他们就应该在一系列可能的战略中做出一个比较好的决策。因此，通过确定实物期权，战略和财务分析显然是相互联系的（参见 Luehrman，1988）。

19.3 不同的实物期权

以下部分简要地总结了大多数“嵌入”在公司投资项目中的常见的实物期权。我们假设在每个时期“t”和每种状态（i）下，我们都能够计算出公司的价值（现值）。在每个节点，公司的价值代表了其投资项目（折现到这个节点上的）未来现金流（即收入减去变动成本）的价值。我们将这个价值记做 $S_{t,i}$，但是在不至于引起误解的时候，我们就简单记做 S。

扩张期权

一家公司可能能够增加它的现金流。举例来说，只要它在时间 T 的时候追加投资 K 美元，它就能够将其所投项目的价值增加 x 个百分点（例如通过增加未来的销售额、价格、生产能力或者消费者群体数量）。这种战略可能性是对现有项目的**嵌入看涨期权**，执行价格为 K。假设最初的价值是 S_T，这个价值是公司获得任何扩张可能性之前的价值。这个嵌入看涨期权的收益是：

$$收益=\max[S_T,(1+x)S_T-K] \tag{19.1}$$

其中$[(1+x)S_T-K]$代表公司价值（现值）增加 $x\%$，再减去追加投资成本（在时间 T 的时候）。注意同样的决策准则也可以被写为 $\max[0,xS_T-K]+S_T$，其中 xS_T-K 是相对于没有扩张战略时的净收益。

收缩期权

当公司引进一种新产品（例如一种酒精饮料）的时候，它们会采用一种有序的投资方式，在一个特定的区域投资生产较少的产品来做一个所谓的市场试验。未来是否进行投资，以及是否进行大规模生产取决于市场测试的结果。如果产品销量比预期的要小（导致现金流低于预期值），公司可能为了减少风险暴露而执行其减产期权，这是通过降低未来投资规模——一个嵌入看跌期权来实现的。

我们假设投资有两个阶段。公司不是按计划进行第二次投资 K，而是投资一个比较小的数量 K^*，这使得公司价值降低了 $y\%$。这个期权的收益为：

$$收益=\max[S_T-\mathrm{FV}(K),\ (1-y)S_T-K^*] \tag{19.2}$$

这里为了和 K^* 发生的时间（发生在将来）保持一致，我们用到了“K 的将来值 [FV(K)]”。

暂时关闭期权

假设某个产品的市场空间是不稳定的。公司每年的变动成本（VC）可能被认为是获得未来某年净现金流（即收入减成本）的期权的**执行价格**。为简单起见，我们假设关闭时的现金支出 C 是项目价值 S 的一个百分比（即 $C=xS$，其中 x 是支付比例），并且期权在 1 年后到期。如果预计的现金流小于变动成本，那么经营活动就会中止，从而节约了变动成本 VC。其收益为：

$$\text{收益}=\max(S-\mathrm{VC},\ S-C)-\text{固定成本} \tag{19.3}$$

破产期权

对于一个多阶段的投资项目，只有预期收益大于零的时候，才会执行项目的下一个阶段。如果预期收益小于零的话，那么公司就会执行其提前结束下一阶段（也可能包括未来的阶段）投资项目的期权。因此，如果你今天投资了一个项目，那么你不仅会要求得到项目未来的现金流，而且还包括对下一阶段原计划扩张活动违约的权利。这是一个**继续未来投资活动的看涨期权**，其中执行价格 K 为投资成本。收益为：

$$\text{收益}=\max(S-K,0) \tag{19.4}$$

放弃期权

对公司资产放弃的价值（残值），在一些情况下，可能超过它们当前用途的价值。在这里收益为 $\max(S,A)$。一个流动性较好的处置资产的市场必须存在，这意味着资产必须是标准化的产品，且不是某个工厂特有的资产。举例来说，收购后可能会出现这种类型的期权，这时由于附属部门当前的出售价格 A 超过了这些资产未来的收益，所以它们可能会被卖掉。（有时候它指的是“资产剥离”。）

转换期权

当一项资产有多项用途，需要一系列输入要素，并且在不同用途之间进行转换的时间和成本不是非常昂贵的时候，**转换期权**的问题就出现了。例如一个电力公司会根据哪一种原料更便宜来决定在天然气、煤和石油等输入要素之间进行转换。该转换期权的收益为：

$$\text{收益}=\max[S_1-S_2-\mathrm{CS},0] \tag{19.5}$$

其中，S_1 为当前运营模式 1 的净现值（NPV），S_2 为运营模式 2 的净现值，CS 为从模式 2 到模式 1 的转换成本。

以上的总结并没有列举所有类型的嵌入实物期权。例如，在合资和销售协议中也会有实物期权的问题。在一个销售协议中，协议双方都拥有放弃协议或延长协议期限的期权（例如车库可能

使得汽车销售公司和汽车修理公司都得到扩张）。大公司拥有许可其他公司（通常是在其他国家）使用其专有技术和专利的期权（例如国内一家公司授权其他国家的公司生产和销售它们的产品，比如麦当劳、肯德基和很多啤酒制造厂商）。这样的期权在品牌和研发公司中比较突出，它们的无形资产价值远远超过了有形资产。这样的公司被认为具有很高的特权价值（例如著名的银行和广告代理商）。然而由于它们的复杂性，为这样的期权定价几乎是不可能的。

19.4 期权定价模型

相对于金融期权定价来说，实物期权定价要困难得多。我们可能会用到 Black - Scholes 连续时间框架，或者是 BOPM 的二叉树方法。在下文我们将会看到，相对于前者来说，后者的灵活性比较大，而且看起来比较直观。首先我们来考虑 **Black - Scholes** 方法。这里我们基于项目未来现金流服从几何布朗运动的假设为实物期权定价：

$$dS_i = \mu_i S_i dt + \sigma_i S_i dz \tag{19.6}$$

其中，dz 为标准 Wiener 过程，$E[dz]=0$，$E[dz^2]=dt$，δ_i 为常数，表示红利的收益（即所投项目的现金流），α_i 为项目现金流的增长率，μ_i 为项目包括红利$(=\alpha_i+\delta_i)$在内的总收益。

在 Black - Scholes 方法中，无套利的必要条件就是**市场的完全性**：资产的数量必须大于或等于风险来源的数量。期权实际上是多余的资产，因为它们与其标的资产（如股票）具有同样的不确定性（布朗运动）来源。

利用 Black - Scholes 方法对实物期权进行定价时，需要有同样风险—收益特征的交易证券存在以充当我们考虑的有形投资项目。那么这意味着所有的投资者都认可该实物期权的价值。因此，实物期权的价格或价值与投资者的风险偏好程度无关。

在利用 Black - Scholes 风险中性观点的时候，就实物期权而言，具有同样风险—收益特性的交易证券存在的假设是很薄弱的。大多数与商品项目相分离的实物期权不能够得到对冲。这意味着市场的不完全性——实物期权并不是一项多余的资产，因为它不能够被市场上存在的交易证券复制。如果交易证券不存在，那么证券“就可以在不产生套利利润机会的情况下存在，所以它必须满足基本的 PDE（偏微分方程）”（Trigeorgis，1996）。

当风险来源的数量超过了资产数量的时候，不完全的市场就出现了。从一个实物期权的角度来看，当一个期权中的项目没有同样风险—收益特征的交易等价物的时候，就产生了不完全的市场。通过设计一个与标的资产相对应的指数，完全性就可以被创造出来。例如，只有在基于财产求偿服务机构（PCS）对保险损失调查的指数被创造出来以后，才会有**巨灾期权**的交易。PCS 指数的期货合约和期货期权合约在 CBOT 交易所里进行交易（Geman，1996）。

当实物期权是在竞争者之间分享或存在不可分散风险的时候，不可能利用复制投资组合为实物期权定价。定价也可能会由于中期的现金流入和现金流出而复杂化。

中期现金流

即使是对于金融期权，中期的现金流也会引起问题的复杂化。大多数的投资项目都符合经常

性的“分红”，例如每月产生的现金流、收入/支出的特许权使用费、投资费用以及固定的和变动的经营成本。有一些现金流，例如从成熟产品中得到的每月的现金流，可能利用连续红利收益形成精确的模型，由此通过一个标准框架解决这个问题。由于连续红利使得资产增长率减少了 δ，所以标的物资产 S 的价值减少额为红利收益现值的大小，即 $\mathrm{e}^{-\delta t}$。然而，离散现金流的更为真实的情况是，它们必须作为每个“第 n 个月”月底的一系列红利来考虑，并且为期权估值，我们需要用到数值方法。

在确定性红利的例子中，我们把红利支付日前的每个微小时间段红利的现值加到标的资产 S 上。这保证了在分配红利之后，标的资产的价值与没有红利的标的资产的价值是一致的，并且我们可以应用通常的 Black - Scholes 方法。当不能确切知道现金流大小的时候，估计误差可能会出现。价格的严格形式的解只限于欧式期权，但由于大多数期权是美式的，所以经常会用到二叉树方法。下文中二叉树模型方法将被用在一个数值型的例子中，在附录 19.1 里，我们会详细讲述连续时间欧式 Black - Scholes 定价模型的数学推导过程。

二叉树方法

重组二叉树模型对于实物期权的定价非常有用，因为不同的过程，提前执行和离散的（以及连续的）现金流在该模型中都可能被模拟。大多数实物期权是美式的，因此我们会利用二叉树模型对其定价。经理们通常倾向于使用二叉树技术，而不是其他的数值型技术，因为在二叉树模型下，他们可以清楚地看到项目现金流的进展情况以及相应的期权价值。于是这就使得经理们对将来可能面临的一些决策有了某种直觉。

BOPM 模型模拟了公司价值的进展情况，并且期权的价值可以通过期权到期日的每个节点的情况递推得到。在每个节点上，根据相应的风险中性概率 q 和 $1-q$，向上或向下移动到下一个节点（见图 19—3）。Cox 等在 1979 年指出，当时间变化量 dt 趋近于零的时候，利用 BOPM 模型得到的欧式期权价格收敛于用 Black - Scholes 模型得到的价格。期权价值的递推风险中性期权定价公式为（参见第 8 章更详细的论述）

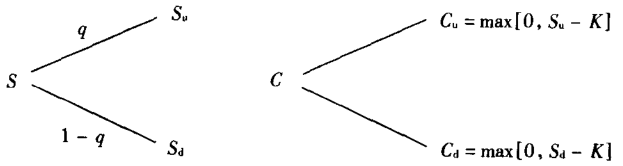


图 19—3 一阶段 BOPM

$$V=\mathrm{e}^{-r\Delta t}[qV_u+(1-q)V_d] \tag{19.7}$$

其中

$$q=(\mathrm{e}^{r\Delta t}-D)/(U-D),\quad U=\exp(\sigma\sqrt{\Delta t}),\quad D=1/U$$

19.5 数值实例

现在我们举一些数值例子来阐述二叉树期权定价模型对不同的实物期权定价的过程。我们来

考虑投资活动的扩张、收缩、放弃、违约以及不偿还债务的实物期权。另外，我们还会讨论一个关于偿还债务和投资的复合型违约期权（Trigeorgis，1996）。

假设一家软件公司 Palm 为扩张进入掌上电脑市场而发行股权。Palm 公司确信它能够用与竞争者同样的费用水平建立市场份额。通过总计竞争者的账目，每年公司的价值波动率为 $\sigma=69\%$。总股价向上向下变动的**真实概率**为 $p_u=p_d=0.5$。根据这条信息，Palm 公司利用二叉树模型来估计它来年的总股价，即公司价值（见图 19—4）。

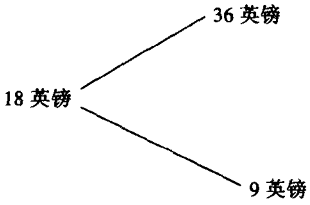


图 19—4　Palm 公司股价的变动情况

传统 NPV 方法

根据股票价格的数据，Palm 公司首先估计出用于折现项目现金流的风险调整贴现率（RADR）。我们之所以能够应用这个折现率，是因为我们假设项目价值与总股票价格是完全相关的：

$$\text{RADR}=\frac{E[S_1]}{S_0}-1=\frac{(0.5\times 36.00\text{ 英镑})+(0.5\times 9.00\text{ 英镑})}{18.00\text{ 英镑}}-1=25\% \tag{19.8}$$

接下来我们利用 $\sigma=0.69$ 计算公司价值向上和向下的变动：

$$U=\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=\mathrm{e}^{0.69\sqrt{1}}=1.99 \tag{19.9a}$$

和

$$D=\frac{1}{U}=0.5 \tag{19.9b}$$

因此，在图 19—5 中，公司价值由 $S_u=S_0U$，$S_d=S_0D$ 等给出，其中 $S_0=90$。现在我们就有了公司价值的二叉树模型。

图 19—5 给出了现金流的基线，以后的例子会由这些现金流的修正值组成。用 RADR 折现，则我们的项目现值为 90 英镑，但是今天的资本成本为 $I_0=105.4$ 英镑，于是：

项目的“传统”NPV＝PV－I_0＝－15.4 英镑。

我们假设这个项目是公司战略计划中的关键部分。我们是否忽略掉了项目中的弹性？NPV 接近于零，那么我们能够利用实物期权理论来解释可能嵌在该项目中的附加战略机会吗？

实物期权的 BOPM 模型

为应用实物期权理论，BOPM 要求风险中性概率。假设 1 年期的无风险利率为 5.25%，收

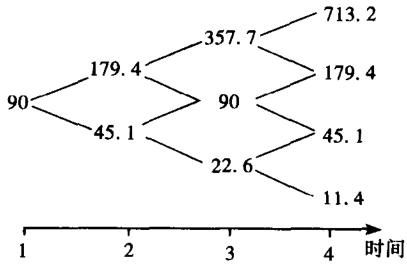


图 19—5　“基线”估值的变化情况

益率曲线在 3 年内是平坦的，且时间变量 Δt 为 1 年。那么风险中性概率由下式给出：

$$q=\frac{e^{r\Delta t}-D}{U-D}=\frac{e^{0.0525}-0.5}{2-0.5}=0.37 \quad 并且 \quad (1-q)=0.63 \tag{19.10}$$

现在我们就有了为不同实物期权定价的基本信息，这些期权是嵌在这个项目中的。下面我们逐个讨论这些期权。

扩张期权

如果对公司产品的需求意外增加的话，那么在未来的某个时间点，增加产量和销量的能力对公司来说显然是有价值的。看一下公司的财务压力，就能说明这种情况其实是经常发生的（例如移动电话、数字电视机）。假设在 $t=0$ 时刻，我们注意到投资这个项目使得我们拥有了在第 3 年的时候追加投资 $I_3=45$ 英镑的权利（而非义务），并且这样做只能把第 3 年的收入（指其现值）增加 50%。为了给这个扩张期权定价，我们需要考虑哪种情况下我们会执行这个期权。于是其收益为：

$$收益=\max[(1+e\%)S_3-I_3,S_3] \tag{19.11}$$

其中，S_i 为在第 i 年公司的价值（见图 19—5），e%（=50%）为现金流增加的比例，I_3（=45）为增加产量所需要的追加投资。

我们用递推的方法从网格的 $t=3$ 时刻（见图 19—6）开始讨论。考虑在 $t=3$ 时刻开始，在“uud”的节点上，$V_{3,\mathrm{uud}}^{*}=\max[(1+e)S_{3,\mathrm{uud}}-I_3,S_{3,\mathrm{uud}}]\max[1.5(179.4\text{英镑})-45\ 179.4\text{英镑}]=$ **224.1 英镑**。其中 $S_{3,\mathrm{uud}}=179.4$ 英镑为初始现金流，这在图 19—5 中能够看出来。因此在“uud”节点是值得增加产量并且执行期权的。在图 19—6 中，黑体字显示了哪种状态下扩张期权会被执行，可以看出在第 3 年两种向上的状态中会发生。

这个实物期权只在 $t=3$ 的时候才会被执行，由于该期权是欧式的，它在 $t=3$ 之前年份的价值将由公式（19.7）给出。通过图 19—6 给出的“新”的网格，我们由 $t=3$ 的情况往回计算。于是项目在 $t=0$ 时刻“新”的价值为：

$$V_0^{*}=e^{-0.0525}[0.63(50.7)+0.37(236.6)]=113.4(\text{英镑}) \tag{19.12}$$

因此，在扣除了初始投资成本 $I_0=105$ 英镑后，修正 NPV 值为：

$$\mathrm{NPV}^{*}=V_0^{*}-I_0=113.4\text{ 英镑}-105.4\text{ 英镑}=8(\text{英镑}) \tag{19.13}$$

修正 NPV 的正值很大，足够促使我们决定投资这个项目。并且这个嵌入扩张期权的价值为：

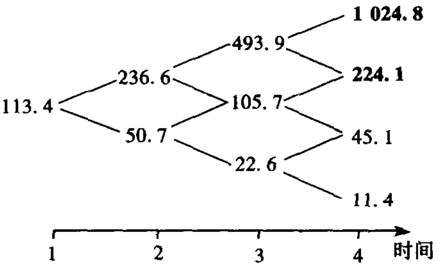


图 19—6 估价：扩张期权

$$扩张期权的价值=NPV(持有期权)-NPV(未持有期权) \tag{19.14}$$
$$=NPV^{*}-NPV=8-(-15.4)英镑=23.4(英镑)$$

这个实物期权的价值等于初始投资额 $I_0=105$ 英镑的 22%。考虑到在后期进行扩张的实物期权，我们可以看出最初的项目总是值得采纳的。这充分显示了实物期权的力量：它们压缩了某个特定项目中与变化的环境相关的价值以及嵌在项目中的未来战略机会。而简单的 NPV 方法忽略了实物期权的价值。

收缩期权

当存在缩减经营规模的可能性的时候，管理者获得的灵活性是有价值的（例如可以做到节约成本），并且这可以利用实物期权理论来验证。

为解释可能涉及的结果，我们来考虑一个略微不同的情景：我们现在只投入项目初始投资 105 英镑中的 50 英镑，其余部分在 1 年后投入。在 $t=0$ 的时候，我们以无风险利率投入现金 55 英镑(=105−50)，它的价值在 1 年后为 $I_1=58$ 英镑。假设在第 1 年，如果我们认为届时现金流(利润)低于预计 55%，那么我们可以选择投入较少金额 $I_1^{*}=10$ 英镑($<I_1$)。如果现金流确实因为各种各样可能的原因（例如经济萧条、低需求、激烈的竞争）低于预期值，那么我们就会执行这个收缩期权。其收益为：

$$收益=\max[S_1-I_1,(1-c\%)S_1-I_1^{*}] \tag{19.15}$$

其中，S_1 为公司在第 1 年的价值(见图 19—5)，I_1(=58 英镑)为第 1 年的计划投资额，I_1^{*}(=10 英镑)为第 1 年较低的投资，$c\%$(=55%)为我们投入较低的投资额时现金流的减少幅度，$I_1^{*}=10$ 英镑。

利用上述公式得到的价值如图 19—7 中 $t=1$ 时刻所示。在较低的节点上，收益$=\max\{45.1-58, 0.45(45.1)-10\}=10.3$。在上面的节点上，收益$=\max\{179.4-58, 0.45(179.4)-10\}=121.4$。利用公式 (19.7) 我们得到项目的现值为 $V_0^{*}=48.8$ 英镑。当我们计入实物期权的价值时，项目的修正 NPV 为：

$$NPV^{*}=V_0^{*}-I_0=48.8英镑-50英镑=-1.2(英镑) \tag{19.16}$$

修正 NPV 是负值，因此即使考虑了嵌入收缩期权的价值，我们也应该放弃这个项目。注意收缩期权的价值为：

$$收缩期权的价值=NPV(持有期权)-NPV(未持有期权)$$

$$=\text{NPV}^*-\text{NPV}=-1.2-(-15.4)\text{英镑}=14.2(\text{英镑}) \qquad (19.17)$$

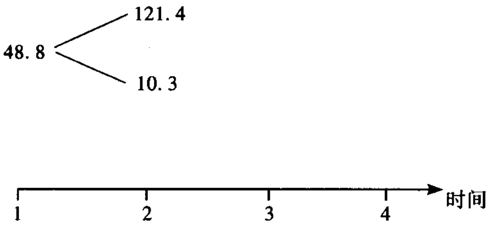


图 19—7　估价：收缩期权

这个“期权”大约等于项目总价值 $I_0+\text{PV}(I_1)=50$ 英镑 $+55$ 英镑 $=105$ 英镑的 13%。当在一个不确定的市场中引入一种新产品的时候，或者当一家公司偏好于较低的初始投资，但是通常需要较高的运营成本（为了保持管理弹性）的时候，收缩期权是非常有价值的。

放弃项目的美式期权

当公司发现它们在一个大萧条的环境中经营的时候，它们可能会希望停掉项目，而不是继续经营导致亏损。现在我们就来考虑一个放弃期权。假设该项目可以在接下来的 3 年内的任何一个时间，以一个固定的残值放弃，并且在市场环境恶化的时候，这个期权可能会被执行。（注意，我们为使问题简单化而做的固定残值的假设在所有年份都是不现实的，但是这很容易得到修正。）在 $t=0$ 时刻我们投入了全部投资额 105.4 英镑。那么在任何一年放弃期权的收益为：

$$\text{收益}=\max(S_i, A) \qquad (19.18)$$

其中，S_i 为第 i 年项目的价值(见图 19—5)，A 为残值(=60 英镑)。在 $t=3$ 时刻，只有在最下面两个节点的情况(见图 19—8)下，执行放弃期权才是值得的，在这两个节点上，我们有 $\max(45.1, 60)=60$ 以及 $\max(11.4, 60)=60$。所以在上面的两个节点上，我们不执行放弃期权，并且保持价值为 $S_i=V_i=713.2$ 和 179.4(由图 19—5 得到)。在投资的前几个年份(第 2 年、第 1 年、第 0 年)中，就像其他的美式期权一样，我们来验证一下是执行期权还是继续持有期权到下一年。我们把期权的递推价值与早期执行价值“A”做比较：

$$V_{t-1}=\max\{\mathrm{e}^{-r(\mathrm{d}t)}(qV_t^{\mathrm{u}}+(1-q)V_t^{\mathrm{d}}), A\} \qquad (19.19)$$

例如

$$V_{2,\mathrm{ud}}=\max[\mathrm{e}^{-0.0525\times1}(0.37\times179.4+0.63\times60), 60\text{ 英镑}]=98.9(\text{英镑}) \qquad (19.20)$$

$V_{2,\mathrm{ud}}$为第 2 年 UD 节点期权的价值。对图 19—8 网格中其他节点的值重复这一过程，用黑体标出的数字意味着在这一点我们会放弃这个项目（即在节点 3-DDD，3-DDU 和 2-DD 上执行期权）。通过与图 19—5 比较，我们发现项目的残值 60 英镑充当了现金流底限的角色。

持有放弃期权时项目的现值为 $V_0^*=107.1$ 英镑（见图 19—8），修正 NPV 为：

$$\text{NPV}^*=V_0^*-I_0=107.1\text{ 英镑}-105.4\text{ 英镑}=1.7(\text{英镑}) \qquad (19.21)$$

其中，$I_0=105$ 英镑为 $t=0$ 时刻的投资额。修正 NPV 为正值，所以我们应该接受这个项目。美式放弃期权的价值为：

期权价值=NPV(持有放弃期权)−NPV(未持有放弃期权)

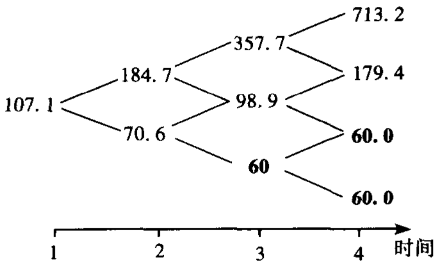


图 19—8　估价：美式放弃期权

因此

$$期权价值=NPV^{*}-NPV=1.7\ 英镑-(-15.4\ 英镑)=17.1(英镑) \quad (19.22)$$

放弃期权的价值大约等于项目总价值（$I_0=105$ 英镑）的 16%。

投资费用的违约期权

接下来的例子适用于这样一种特殊类型的项目，其投资成本是分布在几年之内的。例如，一个汽车生产厂商可能在最初建立了一家较小规模的工厂，然后来估计 1 年后市场对汽车的需求水平以及为应对超过预计的需求而付出的追加成本。如果 1 年后的需求较低，那么你就该执行建立大规模工厂的违约实物期权，由此节约了追加投资成本。为简化起见，我们只考虑投资成本分布在项目最初两年内的情况。

因此，我们考虑在两个阶段内投入资金 105 英镑。首先，$I_0=50$ 英镑，现在就可以投入项目。剩下的 55 英镑以无风险利率进行投资，1 年后本息和为 $I_1=58$ 英镑。这时我们选择是否继续第 1 年的投资，以及是否建设剩下的厂房。该决策取决于

$$收益=\max(S_1-I_1,0) \quad (19.23)$$

在 $t=1$ 时刻，现金流最初（见图 19—5）为 179.4 英镑和 45.1 英镑，因此当我们投入 $I_1=58$ 英镑时，通过公式（19.23）我们得到的收益分别为 121.4 英镑和 0 英镑（见图 19—9）。

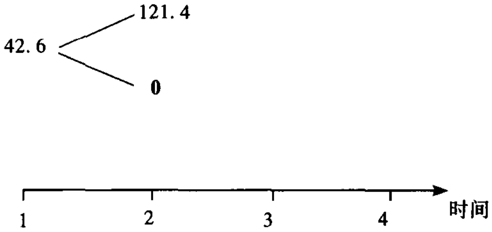


图 19—9　估价：投资项目的违约期权

递推得到的 $t=0$ 时刻的期权价值应该和 $t=0$ 时刻不进行投资时的零收益进行比较：

$$V_{t-1}=\max[e^{-r(dt)}(qV_t^u+(1-q)V_t^d),0] \quad (19.24)$$

在 $t=0$ 时刻，对 $t=1$ 时刻未来投资的违约期权价值为 $V_0=42.6$ 英镑。图 19—9 显示了在一种情况下，我们会执行投资项目的违约期权，这是因为 $V_1-I_1=42.6-58<0$。这种类型的实物期权在波动剧烈的市场中尤其有价值，在该市场中，采纳项目的投资成本可能超过项目未来收入

的现值。修正 NPV 为：

$$\text{NPV}^* = 45\text{ 英镑} - I_0 = 42.6\text{ 英镑} - 50\text{ 英镑} = -7.4(\text{英镑}) \tag{19.25}$$

违约期权的价值为：

$$\text{期权价值} = \text{NPV}^* - \text{NPV} = -7.4\text{ 英镑} - (-15.4\text{ 英镑}) = 8(\text{英镑}) \tag{19.26}$$

放弃未来投资的期权价值大约为项目总价值的 8%。即使考虑到持有的嵌入期权的价值，我们也会拒绝这个项目，因为修正 NPV（即 NPV*）为负值。

对债务偿还违约的股东期权

Palm 公司可以通过发行债权和股权来为它扩张进入软件业务融资。假设 55 英镑为股权，其余 50 英镑是利率为 20%的债券（注意在现金流波动幅度为 69%的情况下，举债实际上是不可能的，但是在这里我们忽略掉了这一点）。为简化问题，我们假设债券是零息票的，于是我们就不用考虑每年利息支付的违约问题。因此债券本金加利息会在第 3 年偿还，并且第 3 年时 Palm 公司欠款金额为 $D_3 = [50\text{ 英镑} \times \exp(0.2 \times 3)] = 91$ 英镑。如果第 3 年 Palm 公司的市场价值超过了其所欠债券金额（91 英镑），那么债券就会得以偿还。如果不是这样，那么股东就会执行他们的违约期权，并且把公司的所有权转移给债权人。在第 3 年股东的收益等于执行价格为债务余额市场价值的看涨期权的收益：

$$\text{收益} = \max(S_3 - D_3, 0) \tag{19.27}$$

S_3 的值由图 19—5 中 $t=3$ 一行给出，并且图 19—10 中的最上面和最下面分支的收益分别为

$$\text{收益(node UUU)} = \max(713.2\text{ 英镑} - 91, 0\text{ 英镑}) = 622.2(\text{英镑}) \tag{19.28a}$$

和

$$\text{收益(node DDD)} = \max(11.4\text{ 英镑} - 91, 0\text{ 英镑}) = 0(\text{英镑}) \tag{19.28b}$$

这个违约期权是欧式的，因此它在前几个年份中的价值等于通过公式（19.7）递推得到的值，并且在 $t=0$ 时刻，$V_0^* = 46.5$ 英镑。

图 19—10 显示了持有债务违约期权时现金流的价值。股东在第 3 年下面的两种状态中会执行违约期权（即最初的现金流为 11.4 英镑或 45.1 英镑的时候，见图 19—5）。当现金流非常不稳定，并且以后的项目价值变小的时候，使项目价值确定为零的能力是很有意义的。修正 NPV 以及债务偿还的违约期权的价值为：

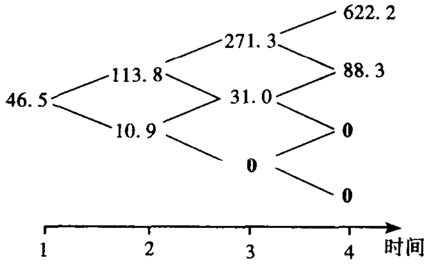


图 19—10　估价：债务偿还的违约期权

$$\text{NPV}^{*} = V_0^{*} - I_0 = 46.5\text{ 英镑} - 55.4\text{ 英镑} = -8.9(\text{英镑}) \tag{19.29a}$$

$$\text{股东所持有期权的价值} = -8.9\text{ 英镑} - (-15.4\text{ 英镑}) = 6.5(\text{英镑}) \tag{19.29b}$$

期权价值大约是项目总价值的 6%。即使是这样，我们仍然不会采纳这个项目，因为其修正 NPV（NPV*）是负的。

组合期权：不可加性

现在我们来考虑上述两个实物期权组合的情况，即未来投资费用的违约期权和债务偿还的违约期权。初次遇到这个问题，你可能会认为组合期权的价值就是两个单个期权各自价值的简单加总，即等于 8 英镑+6.5 英镑（见上文叙述）。但是这样做却是错误的，因为两个期权的收益是相互关联的。在这种组合的情况下，公司既有对 1 年后的投资费用违约的期权，也有在 3 年后关闭工厂的期权（并且将所有的剩余资产移交给债权人）。

假设 Palm 公司借入 50 英镑债券并将该笔资金立即投入项目中。而 55 英镑的股权资本则以 $r=5.25\%$的利率在货币市场投资 1 年，1 年后累积为 $I_1^{\text{股权}}=58$ 英镑，然后将其投入项目中。由于我们已经保留了在第 3 年对债务（$D_3=91$）英镑偿还的违约期权，所以在第 2 年和第 3 年，股东对债务偿还的违约期权（如图 19—10 所示）的价值是相同的。递推得到的第 1 年的债务违约期权由图 19—10 中的贴现风险中性估值给出。但是持有了这种组合期权，我们现在需要将第 1 年投资费用违约期权的递推价值组合到一起。在 $t=1$ 时刻追加投资费用 $I_1^{\text{股权}}$ 的违约期权的收益为

$$\text{收益} = \max(S_1 - I_1^{\text{股权}},\ 0) \tag{19.30}$$

在 $t=1$ 时刻，从图 19—10 中，我们知道债务违约期权的价值为 $S_{1u}=113.8$ 英镑和 $S_{1d}=10.9$ 英镑。然而，利用投资费用违约期权的收益，我们得出了节点 U 和 D 的新的价值：

$$V_{1u} = \max(113.8\text{ 英镑} - 58, 0\text{ 英镑}) = 55.8(\text{英镑}) \tag{19.31a}$$

和

$$V_{1d} = \max(10.9\text{ 英镑} - 58,\ 0\text{ 英镑}) = 0(\text{英镑}) \tag{19.31b}$$

以上就是图 19—11 中 $t=1$ 时刻的两种分支情况。这些现金流在 $t=0$ 时刻的价值为 $V_0^{*}=19.6$ 英镑。

修正 NPV 的值为 NPV* =19.6 英镑，并且投资违约和债务偿还违约的组合期权的价值为

$$\text{组合期权价值} = \text{NPV}^{*} - \text{NPV} = 19.6 - (-15.4)\text{英镑} = 35(\text{英镑}) \tag{19.32}$$

该值大约等于投资项目总价值的 30%。“组合期权”的价值与其组成部分的价值显然不是线性关系。投资费用违约期权和债务违约期权的价值分别为 8 英镑和 6 英镑，但是它们的组合价值为 35 英镑。这是一个不同实物期权之间相互影响的相对简单的例子，其组合期权的估值相对来说也比较容易。实际上，一个项目中嵌入的实物期权（它们的价值和执行与否要视前一个期权而定）越多，组合期权的估值就变得越为复杂。我们能够看到组合期权价值占整个项目总价值的比例远比我们可能预计的要高，这要归因于复合性和各个期权相互作用的影响。

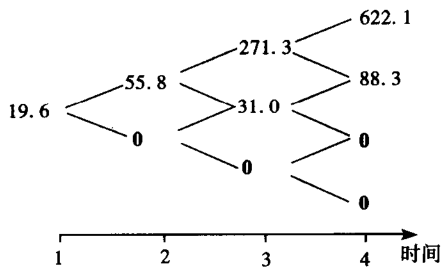


图 19—11　估值：投资费用和债务偿还的违约期权

在我们的网站上可以找到上述利用 Excel 模板对实物期权估值的 BOPM 方法，要求用户输入的因素可以在表格 19—2 的 Excel 模板中看到，“结果”显示的是上述组合违约期权的价值。

表 19—2　　**实物期权估值**

Excel 模板：产生一个标的资产的二叉树模型，然后在这个网格上为实物期权估值。

© Alexander Workman, K. Cuthbertson, D. Nitzsche, Imperial College, London SW7.

请不要修改浅蓝色背景中的任何文字；绿色背景为需要用户输入的部分。

输入要素标的资产的初值	S		90	
投资成本			105	
资产波动幅度	σ		69.00%	
利率	r		5.25%	
距离到期日时间（年）			3	
时间阶段		年		▼
时间间隔数			3	
最大节点数			4	
期权类型		投资和债务违约		▼
扩张期权（欧式）	期权执行所在的期间		3	
	初始投资额		105	
	所占百分比		50%	
	追加投资额		45	
收缩期权（欧式）	期权执行所在的期间		1	
	初始投资额		50	
	第二阶段投资额		58	
	所占百分比		−55%	
	可供选择的第二阶段投资额		10	
放弃期权（美式）	期权执行所在的期间		3	
	初始投资额		105	
	残值		60	

续前表

投资违约期权（欧式）		期权执行所在的期间		1	
		初始投资额		50	
		第二阶段投资额		58	
债务违约期权（欧式）		债务违约发生的期间		3	
		股权		55	
		债权		50	
		债券的息票利率		20%	
投资和债务的违约		债务违约发生的期间		3	
		股权		55	
		债权		50	
		债券的息票利率		0.2	
		投资违约发生的期间		1	
		初始投资额		50	
		第二阶段投资额		58	
		资产价值			
		90	179	358	713
			45	90	179
				23	45
					11
结果输出					
NPV	−15.00	期权价值			
NPV*	19.61	20	56	271	622
期权价值	36.41		0	31	88
				0	0
					0

19.6 深层次的问题

正如我们在前文中提到的，由于**复合性**、期权间的相互作用以及**所有权**问题，实物期权的估值比金融期权的估值要复杂得多。这就给学术界和从业者带来了十分有趣的问题，但是在这里我们只是略微提及。

复合性

在一个期权框架中，复合性问题是指期权的期权（的期权!）。后面期权的价值可能取决于前面期权的执行，反之亦然。复合期权的估值非常困难。有以下两种类型的复合性。

项目间复合性是指一笔初始投资引发了其他领域的更多的投资机会。一笔初始投资的 NPV

值可能为负，但是它可能会为一系列增值项目提供契机。例如，英国一家负责铁路和信号投资的公司 Railtrack plc，可能选择对它的铁路信号传输网络进行升级。但是这可能导致太多的剩余生产能力，于是它们就可以用这些电子链接进入电信市场。

项目内复合性是指在一个项目内部存在的复合性问题。这里，初始投资购买了该项目的一个期权“组合”。现在考虑一下研发的问题。初始投资使得研究活动开始成为可能。然而，如果最初研发是成功的话，那么后期投资将会导致未来研发支出的增加（例如购买新的或更多的设备，雇用更多的研究人员）。因此，研发活动是分几个阶段进行估值的，并且未来研发投资取决于前一阶段的研发是否成功。这是一种复合期权，下一阶段投资决策是前一阶段研发结果的看涨期权。另外一个例子就是分阶段付款的工厂建筑投资。首次支付包括了获得项目许可证的成本，第二次支付基础设施的费用，第三次付款包括了购置建筑用土地的费用，第四次为建筑成本，最后一次为装备工厂的费用。每一期的付款可以被认为是继续后期投资的期权的执行价格。很显然，公司可能会执行这个对后期付款违约的期权。例如，如果突然有一个过剩的生产能力，公司就可能会对第五次付款违约，并将已建成的厂房作为仓库使用。大多数项目都存在不同程度的项目内复合性问题。

相互作用

在一个连续的复合型的期权中，如果存在一个**期权组合**，那么这时相互影响的问题就变得尤为重要了。在有其他实物期权存在的情况下，一个实物期权的价值与它在没有其他期权情况下的价值可能是不相等的。这时估值存在的问题非常严重，这里我们只简要地提及这一问题。

后期期权的存在有效地增加了前期期权标的资产的价值（Trigeorgis，1996）。后期期权的执行可能取决于前期期权的执行，于是这就导致了前馈（feed-forward）影响。一个极端的情况是：前期期权的执行可能会完全扼杀了后期期权执行的可能性。例如，如果前期的期权是**放弃**这项风险投资，而后续期权是租赁资产的话，那么执行前期的“看跌期权”就使得后期没有资产可供出租，从而后续期权也就不能得到执行。

相互作用的情况也可能是下面的类型。现在我们考虑在 t_0 时刻投资于一个项目。假设该项目产生了现金流和两份期权，而这两份期权只能分别在 t_1 和 t_2 时刻执行。现在，执行 t_1 期权既改变了标的资产，也改变了执行第二个期权的概率，于是也就改变了第二个期权的价值。如果第一个期权是看跌（看涨）期权，那么相对于它单独存在的情况，它现在会有一个较低（较高）的价值，而且相互作用的影响是负的（正的）。因此在估值的时候，我们就面临着一个严重的相互作用问题。如果 t_1 和 t_2 期权都是看跌期权（看涨期权），那么就会有一个双重的负的（正的）影响。两份期权的增值都超过了它们单独的价值。相互作用影响的级别与联合执行的概率是成比例的。

不完全性、复合性、竞争以及相互作用使得 Black - Scholes 框架面临着严重的估值问题。为获得“符合实际”的期权价值，理论的重大修正变得非常必要，这是这个领域研究的前沿问题。

所有权和竞争问题

金融期权属于私有财产，而实物期权可能是几个竞争者共有的。大多数实物期权的标的资产都不进行交易，于是期权持有者就不能对冲掉他们的头寸。

私有的实物期权是由某个公司单独控制的，于是当条件最优时公司就可以执行这个期权，而不用顾及其竞争公司的行动。当进入壁垒很高的时候，就会出现私有实物期权。例如，微软公司在 PC 操作系统市场中处于绝对的统治地位，以至于它采取战略决策的时候经常不用考虑其竞争对手会如何行动。巴菲特（Buffett）和 Clark 在 1997 年曾说到，Warren Buffett 投资于那种具有有效的“收费桥”（toll bridge）的公司，对于这种公司，建立一个竞争公司的成本是非常昂贵的。

相比较而言，对于**共有实物期权**，执行时间部分地取决于竞争对手所采取的行动。先发制人执行期权在这里变得很重要：为了获得“率先行动者”优势，我们可能在真正准备执行期权前就采取行动。这里竞争者的行为非常重要，我们可能会用到博弈理论来对实物期权定价。现在我们来考虑两个公司。两个公司都可能立即投资，也可能延迟投资，而这取决于并独立于对方的行为。最终结果可以用一个（非重合的）二叉树来表示，但是考虑到公司的数量和可能的结果，二叉树模型的节点数目会呈指数形式增长。Trigeorgis（1996）展示了一个包含了外生的竞争者进入时间的混合型泊松—几何布朗运动过程，该模型用来对欧式实物期权进行估值。Trigeorgis 假设当竞争者加入竞争后，实物期权的价值会有一个显著的下降。这些假设不一定是完全符合实际的，模型模拟了带红利的美式看涨期权，其价值的下降幅度等于红利的支付额。为继续这个例子，我们假设公式（19.6）中的扩散过程有一个阶跃或者泊松成分：

$$\mathrm{d}S=(\alpha-\delta)\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z+(k-1)\mathrm{d}N \tag{19.33}$$

其中，δ=红利收益，$\mathrm{d}N=1$（以 $\lambda\mathrm{d}t$ 的概率），$\mathrm{d}N=0$（以 $1-\lambda\mathrm{d}t$ 的概率）。由以上模型可以得出实物期权的价值，R（S，t）：

$$R(S,t)=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^N}{N!}\left[S\mathrm{e}^{(-D+\delta)\tau}N(d_1')-I\mathrm{e}^{-r\tau}N(d_2')\right] \tag{19.34}$$

其中，$d_1'=\dfrac{\ln\ (S/I)\ +\left(r-\delta-v+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$，$d_2'=d_1'-\sigma\sqrt{\tau}$，$v=\lambda(k-1)-(N/\tau)\ln k$，$k$ 为竞争者加入竞争后项目剩余价值所占比例，λ 为加入竞争的瞬时概率，S 为标的资产的价值，I 为投资成本。

在上述公式中，我们假设竞争对手加入时间是随机的，这就接近于通常的连续红利分配的情况。又假设已存在的公司发生的损失是不能够分散掉的。这些简化的假设允许该公司与其竞争公司相互作用而“挤进”传统的期权估值框架中。然而，如果这些简化不符合实际的话，在这种相互作用和相互依赖的情况下，对实物期权估值会变得非常困难。

19.7　网络公司的估值

在网络公司和生物技术公司的收入较低，并且经营利润（即 EBITDA，利息、缴税、折旧和摊销前收入）通常为负的情况下，股票市场对它们的估值有时却异乎寻常的高。当然，它们的股票估价也具有很高的波动性。这些股票价格是公平的还是被高估了？如果是被高估的话，那么当市场条件改变的时候，我们应该预期这些价格下跌多大的幅度？一个股票分析师在利用传统 DPV 技术对这些类型的公司进行估值时，在预测未来现金流（仅根据非常有限的数据）和设定一个适当的贴现率方面都遇到了很大的困难。那么实物期权理论对于这个问题会有所帮助吗？

公司估值是前瞻性的（forward looking），并且这些公司中可能会嵌有潜在的实物期权，这意味着公司可能会有很高的价值。特别是在掌握了网络（dot. com）知识的情况下，以后进行扩张的期权尤为重要。我们已经知道，可能出现结果的波动性越大，这些嵌入期权的价值就越高。

在本节中，我们将会讨论实物期权理论以及蒙特卡罗模拟方法（MCS）是怎样被用来对这些网络公司估值的，并展示这些估值结果对市场变量（例如销售收入较低的平均增长率）变化可能的敏感度。我们的分析是 Schwartz 和 Moon 在 2000 年的简化版本，他对 Amazon. com 公司进行了估值。为应用 MCS 方法，我们要求具备这些网络公司面临的关键经济变量（例如收入和成本）的随机模型。这个模型的不确定性有两个来源：一个涉及收入的实际变化，另外一个涉及收入的预期（或者平均）增长率。我们假设收入 R 经过风险调整的过程是均值回归的：

$$\frac{\mathrm{d}R_t}{R_t}=(\mu_t-\lambda_1\sigma_t)\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}z_1^* \tag{19.35}$$

其中，μ_t 为收入的增长率，σ_t 度量收入的波动率，λ_1 为风险的市场价格，$\mathrm{d}z_1^*$ 指 Wiener 过程。波动率 σ_t 是时间的确定性函数，并且在网络公司逐步成长的过程中，σ 会下降到一个长期的平均水平（每个季度 $\sigma=5\%$或者每年 10%）。其初值为每个季度 $\sigma_0=10\%$（或者每年 20%）。收入的增长率是一个均值回归的随机过程：

$$\mathrm{d}\mu_t=[k(\bar{\mu}-\mu)-\lambda_2\eta_t]\mathrm{d}t+\eta_t d_2^* \tag{19.36}$$

由 η_t 给出 μ 的波动率会以一种确定的形式（即指数形式），从初值每个季度 $\eta_0=30\%$（或者每年 60%）衰减到零。长期增长率的值取为 $\bar{\mu}=1.5\%$（即每年 6%），但是增长率的初值相对较高，其值为每季度 $\mu_0=11\%$（每年 44%）。收入的变化量和增长率有一个相关系数 ρ（即 $\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2=\rho\mathrm{d}t$）。

成本由两部分组成：一部分是固定成本 F，另外一部分是与收入成比例的成本 $(\alpha+\beta)$ R：

$$C_t=F+(\alpha+\beta)R_t$$

$(\alpha+\beta)$ 在这个例子中为 94%，利润率为销售收入的 6%。公司的现金流（忽略掉缴税）为

$$Y_t=R_t-C_t$$

并且现金余额的变化量 $\mathrm{d}X$ 为

$$\mathrm{d}X=-Y_t\mathrm{d}t$$

我们假设所有的现金都作为留存收益，并以无风险利率 r 累计生息。如果现金余额变为零的话，那么公司就会破产（即我们忽略掉了将来其他融资的可能性）。

尽管上述模型是高度简化的，但是我们已经有了为公司估值的雏形。首先我们需要估计收入 R_0 的当前价值、收入的增长率 μ_0、收入的波动率 σ_0 以及平均增长率的波动率 η_0。估计数据可以从该网络公司的账目（过去的账目）上得到，或者通过行业内相似公司的横截面数据，或者直接通过主观判断得到。系数 ρ 可以由时间序列数据估计得到，但是 Schwartz 和 Moon 最初猜测 $\rho=0$。利用公式（19.35）和公式（19.36），我们可以得到在一个特定的期限（$T=25$ 年）内公司收入 R 的终值，因而得到 Y_T 和 X_T 的终值。在 T 时刻，我们假设公司被清算，累积的所有现金 X_T 都分配给了股东。在风险中性估值的情况下，今天（即 $t=0$）公司的价值就是其预期收入的现值：

$$V_0=\mathrm{e}^{-rT}E^*[X_T] \tag{19.37}$$

如果多次重复 MCS 过程，我们就可以把上述公式中的 $E^*[X_T]$ 替换为 X_T。某些 X_T 的值为零，当 $t<T$ 时，某些特殊的 MCS 过程导致 X_t 为零的时候这种情况会出现，因为这个时候公司会破产。事实上，Schwartz 和 Moon 还用到了另一种可供选择的估价方法，他们假设在 $T=25$ 年的时候（所有 MCS 结果平均得到），Amazon 公司的价值等于 10 倍的 EBITDA（即 Y_T）。我们也可以通过改变模型中一个或更多输入要素（例如平均增长率 $\bar{\mu}$）的值来进行敏感性分析，从而得到公司的一个新的估值结果。

Schwartz 和 Moon（2000）利用一个比上述模型复杂得多的模型，得出到 1999 年 12 月为止，Amazon 公司的价值为 55 亿美元。因此如果预期收入增长率很高的话（在这里从最初的 $\mu_0=44\%$/年逐步下降到长期的 $\bar{\mu}=6\%$/年），那么网络公司的价值就可能没有被高估。即使公司确实有破产的可能性（例如有 28% 的 MCS 结果显示公司会破产），但如果最初预期的增长率为一个合理的值（μ_0），且增长率有足够大的波动性（这里当公司逐渐成熟的时候，η_0 逐渐从每年 60% 下降到零）的话，公司仍然会有一个很高的市场价值。举例来说，如果 η_0 从每个季度 30% 变为每个季度 33%（即增加 10%），那么 Amazon 公司的价值将会从 55 亿美元增加到 63 亿美元。估价结果对于（$\alpha+\beta$）的变化也非常敏感。如果利润率从 6% 下降到 5%，那么 Amazon 公司的价值将会从 55 亿美元跌到 43 亿美元。

到现在为止，我们一直在讨论公司的价值问题，但是由于我们需要将公司价值在股权人和债权人之间进行分配，于是利用模型对股票价格进行预测显得更加困难。为了对股价进行预测，我们必须将所有的股票期权和可转换债券调整为相应的股份数。Schwartz 和 Moon 假设所有的这些股票期权和可转换债券都是在到期日的时候执行。但是他们也认识到了在理论上为确定被执行这些美式期权什么时间以及是否会的问题，实际上需要更为复杂的过程来计算 MCS 每条路径的最佳停止时间。

对于这个基本例子，Schwartz 和 Moon 发现 1999 年 12 月 Amazon 公司的股票可能被高估了 5 倍。对于这个模型，预测真实股价或者要求双倍的 η 即每年 120%，或者要求利润率从 6% 上升到高达 36%。但是我们并不期望这样简化的模型（包括几个不精确的估计参数）能够精确地为网络股定价，相反，分析却能使我们知道这样的股价是否让人“难以置信”，并且可以估计这些价格对环境变化的敏感性。该模型显示了我们可以预计网络股有很高的波动性，而投资者对关键参数的估计却在一个相对较小的幅度内变化，尤其是方差 η_0 和 σ_0 以及利润率。

19.8　本章摘要

前面我们已经简要介绍了实物期权理论以及它在公司的资本预算和投资决策中的应用。该理论的关键结论列示如下：

- 实物期权理论是传统 NPV 方法的有力扩充，因为它使我们能够为某个可供选择的战略管理决策中的嵌入期权估值。
- 实物期权理论在这些情况下会被用到：(1) 当一个项目的 NPV 接近于零的时候；(2) 当需要做一个中期决策的时候；(3) 当项目具有高度不确定性的时候；或者 (4) 当项目的现金流取决于两个不确定性状态变量的时候。
- 最常见的实物期权形式如下：首先是通过增加（减少）项目投资额来增加（减少）现金流的扩张（收缩）期权。其他最优的战略决策包括暂时停产期权和放弃整个项目的期权。最后，股东们还拥有对债务偿付的违约期权。
- 事实上，由于二叉树模型非常灵活，它经常被用来对实物期权进行估值。这包括提早执行和不连续的现金流，例如当一个竞争者进入行业时导致收入的突然下降。
- 实物期权存在着复合性、所有权、竞争和相互作用问题。这些问题给实物期权的估值带来了严峻的挑战。
- 前面章节中我们已经展示了怎样利用实物期权理论来对一些技术变革迅速的公司进行估值，例如网络公司，其销售收入的波动性以及收入平均增长率的波动性在嵌入的扩张期权中起着决定性的作用。

章末练习

1. 假设现在让你投资于一个叫做“Nice girl”的流行乐队组合。你已经看过她们的材料，听起来不是很诱人。在合同中，3 年后乐队可能解散，她们可能各自作为独唱歌手出现，也可能继续作为一个组合存在。你估计现在投资于这个乐队，3 年后如果作为独唱歌手管理的话，那么她们各自的 NPV 都将是负的。那么为什么现在投资于这个组合，同时承受着 3 年后乐队解散的可能性还是值得的？

2. 现在媒体中关于对城市中私家车（燃油）征收“污染费”有很多争论。这些费用对不污染环境的汽车，例如电车是不适用的。对于这个建议，在现任市长接下来的两年任期之内必须做出一个决策。通过计算你知道引进一批市内电车的投资项目在今天有一个正的 NPV 值。那么你应该立即开始引进市内电车吗？

3. 假设你现在在考虑购买一家网络公司的股票，该公司叫做“love.com”，专门从事婚介工作。这家公司已经成立了 5 年，其收入具有高度的不确定性，且现在为止利润仍为负值。在决定股票的发行价格是过高还是过低的时候，你会考虑哪些因素？

4. 怎样利用蒙特卡罗模拟方法来确定公司的价值？在模拟过程中，需要考虑的最主要的不

确定性是什么？

习题 5 至习题 7 的数据：

假设你投资于一个钻探石油的项目，其资本成本的现值为 1.1 亿美元。由于中东的不安局势，导致石油价格呈现高度不确定性，使得未来 3 年内公司的净收入每年波动幅度为 70%。在 $t=0$时刻净收入为 1 亿美元。公司的价值符合二项分布。无风险利率为每年 3%，且净收入上升或下降的概率均为 0.5。

5. 画出 $t=0$ 到 $t=3$ 期间项目价值的二叉树模型（在 $t=3$ 之后我们假设项目没有价值）。计算项目的 NPV，并由此确定是否应该投资于这个项目。

6. 假设在第 3 年的时候（只有这一年），你可以通过额外钻一口油井而使得产出增加 40%，额外钻井需要追加投资4 500万美元。那么这对于在 $t=0$ 时刻，你决定是否投资于第一口油井会有什么样的影响？在这里涉及了什么类型的期权？

7. 假设你现在知道在第 3 年的时候或者更早的时间，你可以或者你愿意把油井以5 000万美元的价格卖给一家大型石油公司。那么这会改变你最初的投资决策吗？现在这个项目中又嵌入了什么类型的期权？这些期权的价值是多少？

附录 19.1　连续时间模型

这里我们将利用数学方法推导出偏微分方程（PDE），当我们解这个方程的时候，会得到实物期权价值的一个严格形式的解。我们首先举出最一般情况的例子，然后将这个例子应用于只取决于一个状态变量（即 Black - Scholes 的情况）的期权。我们给出了 Black - Scholes 偏微分方程的完整解法（在我们的知识范围之内，它很少能够被完全给出）。尽管存在很多简单的解法，但是利用一些物理学中的标准偏微分方程，我们这里的分析能够在把问题“封装”为可解形式的同时，还给出一些直观性的认识。

多维伊藤过程

下面是基本偏微分的推导过程，假设在期权底层的交易证券存在的情况下，这最终会得出无套利期权价格。我们现在通过购买一手期权，并同时卖空 Δ 单位的标的资产来形成一个投资组合。投资组合的价值由下式给出：

$$\Pi = f - \Delta S_i \tag{A19.1}$$

其中，f 为期权价值，S_i 为标的资产的价值。投资组合价值的瞬时变化为

$$\mathrm{d}\Pi = \mathrm{d}f - \Delta(\mathrm{d}S_i) \tag{A19.2}$$

其中，假设在这个很小的时间段内 Δ 为一个常数。标的资产的价值变化符合几何布朗运动：

$$\mathrm{d}S_i = \mu_i S_i \mathrm{d}t + \sigma_i S_i \mathrm{d}z \tag{A19.3}$$

对 $f=f(S_i,\ t)$应用伊藤引理得到

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial S_i}\mathrm{d}S_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_i \partial S_j}\right)\mathrm{d}S_i \mathrm{d}S_j \tag{A19.4}$$

其中衍生证券(f)取决于 $n(>1)$个状态变量。这些变量服从相关的布朗运动，于是下面的规则成立：

$$dt^2=0$$

$$dz_i dt=0$$

$$dz_i dz_k=\rho_{ik}dt$$

$$dS_i dS_k=\rho_{ik}\sigma_i\sigma_k S_i S_k dt$$

$$df=\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial S_i}\mu_i S_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial S_i\partial S_k}\rho_{ik}\sigma_i\sigma_k S_i S_k\right]dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial S_i}[\sigma_i S_i dz_i]$$

$$\frac{df}{f}=\frac{\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial S_i}\mu_i S_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial S_i\partial S_k}\rho_{ik}\sigma_i\sigma_k S_i S_k\right]}{f}dt+\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial S_i}S\sigma_i dz_i}{f}$$

$$\frac{df}{f}=\mu_j dt+\sum_i s_i dz_i$$

我们可以将上述公式表达成下文中更为紧凑的形式。

Black - Scholes 偏微分方程

我们利用几何布朗运动来描述股票价格的变动情况，表达如下：

$$dS=\mu S dt+\sigma S dz \qquad S(t)=S(0)+\int_0^t \mu S du+\int_0^t \sigma S dB \tag{A19. 5}$$

对于 Black - Scholes 的情况，我们将公式（A19. 4）中的 S_i 替换为 S，从而得到 df：

$$df=\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{\partial f}{\partial S}dS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dS^2 \tag{A19. 6}$$

因此，用投资组合价值的瞬时变化 $d\Pi$ 替代 dS，得到

$$d\Pi=\frac{\partial f}{\partial S}[\mu S dt+\sigma S dz]+\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt-\Delta[\mu S dt+\sigma S dz] \tag{A19. 7a}$$

和

$$d\Pi=\left[\mu S\left(\frac{\partial f}{\partial S}-\Delta\right)+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]dt-\sigma S\left(\frac{\partial f}{\partial S}-\Delta\right)dz \tag{A19. 7b}$$

我们认为投资组合的瞬时收益取决于时间 dt 和一个随机项 dz。从投资组合收益公式中移走 dz 项，根据无套利原理，投资组合的瞬时回报必须等于无风险瞬时回报：

$$dB=r\Pi dt$$

$$dB=r(f-\Delta S)dt$$

$$d\Pi=dB\Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=r(f-\Delta S)=r\left(f-\frac{\partial f}{\partial S}S\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+rS\frac{\partial f}{\partial S}-rf=0 \tag{A19. 8}$$

对于一个看涨期权来说，偏微分方程是利用下列边界条件求得的：

$$f(0,t)=0 \tag{A19. 9a}$$

$$f(S,T)=\max(S-K,0) \tag{A19.9b}$$

$$f(S,t)\to S \text{ 当 } S\to\infty \tag{A19.9c}$$

求解 Black - Scholes 偏微分方程

我们对变量做下列变化（见 Wilmott，2000），从而使得公式（A19.8）变成无量纲的公式，然后将其转化成前面的公式。令

$$t=T-\frac{2\tau}{\sigma^2}\Rightarrow\tau=\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)=\frac{1}{2}\sigma^2 t'$$

期权的到期日(T)为固定值，因此

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial f}{\partial\tau} \tag{A19.10a}$$

同时令 $f=K\mathrm{v}(x,\tau)=K\mathrm{v}$ 以及 $S=K\mathrm{e}^x$，由于在下面的推导过程中 K 是常数，而 S 是一个变量，所以 $x=\ln S-\ln K=\ln S$。

期权价格 f 对股票价格 S 的偏导为

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial S}=\frac{1}{S}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{A19.10b}$$

和

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=-\frac{1}{S^2}\frac{\partial f}{\partial X}+\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)=\frac{1}{S^2}\frac{\partial f}{\partial X}+\frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \tag{A19.10c}$$

因此，将公式（A19.10a）至公式（A19.10c）代入公式（A19.8），我们得到：

$$-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial f}{\partial\tau}+r\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial x}\right)-rf=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{2}{\sigma^2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)-\frac{2r}{\sigma^2}f$$

$$\frac{\partial f}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)-\frac{2r}{\sigma^2}f$$

$$\frac{\partial f}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial x}(k-1)-kf \tag{A19.11}$$

其中，$k=\frac{2r}{\sigma^2}$。现在用一个形如 $v=\mathrm{e}^{(\alpha x+\beta\tau)}u(x,\tau)$ 的解将公式(A19.11)转换成一个扩散方程。v 的导数为：

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}=\mathrm{e}^{(\alpha x+\beta\tau)}\frac{\partial u}{\partial\tau}+\beta\mathrm{e}^{(\alpha x+\beta\tau)}u \tag{A19.12a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^{(\alpha x+\beta\tau)}\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\mathrm{e}^{(\alpha x+\beta\tau)}u \tag{A19.12b}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\mathrm{e}^{(\alpha x+\beta\tau)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\alpha\mathrm{e}^{(\alpha x+\beta\tau)}\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha^2\mathrm{e}^{(\alpha x+\beta\tau)}u \tag{A19.12c}$$

代入公式（A19.11），得到

$$\mathrm{e}^{(\alpha x+\beta\tau)}\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}+\beta u\right)=\mathrm{e}^{(\alpha x+\beta\tau)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha^2 u+(k-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(k-1)\alpha u-ku\right) \tag{A19.13}$$

分别令公式两侧的 u 和 $\partial u/\partial x$ 的系数相等，我们得到：

$$\beta=\alpha^2+(k-1)\alpha-k$$

$$0=2\alpha+(k-1)\Rightarrow\alpha=-\frac{(k-1)}{2}$$

因此

$$\beta=\frac{(k-1)^2}{4}-\frac{(k-1)^2}{2}-k=-\frac{(k+1)^2}{4}$$

于是我们得到

$$v=\mathrm{e}^{-[(k-1)/2]x-[(k+1)^2/4]\tau}u(x,\tau) \tag{A19.14}$$

为证明 α 和 β，我们将它们代入公式（A19.13）（这里省略了过程），得到 u 的系数为 0，从而 $\partial u/\partial\tau=\partial^2u/\partial\tau^2$。这就是经典的“热方程”，该公式在 $\tau>0$ 且 $-\infty<x<\infty$ 的时候成立。于是公式（A19.9b）的边界条件转换为

$$u(x,0)=(\mathrm{e}^x-1,0)=\max(\mathrm{e}^{[(k+1)/2]x-[(k-1)/2]x},0)=u_0(x) \tag{A19.15}$$

现在

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(\xi)\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4\tau}\mathrm{d}\xi$$

令

$$x=\frac{x-\xi}{\sqrt{2\tau}}\Rightarrow\xi=x+X\sqrt{2\tau}\Rightarrow\mathrm{d}\xi=\sqrt{2\tau}\mathrm{d}X$$

于是：

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(x+X\sqrt{2\tau})\mathrm{e}^{-X^2/2}\sqrt{2\tau}\mathrm{d}X$$

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}\max\{\mathrm{e}^{[(k+1)/2](x+X\sqrt{2\tau})}-\mathrm{e}^{[(k-1)/2](x+X\sqrt{2\tau})},0\}\mathrm{e}^{-X^2/2}\mathrm{d}X$$

$$u(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\{\mathrm{e}^{[(k+1)/2](x+X\sqrt{2\tau})}-\mathrm{e}^{[(k-1)/2](x+X\sqrt{2\tau})}\}\mathrm{e}^{-X^2/2}\mathrm{d}X=I_1+I_2 \tag{A19.16}$$

现在我们分别考虑 I_1 和 I_2 项：

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\{\mathrm{e}^{[(k+1)](x+X\sqrt{2\tau}/2)-[X^2/2]}\}\mathrm{d}X \tag{A19.17}$$

指数变为

$$\frac{1}{2}[(k+1)(x+X\sqrt{2\tau})-X^2]=\frac{1}{2}[x(k+1)+X\sqrt{2\tau}(k+1)-X^2] \tag{A19.18}$$

将上式代入公式(A19.17)，我们得到

$$I_1=\frac{\mathrm{e}^{x(k+1)/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[X\sqrt{2\tau}(k+1)-X^2]}\mathrm{d}X \tag{A19.19}$$

将积分中的指数部分配方，我们就会得到

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[X^2-X\sqrt{2\tau}(k+1)]}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\{X-[\sqrt{2\tau}(k+1)/2]\}^2}\mathrm{e}^{\tau(k+1)^2/4} \tag{A19.20}$$

于是公式（A19.19）变为：

$$I_1=\frac{\mathrm{e}^{[x(k+1)/2]+[\tau(k+1)^2/4]}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\{X-[\sqrt{2\tau}(k+1)/2]\}^2}\mathrm{d}X$$

$$I_1 = \frac{e^{[x(k+1)/2]+[\tau(k+1)^2/4]}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{\sqrt{2\tau}(k+1)}{2}}^{\infty} e^{-(1/2)X^2}\,dX = e^{[x(k+1)/2]+[\tau(k+1)^2/4]}N(d_1) \qquad (A19.21)$$

其中：

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{\sqrt{2\tau}(k+1)}{2}$$

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}X^2}\,dX$$

我们之所以能够这样做，是因为对于累积正态分布函数来说，极限号和积分号是可以互换的。

我们现在来推导 d_1 的表达式。由公式（A19.11）我们知道 $k=2r/\sigma^2$ 以及 $\sqrt{2\tau}=\sqrt{2\sigma^2 t'/2}=\sigma\sqrt{t'}$。$\tau$ 和 t' 项是和 $t=\sigma^2 t'/2$ 相关的，所以：

$$d_1=\frac{x}{\sigma\sqrt{t'}}+\frac{\sigma\sqrt{t'}(k+1)}{2}=\frac{x}{\sigma\sqrt{t'}}+\sigma\sqrt{t'}\left(\frac{1}{2}\,\frac{2r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x+\sigma^2 t'\left(\frac{2r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)}{\sigma\sqrt{t'}}$$

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \qquad (A19.22)$$

公式（A19.16）中的第二个积分为

$$I_2 =-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\{e^{[(k-1)](x+X\sqrt{2\tau}/2)-[X^2/2]}\}\,dX \qquad (A19.23)$$

指数项为

$$\frac{1}{2}[(k-1)(x+X\sqrt{2\tau})-X^2]=\frac{1}{2}x(k-1)+\frac{1}{2}(X\sqrt{2\tau}(k-1)-X^2) \qquad (A19.24)$$

现在考虑公式（A19.24）中的第二项 $-\frac{1}{2}(X^2-X\sqrt{2\tau}(k-1))$。通过配方，这一项变为

$$-\frac{1}{2}\left(X-\frac{1}{2}\sqrt{2\tau}(k-1)\right)^2$$

于是

$$I_2 =-\frac{e^{[x(k-1)/2]+[\tau(k-1)^2/4]}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{\sqrt{2\tau}(k-1)}{2}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}X^2}\,dX =-e^{[x(k-1)/2]+[\tau(k-1)^2/4]}N(d_2) \qquad (A19.25)$$

对公式（A19.22）应用相似的方法：

$$d_2=\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}=d_1-\sigma\sqrt{(T-t)} \qquad (A19.26)$$

通过公式（A19.16）、公式（A19.21）和公式（A19.25），我们得到

$$u(x,\tau)=e^{[x(k+1)/2]+[\tau(k+1)^2/4]}N(d_1)-e^{[x(k-1)/2]+[\tau(k-1)^2/4]}N(d_2) \qquad (A19.27)$$

因此

$$v=e^{-[(k-1)/2]x-[(k+1)^2/4]\tau}e^{[x(k+1)/2]+[\tau(k+1)^2/4]}N(d_1)-e^{-[(k-1)/2]x-[(k+1)^2/4]\tau}e^{[x(k-1)/2]+[\tau(k-1)^2/4]}N(d_2)\Rightarrow$$

$$v=e^{x}N(d_1)-e^{-k\tau}N(d_2) \qquad (A19.28)$$

现在

$$k\tau=\frac{2r}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{2}t'=rt'=r(T-t)$$

于是公式（A19.28）变为 $f=K\mathrm{v}=K\mathrm{e}^{x}N$（$d_1$）$-K\mathrm{e}^{-r(T-t)N(d_2)}$。将公式中的 f 替换成 C，$K\mathrm{e}^{x}$ 替换成 S，我们最终就得到了不分红标的资产的欧式期权的定价公式：

$$C=SN(d_1)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{A19.29}$$

公式（A19.29）用于对不分红股票的欧式期权定价，但是也可能用于对欧式实物期权定价，该实物期权的标的资产没有任何中期的现金流入和流出。

上述 Black - Scholes 公式的解就是所谓的“PDE 方法”，其证明过程有一点复杂。感兴趣的读者可以进一步阅读 Neftci（1996）第 15 章中关于这个问题更为简明的推导过程，但是这要求关于**等价鞅测度**的知识。

生品与风险管理　金融工程——衍生品与风险管理

第5部分

风险和监管

金融工程——衍生品与风险管理

金融工程——衍生品与风险管理

第20章

对金融机构的监管

学习目标

- 概述对金融机构监管的**经济学原理**。
- 讨论金融机构面临的**不同风险**以及监管者在制定银行和其他金融机构政策时的角色。
- 了解**股权资本**（equity capital）如何向存款者（即债权人）提供缓冲保护，以应对违约或信用风险造成的资本下降。
- 分析如何根据**《巴塞尔协议》**（1988）的**“风险调整资产比率”**（risk adjusted asset ratio）来设定G10国家中信用（违约）风险的**最小资本充足度等级**。

20.1　监管的理由

在20世纪80年代和90年代，对金融机构的监管是备受人们关注的

话题，这并不只是因为当时发生了一些令人震惊的金融丑闻。监管的理由来自于各种形式的市场失灵。在一般竞争性的市场环境下，政府应该允许市场机制自行运作，让市场奖励或惩罚市场上各种风险行为的承担者，无论他们是消费者还是供应者。但有时市场会失灵，市场失灵的原因通常包括外部性、市场势力（如自然垄断或卡特尔）和信息问题。

关于外部性有一个经典例子。一家化工厂往河里排放废水，这使下游生产纯净水公司的成本增加。一家机构的行为改变了另一家机构的成本（或利润）。在这里，监管并不是解决问题的惟一方法。纯净水公司可以向化工厂支付一笔费用，让他们安装净化设备，以减少废水中的有毒物质（或是减少废水的排放量）。或者，化工厂可以向纯净水公司赔偿，这样纯净水公司可以安装更高级的净化设备。在两种情况下，资源的分配（即化学废料和干净的水）可能相同，但收入的分配（即由谁支付）可能不同。然而，因为交易成本、监控和实施的问题，这样的措施可能并不可行。出现这样的问题，本质上是因为**缺乏市场**（missing market），即“清洁水源”的产权归属。因此，外部性不能被“内部化”，社会边际成本要超出化工厂的个体边际成本。这时，监管可以提供最有效的解决方案，比如，政府可以规定最大污水排放量，并对此检测。因为缺乏产权，政府通过法律来实现自由市场无法做到的事情。

再举一个金融业存在的外部性例子。存款者从一家正常运营的银行取款，如果这家银行暂时缺乏流动性（但没有破产），并且众多的存款者同时要求取款，那么这家银行不能满足所有的取款要求，那么“恐慌”就会扩散到其他银行，这样就造成支付体系的崩溃。

在缺乏竞争的情况下，**垄断势力**（monopoly power）和固定价格的卡特尔也可能发生在金融市场上，比如在1986年的“大爆炸”发生之前，英国的股票经纪商收取固定的股票买卖佣金。然而，在今天像伦敦和纽约这样高度发达的市场上，这并不是一个大问题。

在金融市场上，**信息问题**（information problem）是市场失灵的主要来源。消费者对于“产品质量”会有不完备的信息。例如，对于个人来讲，他很难判别他存款的那家银行是否会破产，他也无法知道经纪商是在诚恳地提出建议，还是只是试图卖出他个人不愿再持有的股票。这是**信息不对称**（asymmetric information）的例子，因为银行或经纪商对风险—收益的情况比个人更加了解。

保险市场也存在信息不对称的问题，但在保险市场上，卖者往往比买者了解更少的信息。一家保险公司经常难以区别高风险和低风险的个人（比如，在申请健康保险时，人们虽然要回答有关吸烟和疾病史的问题，但通常不必回答“你是否总吃脂类食物，并且不做任何运动?”）。保险公司面临着**逆向选择**（adverse selection）的问题，因为对于任何价格，高风险的人总是比低风险的人更愿意参加保险。保险公司面临的另一个问题是，它很难基于保险者的未来风险行为制定一个合约，并检测执行它。比如保险公司出售一份健康保险后，并不能监视保险者未来的饮食情况。这又是一种“缺乏市场”的情况。因为合约的条款难以被观察和监视。而且，因为保险合约对低风险者和高风险者具有相同的价格，后者本来就糟糕的饮食习惯会变得更加毫无顾忌。这是因为参加保险的人知道，如果他得了很重的病，保险公司会给他一笔钱，如果他去世，他的亲戚也会得到这笔钱。因此，保险公司面临着**道德风险**（moral hazard）的问题。

当存款保险由纳税人保证时，可能会发生另一种道德风险。这种情况发生在大多数发达经济中，比如在英国和美国，大多数住房抵押贷款协会、存款与贷款机构和商业银行的存款受到保险（至少是部分保险）。例如，如果一个存贷机构因为他们的贷款组合价值下跌（比如因为房地产萧

条）而面临破产的危险，股东可能会选择实施具有更大风险的贷款项目。这样的项目通常具有更高的期望回报，如果成功的话，将会为股东挽回局面。如果银行随后破产了，银行本来就很低的股价也不会再下跌多少，如果这些风险项目得到回报，股东将获得上行利润，股价将会上涨。存款者几乎没有任何动力去阻止股东采取这类策略，因为即使银行破产，他们的存款也（部分或全部）地受到纳税人的保险。

经理们知道即使项目失败，存款者也会收到纳税人的补偿，于是也有冒险的动机，因为银行已经在破产的边缘，如果不这样做，他们就会丢掉自己的工作。

最后的一个问题是所有的监管体系普遍面临的问题，即**委托—代理问题**（principal - agent problem)。委托人（比如监管机构）希望达到某种目的，而只有通过代理者（比如金融中介机构）他们的目的才能实现，因为代理者具有更好的信息、经验等。当代理者具有不同的动机和信息时，委托人必须设计出一个体系，以实现期望的结果。委托人的干预程度随情况而变，如国有化（比如由政府控制银行）、公共机构（比如英国金融服务管理局，Financial Services Authority，它对英国大部分金融系统负责）、直接控制（比如英国的“工业部”负责审批保险公司）和自我控制（比如英国的自律机构，Self-Regulatory Organizations，SRO，负责监管 1986 年的伦敦金融服务法案中的机构）。

> 监管产生的经济学原因主要在于外部性、垄断势力、信息不对称和道德风险。在金融市场，最后两个原因最为重要。

风险的种类

划分风险的方式非常多，我们把主要的一些风险列在下面：

法律风险：	合同没有被如期执行的风险。
流动性风险：	在希望的时间内，找不到交易对手。
信用风险：	交易对手缺少资金而破产。
营运风险：	交易的组织、交割和清算被错误处理（比如 IT 设施损坏、欺诈）。
消化性风险：	交易员、后勤人员或其他参与者不理解资产如何定价和交易所涉及的风险。
激励性风险：	奖励措施导致管理者采取更具风险的策略。
市场风险：	由于资产价格变化导致的风险。
模型与估计风险：	在估计“风险模型”时采用了错误的估计方法或选用了错误的模型（比如模型假设资产收益具有正态分布，而实际上不是正态分布）。

令人吃惊的是，许多广受关注的金融业破产实际上并不是由于对市场风险的不正确估计。例如，1996 年巴林银行的倒闭部分是由于尼克·利森对未平仓的远期和期权的风险的无知（消化性风险），但主要是因为利森控制着后勤部门，同时他自己又是一个交易员(即营运风险)。“狂热性”(gung-ho)文化和奖励政策也鼓励着“孤注一掷”的策略。20 世纪 80 年代，美国储贷机构和银

行的破产是由信用风险造成的，当某些国家决定不偿付外债时，这些机构受到了巨大损失(如1982年的墨西哥债务危机和随后的Brady计划)。国际信用和商业银行(Bank of Credit and Commerce International)的破产是信用风险和营运风险共同造成的(即欺诈和洗黑钱)。美国的奥兰治县(Orange County)和宝洁公司衍生品的损失来自于消化性风险。长期资本公司(LTCM,一家对冲基金)的损失是收益价差的"异常变化"造成的，这是一种市场风险。

大多数金融公司给交易员和其他相关人员(如首席财务官、后勤人员等)的奖金通常是由该交易席位或该部门(如固定收益部门或外汇部门)的实际利润决定的。有时候，边际的回报是递增的。比如，A美元的利润可以带来1%的奖金($=0.01A$美元)，但是超出($A+Z$)美元的利润会带来1.5%的奖金[$=0.015(A+Z)$美元]。同样，如果利润低于$A/2$美元，就可能会被炒鱿鱼。如果利润刚好在($A+Z$)美元或($A/2$)美元之下，这种奖励措施会鼓励相关人员进行风险更大的操作，以获取更多的利润。这里的问题在于，奖金制度只是基于利润，却不对增加的风险进行惩罚。这就造成了**激励不相容**(incentive incompatibilities)，比如，所承担的风险大于经理和股东所认为合适的风险程度，这可能会导致破产(如巴林银行)。

公司文化的"机构化"可以被包含在"激励风险"中。这些风险是所有权和控制权分离的表现。一个职员（如交易员）的最大下行风险（假设他不违法）不过是丢掉他的工作，在市场繁荣，工作好找时，这算不上巨大的损失。相反，如果持有公司的股份，那么他就会更关注他的行为带来的风险。在1999年之前，最大的投资银行之一高盛公司一直是一个合伙企业，有些合伙人本身就是交易员。这就提供了一种激励机制和"亲临现场"感受风险的文化，特别是在某些奖金的支付（现金或是期权）要延期几年的时候。

增强激励兼容的另一个办法是强制银行发行等于资本一定比例（比如2%）的次级债务。这些次级债务的债权人在存款人之后收到他们的（固定）利息，但他们的优先级要大于股东。更重要的是，他们不会因为公司"孤注一掷"的策略而获得上行收益，因此，他们与存款保险基金具有相同的激励结构。于是，他们将监督银行的风险情况，这将反映在这些债务的市场收益率之中。因此，对于监管者，次级债的收益率是一个银行风险可观测的市场指标（监管者可以以此作为信号，对相应银行进行调查）。

但是，并不是只有所有权结构才重要，所有者是否积极地参与管理同样关键。例如，保险公司Lloyds of London被它的成员（或"持有人"）所拥有，成员们要承担无限风险。但是，许多"持有人"并没有积极参与Lloyds的日常管理经营，因而就造成在20世纪80年代他们对某些机构以他们的名义所承担的风险毫无觉察，这几乎使Lloyds破产。另外，在"内部人"和"外部人"之间也会有不对称信息。内部人会选择高收益低风险的公司，而外部人往往会被误导，而选择具有很高风险的公司（比如，由于让工人在有石棉的环境中工作而造成肺病遭到起诉，或是因原油泄漏而不得不支付"清理"费用的公司）。

系统风险

我们可以把系统风险的问题比喻成对牛津大学校园里那些草地的保护。每个人都从欣赏这些台球桌布一般整洁美丽的草地中获得了审美的愉悦，但付出的代价是绕过草地所花费的时间。如果一小部分人偶尔从草地上穿过（我想他们大概是学校理事会的成员），那么其他人所获得的美

感就会减小一点，因为草地会因此受到一些损坏。草地上的草死去几株（一些公司破产）是不幸的，但是，会有新的草（新公司的进入）生长出来替代它们。然而，如果这些理事会成员的行为被认为是一种特权，这会促使其他人（比如本科生）为节省时间而穿过草地，这会导致整块草地的毁坏。草地所承受的风险就是系统性的。没有哪个人独自改变他的行为可以拯救这块草地。这时就需要一个外部监管者。在牛津草地的这个例子中，道义上的劝说加上“勿踏草坪”的标志牌就足够了。在金融业里，仅有“勿踏草坪”这样的标志已经不再是有效的规范方法了，比如禁止银行持有证券组合的 Glass - Steagall 法案。在英国，一直到 1986 年，英格兰银行都是用道义说服来监管银行系统的。当时，“总督横眉一竖”已经足够让各个银行遵守规矩了。现在，问题却变得更为复杂。

银行特殊吗?

在银行业，系统风险是如果当一个银行倒闭，会造成一连串的银行倒闭，就像多米诺骨牌一样，这部分是因为银行之间会互相借款。经济衰落可能会导致一些银行倒闭。代价可能是支付系统的崩溃。在 1986 年后英国的监管体制下，虽然有立法作为背后的支撑，很多金融机构都是自我规范的。然而，英国的银行直到最近（1998 年）都受到英格兰银行的直接监管，经常要受到“特别的”监管约束。这就引出银行是否与其他金融机构不同的问题。如果不同，差异在哪里呢?另一个问题是，我们是否需要对银行进行官方的监管?

与政府管制相对的思想是“自由银行”，银行通过“银行俱乐部”的形式来制定进入规则、行为规范、最低标准等，从而进行自我约束。银行可以被看做一种管理着证券组合（如储备金、市场化证券和银行贷款）的金融机构。银行的独特之处在于它们主要通过负债融资来实现持有这些证券，这些负债要以“先来先得”的机制进行偿还（如支票与存款账户）（见 Fama，1980；Tobin，1985）。

显然，如果只是想保护支票存款（它可能也会支付一个较低的利息），那么通过购买有限种类的一些流动资产（比如短期政府证券、短期国债等），就可以实现 100%的保险。这实际上制造出了“广义银行”中的一个“狭义银行”。然而，这仍然没有解决要对存款支付利息的银行所面临的问题。请注意，这里的问题并不是一个流动性问题。实际上，在发达的批发市场上，银行能够以一定价格获得流动性，只要它能使其他银行相信它的经营情况没有出现问题。英国的 Giro and Post Office Savings Bank 和（在一定程度上的）英国建筑协会的存款就是几乎 100%安全的。这是因为这些机构只被允许持有某些资产。例如，直到最近，英国建筑协会只对存在第一抵押权的国内房产提供贷款。这些住房贷款具有浮动利率，因此建筑协会可以通过抵押贷款利率的增长来匹配存款利率的增长。另外，在一个“大的”建筑协会的整体范围里，抵押房产的市场价值要远远大于总的抵押贷款的价值。因此这些机构可以被认为几乎不会破产，即使房地产市场经历严重危机时也是如此（比如 1991—1992 年间的英国）。

在某种意义上，银行通过提供贷款，创造了一个“缺乏市场”的代替品。公司（有时是个人）希望投资于风险项目，但又不愿意把这些信息公开，因为它们想在它们的竞争对手之前把握商机。因此，公司愿意向银行家秘密透露这些项目的细节，从而与银行达成具有附加条款的贷款协议（比如，如果公司破产，银行对公司的资产具有优先获得权，有时会包括经理的住宅等资

产）。

一些学者（Dowd，1988）提出，在自由银行体系下，可以通过附加期权条款来防止银行“挤兑”。比如，银行在一段固定的时间拥有期权来减少存款的可转换性。通常这样的存款利息要比可以立即提取的存款更高。然而，保守的“安全银行”可能并不会提供这样的条款。于是，任何提供这项条款的银行都会被视为低信用等级的银行，不得不为吸收这样的存款而支付很高的存款利息。

银行挤兑并不总是造成支付/清算体系崩溃。比如在爱尔兰，银行罢工持续了几个月，结果酒馆老板们自己担当了经纪商的角色，代替了清算公司。因为银行没有破产的风险，酒馆老板接受客人的支票，提供给他们现金（收取少于5%的佣金）。当然，酒馆老板对他们常客的资信程度都很了解。然而，通常情况下，如果银行没有破产风险而只是发生了银行挤兑，经纪商们会蜂拥而至，准备接受被期权条款制约但却想立即打折扣提款的支票。

另外，中央银行不一定需要担当清算所的角色。商业银行之间的支票清算可以通过银行们自己运作的一个清算所来实现，比如中国香港银行家协会。但是，由中央银行建立一个清算系统具有一些优点。如果私有银行控制清算系统，那么当银行发现它的竞争对手处于流动性危机时，它就不会公平地对待它，因为让对手破产或处于尴尬的境地，未必不是一件好事。而且，规定谁可以进入金融清算系统等“俱乐部规则”在私有制下会被操纵。而中央银行具有不同的激励机制，它希望看到公平竞争而不是像私有的“俱乐部”一样期望获得利润。

有些学者（Kareken 和 Wallace，1978）认为，中央银行和存款者保护体系的存在鼓励了商业银行采取高风险的策略，这是一种道德风险。或许存在下面情况时，银行会采取保守的措施：如果（1）银行资产总是由外部人评估；（2）对破产的惩罚相当重（比如不合格的银行家被投进监狱）。但是，银行的资产不是这种类型的资产，信息不对称总是最常见的情况。如果这样，自由银行体系下的股东会鼓励经理们损害存款者的利益，进行高风险的贷款。如果贷款合同成功，股东就会收到额外的利润（以增长的红利形式），但存款者却只能获得不变的固定利息。另外，因为经理们的薪资是根据他们的短期表现（比如资本回报率）来决定的，并且随时改变，所以他们不愿投资于虽有风险但会有长期回报的项目（比如生物科技），即使这些项目的（风险调整后的）NPV 大于零，这是短期行为的一个例子。

银行破产会对实际经济造成影响。比如，在 20 世纪 80 年代早期，一些政府宣布不偿还某些银行的贷款，这使投资者对这一类借款者的偿债能力产生怀疑，随之也对借款给这类债务人的银行开始担心。于是，所有的银行都停止贷款给这类借款者，从而导致这些借款者失去了融资渠道，便宣布破产，这使最初借款给他们的银行遭受了损失。其他银行也开始把它们自己的资产从这类风险贷款转向国债之类的安全资产。信用供给的减少造成了经济的进一步衰落。

20 世纪 90 年代，在发达经济中，人们已经不怎么把银行特别对待了。银行发展成为具有多重功能的金融机构，似乎不需要对银行进行“特别监管”了。现在的发展趋势是同一个监管者对所有的金融机构负责，监管的条款是基于不同来源的风险。适于分析的两个关键风险是市场风险和信用风险。下面我们将讨论《巴塞尔协议》中资本充足度的要求在信用风险中的角色。在以后的章节中，我们将先分析市场风险，然后在第 25 章再讨论关于信用风险的最新建议和方法。

20.2　信用风险和《巴塞尔协议》

20 世纪 80 年代，G10 国家的中央银行官员和政治家们日渐担心银行资产（特别是银行贷款）的信用（违约）风险。银行系统的国际化也带来了新的问题，究竟哪个监管机构可以监督分支遍及全球的银行的行为呢？最终，中央银行的官员们认为他们必须建立一个“公平的竞技场”，使 G10 国家具有共同的监管要求，否则银行就会将总部迁至监管最薄弱的国家去。通过与国际结算银行（Bank for International Settlements，BIS）的合作，1988 年 G10 国家在巴塞尔颁布了应对信用风险的资本充足度要求，被称为**《巴塞尔协议》**。

流动性与资本

银行为了避免资产负债表的短期变化造成的资金暂时短缺，应该保持一定的流动比率。比如，如果存款者每星期提款 5%，那它对于每 100 美元的存款就应该准备 5 美元的“钞票和硬币”或“抽屉现金”。然而，它也可以持有短期证券（如短期国债或存款保证单）来应对此类资金短缺。它也能够在银行间市场借款来满足资金的短期需求。这里我们需要分清流动性（或现金流）风险和违约风险。流动性风险产生于银行不能在特定时间上满足对于现金流的支付要求。例如，银行以每年 10%的固定利率贷款，而浮动利率的上涨使它对存款支付的利率从 9.5%上调到 10.5%。如果这种情况一直持续下去，银行最终会破产，但如果它只持续三个星期，银行则可以消化这个损失，利用它在其他活动中所得利润（比如支票账户和信用证的佣金、贷款撮合费等）或留存收益对其支付。如果银行资产的价值小于负债（主要是存款）的价值，那么它就会破产。可以证明，银行的股权资本为银行资产价值的下跌提供了一个“缓冲”。表 20—1 中简化的资产负债表清楚地说明了资本充足度的重要性。

表 20—1　　**高资本率和低资本率的银行**

资　产		负　债	
A. 高资本率的银行：			
储备（R）	10	资本（E）	90
证券（S）	30	存款（D）	10
贷款（L）	60		
	100		100
B. 低资本率的银行：			
储备（R）	10	资本（E）	10
证券（S）	30	存款（D）	90
贷款（L）	60		
	100		100

股权资本

如果银行破产，债权人（存款者）拥有对银行资本的第一要求权，而股东拥有剩余要求权。因此，股权资本 E 可以定义为：

$$股权资本=总资产-存款 \tag{20.1}$$

$$E=TA-D$$

假设违约资产占总资产的比例为 $g=10\%$，即 10 美元[$gTA=0.10(100)$]。对于高资本率的银行，它仍然有价值 90 美元的“良好资产”，远高于存款者的要求权 $D=10$ 美元。对于低资本率的银行，总资产的 10%被违约后，银行仍然有 90 美元的“良好资产”，但只能刚刚满足存款者的要求 $D=90$ 美元。这家银行处于破产的边缘。对于低资本率的银行，坏账的价值 $BD=gTA=10$ 美元，刚好等于银行的股权，$E=10$ 美元。而对于高资本率的银行，$E=90>gTA=10$。这个关系是对于银行破产的（股权）资本充足度要求的基础：

具有偿付能力：股权资本$(=E)>$ 坏账$(=gTA)$

让我们用稍微复杂一些的资产负债表——表 20—2 继续讨论。

表 20—2 银行的资产负债表

资产（百万英镑）		负债（百万英镑）	
“现金储备”（R）	20	股东权益资本（E）	100
实物资本（K）	80	存款（D）	1 000
可交易证券（S）	100		
贷款（L）	900		
总资产（TA）	1 100	总负债（TL）	1 100

我们假设一家“新银行”通过发行 1 亿英镑的股票获得股东的资金，它利用其中的 8 000 万英镑建立了一个分支机构（固定资产），又把 2 000 万英镑作为现金储备（存放于其他银行的现金、商业票据、在中央银行的账户等）。这家新银行现在开始运营，决定发放 9 亿英镑的银行贷款，因此，它向决定贷款的客户的账户中划入资金。当这些银行贷款被使用时，支票的接收者也在这一家银行拥有账户，因此交易只涉及存款的转账，并没有现金被提出。（我们在这里所做的，是把银行系统看做一个整体，假设所有的交易发生在银行和非银行的私有行业（non-bank private sector，NBPS）之间。）最后，我们的“新银行”从 NBPS 购买了 1 亿英镑的证券（S）。为了简化，我们假设这些证券由在这家新银行开有账户的 NPBS 成员拥有。因此，资产方的 S 和负债方的 D 都增加了 1 亿英镑。

让我们更具体地考虑股权资本的可能来源。主要有以下七点：

1. 面值：	股票发行时的面值（比如每股 1 美元）。
2. 股票的超额价值：	这是实际支付的价格（比如 5 美元）和面值的差额。最初建立银行的资金来自于该部分与第 1 项之和，我们把这两个项目分开只是为了遵循会计惯例。

3. 留存收益：　过去未分配利润的累计价值（在支付债务利息和税收之后）。它在法律上属于股东，可以在未来以分红的方式分配，也可以用来添置固定资产（比如新的分支机构或是 IT 设备）。如果后者的投资具有正的现值，那么会在未来带来更多的利润。

4. 贷款损失准备：　这是从留存收益中划出的一项特别基金，用来弥补资产组合实际和预期发生的一般性损失（比如预期的某些获得贷款的公司持续几年亏损）。贷款损失准备在欧洲和英国通常被称为“未披露准备”（undisclosed reserves）或“准备金”（provisioning）。贷款损失准备不用来弥补非预期或异常的损失，比如 1998 年发生的亚洲货币贬值造成的损失就是非预期的损失。

5. 重新估值准备：　这一项代表自银行发行股票后股票价值的增加以及土地和建筑物的价值增长。

6. 混和证券：　银行发行同时具有债务和股权性质的可交易资产进行融资，比如永久优先股或次级债务，这些证券通常被部分计算为银行的资本（通常是总资本的一个有上限的比例）。

7. 扣除项：　为了得到总资本，需要进行一些扣除，比如在某些分支机构或有关公司的投资。

银行的任何未分配利润或是转到“股东权益”用来购买新的财产，或是划分出来作为坏账准备金。如果银行希望增加股东资本，那么它可以发行新股（比如认股权发行），或是分配出更少的留存收益，或是出卖它的分支机构。

衡量资本充足度(见表 20—2)的一个简单方法是股东权益/总资产$=9.1\%(=E/TA=100/1\,100)$。股东是主要的风险承担者，因为他们只对银行的资产拥有剩余要求权，但他们却为银行提供了 9.1%的资金。然而，这不意味着银行资产中的 9.1%是“现金”，用来随时准备满足存款者的提款要求。本例中，现金储备只占总资产的 $1.8\%(=R/D)$。部分最初的股权资本已经是固定资产，它们只有被卖掉以后才能成为现金。银行的可交易证券可以用来应对提款要求，虽然银行在出售证券时可能会遭受资本损失/利润。本例中这个银行负担是很沉重的，它的债务（存款）构成了总资产的绝大部分。因而，银行的股东权益并不都以现金的形式存在，它只代表总资产中由股东所出的那一部分。换句话说，银行的股东权益是资产负债表中的“剩余”或缓冲部分。

> **银行的“股东权益”所代表资产的数量可能会下跌，因为从原理上说，存款者可以把剩余的“好”资产卖出，而获得他们存款的全部面值。**

银行的部分资产具有“安全”的名义价值（比如现金储备或短期国债），但是其他资产，比如银行贷款，却有着“信用风险”（即借款者违约）。“简单的”股权总资产比率（$\text{EAR}\equiv E/TA$）是股东在银行面临坏账损失时所提供的一个缓冲的量度。为更进一步说明，注意银行的资产负债表是

$$TA=D+E \tag{20.2}$$

假设总资产的 $g\%$是坏账。那么，g 也是 1 美元资产可能进入违约状态的概率：

$$BD=gTA \tag{20.3}$$

如果

清算时资产价值 > 债务价值

银行不会破产：

$$TA-BD>D \tag{20.4}$$

使用公式(20.2)，这意味着

$$E>BD \tag{20.5}$$

和

$$\mathrm{EAR}>g \tag{20.6}$$

其中，$\mathrm{EAR}=E/TA$，$g=BD/TA$。因此，如果银行不会破产，那么银行的资产减去坏账以后要大于存款负债的总价值：

偿付能力的需求

股东权益—总资产的比率，即 $\mathrm{EAR}(=E/TA)$，大于坏账比例 g。

巴塞尔风险调整资产比率

风险调整资产比率（risk adjusted assets ratio，RAR）是由国际结算银行在巴塞尔组织的讨论中发展起来的（英格兰银行，1987）。RAR 是一个股权—总资产比率，但是不同资产却根据各自的相对信用风险大小具有不同的权重。例如，以现金和对中央银行的债权形式存在的资产具有零权重。其他资产具有 10，20，50 和 100%的权重，一共分成五个等级（w_i，$i=1$，…，5,）。如果资产在每个风险类别的价值是 V_i，那么

$$\text{风险加权总资产，RWTA}=\sum_{1}^{5}(w_i/100)V_i \tag{20.7}$$

RAR 定义为

$$\mathrm{RAR}=\frac{E}{\mathrm{RWTA}}\times 100 \tag{20.8}$$

RAR 的原理需要从我们原来的推导进一步发展。期望的坏账数量可以写成

$$\begin{aligned} BD &= g\mathrm{RWTA}=g\Big[\sum_{1}^{5}(w_i/100)V_i\Big] \\ &= g[0.0R+0.0K+0.2S+1.0L]=(0.2g)S+gL \end{aligned} \tag{20.9}$$

为了简单地说明问题，上式中的相对风险权重是我们随意给出的。因此，贷款 $L(w_i=1)$的风险是证券 $S(w_i=0.2)$的风险的 5 倍。在实践中，不同的权重适用于不同类型的贷款和不同的银行客户。例如，考虑不同国家的信用风险时，给 G10 国家的贷款就具有“低风险”。因此，如果贷款 L 的总违约率为 $g=10\%$，那么证券的绝对权重是 $0.2g=0.02$ 或 2%。储备或固定资产具

有零违约风险。我们现在重复前面的推导。对于偿债能力：

“良好资产”的期望价值 > 债务(存款)

$$TA-BD=TA-g\mathrm{RWTA}>D \tag{20.10}$$

把公式(20.10)除以 E，使用等式 $TA=D+E$，我们得到偿债能力的等价表达式，这次涉及风险调整资产比率：

偿债能力要求

风险调整资产比率 > 风险等级最高类资产的破产概率，RAR > g

因此，BIS 的方法就是使不同的资产具有不同的相对破产概率。然而，这个国际监管体系涉及两个步骤。首先，对于相对风险权重（或相对违约比例）有一个约定 w_i；其次，监管者就最高风险等级资产的绝对违约风险达成一致，目前为 8%。这就得到银行的最小资本充足要求，$E=0.08$（RWTA）。监管者如果愿意，也可以调高自己国家的 g 值。

表外项目

还有一些风险权重被称为“转换因子”，它们用来衡量**表外项目**（off balance sheet item，OBS）的信用风险。表外项目包括备用信用证（比如为了支持商业票据的发行），它具有 100%的转换因子。没有使用的 1 年以上的贷款承诺具有 50%的转换因子。出售的商业和银行收据，具有 20%的转换因子。这些转换因子用来把表外的美元数量转换成“信用等价数量”，我们从而根据它们应用上面的权重。为了获得表外资产的风险调整资产的美元数量，也要有两个步骤：

1. 信用等价数量＝表外头寸的美元数×转换因子
2. 风险调整资产数量＝信用等价数量×“风险权重”(w_i)

“风险权重”（w_i）要取决于交易对手的类型（与上面讨论的表内项目相同）。例如，与某个 G10 国家政府进行的表内交易具有“零”权重，如果交易的对方是一家私有公司，那么风险权重则是 100%。

其他表外项目的信用风险主要是场外交易的衍生品头寸，包括互换、远期和期权头寸。这些项目也需要被转换成“信用等价数量”，然后应用“风险权重”。（注意，交易所交易的衍生品具有零信用风险，不过它们的市场风险不为零，我们在后面章节再对其讨论。）我们有

场外衍生品的信用等价数量＝潜在暴露(美元)＋当前暴露(美元)

“潜在暴露”是面值乘以代表标的资产（如汇率、利率）相对波动率的权重，表 20—3 给出了示意的权重。这些权重代表着 OTC 衍生品的相对违约风险。“当前暴露”是如果合约另一方违约所造成的损失（可能为正也可能为负），它是 OTC 衍生品合约的重置价值。比如，我们已经知道在互换合约存在一段时间后，如何把它看做浮息和固息债券来进行定价。这将构成它的“当前暴露”（可能为正也可能为负）。得到衍生品的信用等价数量以后，我们可以对这些合约应用通常的“风险权重”（w_i），通常取为 0.5，从而获得“风险调整资产价值”。

表 20—3　　**OTC 利率和外汇衍生品的信用转换因子**

到期时间	利率合约	外汇合约
1 年或更短	0%	1.0%
1 年以上	0.5%	5.0%

表外项目的“风险调整资产价值”随后被加到“表内项目”的 RWTA 之上，得到一个总的数字。对于后者，我们应用 8%的规则，得到防范总信用风险所需要的股权资本 E 的美元数量。

最近，关于改革 1988 年《巴塞尔协议》的呼声很高。现在看起来，协议的规定随意而且不公平，因为风险权重没有反映真实的经济风险。文章 20.1 对这些问题进行了讨论。

文章 20.1　巴塞尔的新笔触

巴塞尔委员会在 1999—2000 年试图修订关于信用风险的《1988 巴塞尔协议》。原有的《巴塞尔协议》的一个问题是，权重 100%，50%，20%，10%和 0%这五个“风险桶”被认为局限性太大，并不能反映真正的经济风险。例如，因为韩国是 OECD 成员，那么借款给它的私有银行比借款给 IBM 和微软这类公司所要求的资本准备要低。这就促使一些银行更愿意贷款给韩国银行，而不是美国的 AAA 级公司。如果韩国银行比 AAA 级的公司风险更大，那么《巴塞尔协议》不是减小而是增加了银行的风险。另外，如果银行贷款给权重为 100%的公司，却不管它们真实的潜在违约风险大小时，也暴露了《巴塞尔协议》的弊端。

巴塞尔委员会建议使用（私有评级机构，如标准普尔公司）信用评级来确定不同种类贷款的信用风险权重（见表 B20—1）。主权贷款具有一个平滑的权重线，从 0%（AAA 到 AA－）到 150%（B－以下），没有被评级的国家风险权重为 100%。后者让人觉得奇怪，因为不是所有的国家都被机构评定了等级，而有些无级别的公司可能具有非常好的信用。更让人费解的是，给“无级别”公司的贷款的风险权重是 100%，而低信用等级公司的权重是 150%。另外，当公司信用降到 AA－以下时，权重从 20%突然下降到 100%。

表 B20—1　　**建议的巴塞尔信用风险权重（%）**

债务人	AAA 到 AA－	A＋到 A－	BBB＋到 BBB－	BB＋到 B－	B－以下	无评级
主权国家	0	20	50	100	150	100
银行——选择 1(1)	20	50	100	100	150	100
选择 2(2)	20	50(3)	50(3)	100(3)	150	50(3)
公司	20	100	100	100	150	100

注：(1) 基于银行所属国的风险权重。

(2) 基于对个别银行的评估。

(3) 如果银行债务具有短的原始到期时间，比如 6 个月，会得到优惠一级的权重。

资料来源：巴塞尔委员会。经允许后复制。

贷款给其他银行有两种选择：或者使用该银行所属国家的主权风险，或者使用该银行单独的信用等级。

上面所有的“风险桶”都是很主观的。在G10国家内部，也有关于抵押贷款的合适风险权重的分类。另外，世界上很多公司和银行没有被标准普尔公司评级也是一个问题，而相对来说，更多的美国公司和银行拥有标准普尔的评级（比如，在英国，FT-100中的公司只有75%有标准普尔的评级，在德国只有70家公司被标准普尔评级）。这意味着，如果美国银行主要贷款给美国的银行和公司，那么需要的资本金就要小于贷款给其他国家的银行和公司。最后，如何对评级公司本身监控呢？它们的评价是否准确？是否会有收受贿赂的评级公司出现呢？

巴塞尔委员会也在考虑不同于基于信用评级的风险桶的办法，他们在考虑是否让经验丰富的银行使用它们自己的内部信用评级（基于内部信用模型，参见第25章），这种办法将会更符合真实的信用风险。这里的问题在于，目前还没有比较完备且被接受的方法，而检验这些模型也存在很多困难。

除了上面说明的问题外，更大的困难在于评估由于使用信用衍生品而减小的信用风险，衡量营运风险和流动性风险也非常困难，因此现在大家都很清楚，巴塞尔用“新笔触”绘制的蓝图，并不能平息所有的批评。

银行资本

G10国家的银行都要执行最小8%的RAR规定。《巴塞尔协议》（1988）的建议基本上与EEC和美国监管者的要求一致。在每个国家，实际的资本充足度要求可以被定在8%以上，这要根据各国监管者定期对银行资产状况的评估决定。8%的最小资本要求中有对所谓“核心”或“第一级”资本最小4%的要求（其余部分构成“第二级”资本）。基本上，银行的“第一级”资本包括：

第一级资本

- 股东权益。
- 留存收益（累计）。
- 非累计永久优先股（NCPPS）。

股东权益包括原始的股权和任何配股得到的收益。前两项的和经常被称为“股东基金”。非累计永久优先股并不自动具有得到红利的权利，通常也没有投票权。

“第一级”资本的最小值是4%，其余部分由“第二级”资本构成。后者包括一些混合证券（它们同时具有债权和股权的特点），还包括一些“会计”来源的现金。

第二级资本

- 累计永久优先股（CPPS）。
- 次级定期债（STD）。
- 重新估值准备。
- 未披露准备。

累计优先股和次级债是债权—股权混合体。拥有累计优先股的投资者不会每年收到红利，但是任何“错过的红利”必须在以后的日期支付。一些优先股具有浮动利率息票支付，它们被称为永久浮动利率票据（也是第二级资本的一部分）。次级定期债的持有者收到利息支付，但如果机构破产清算，这些债权人在所有其他债权人之后（但在普通股股东之前）获得支付。“会计来源的现金”是资产价值（比如银行的建筑物）被定期按市价计值而形成的重新估值准备。未披露准备（在美国称做贷款损失准备）指用来应对坏账的现金（比如银行贷款给正处于清算过程或即将破产的客户）。

提高资本率

银行的资本率可能会成为它扩张的限制。银行的“规模”可以用它总资产的价值和增长率衡量。如果一个银行处于8%的资本资产率上，那么它无法扩张它的资产负债表，除非它能得到更多的资本。一般认为，通过发行新股或削减红利（因而增加留存收益）来扩张资本的手段成本太高，不论是从实际的成本还是从它给机构投资者带来“逆向信号”的角度来看都是如此。因此，银行和其他金融机构在最近几年越来越关心它们每部分的经营活动是否达到了所用资本的“目标收益”。

假设银行的资本率（即资本/总资产）在它希望或政府要求的水平以下，它可以增加资本或减小总资产。因此，它可以发行更多的累计永久优先股或次级定期债或增配新股（向原有股东）。它也可以试着减小运营成本（比如员工成本）或（可能性较小）减少红利支付从而增加留存收益。它也可以通过出卖分支机构来减小资产负债表（比如花旗银行出售它的海外机构）或是把它的贷款卖给其他银行、金融机构或其他投资者，这被称为证券化。出售由抵押贷款、银行贷款和汽车贷款支持的债券是经常采用的方式。原始贷款者进行贷款的回收，并把它们传递给新的债券持有者，作为支付的息票。债券持有者拥有这些资产的权利，这些资产支持着最初的银行贷款(比如抵押贷款债券的持有者拥有在银行抵押的房屋)。然而，通过证券化，银行减小了它资产负债表上的资产，因此增加了它的资本资产率。

现在“资本率”在银行的决策中起着非常重要的作用。银行的每个部门（如外汇交易、债券和股票交易员、公司财务等)都需要一定数量的资本来维持正常的运营，它必须获得足够的利润以保证很好地利用这些资本。因此，银行中每个部门或许都需要对“风险调整资本收益”(RORAC)设定一个目标。

账面价值与市场价值

以上所有讨论中，我们使用的都是资产和负债的**账面价值**（book value)。我们根据历史或最原始的数据对资产和负债进行评估。这是在美国采用的通用会计准则（GAAP）的原理（其他国家类似)。《巴塞尔协议》中对信用风险造成的潜在损失也使用账面价值衡量。与使用账面价值相对的另一种方法是采用市场价值。这里，**经济净值**（economic net worth）**或权益资本经济净值**(economic value of equity capital）取决于资产和负债的市场价值之差。这种方式试图衡量资产和负债的市值变化和由于信用风险造成的市场价值的变化。对于金融机构持有的“市场化资产”，

比如股票和债券，这是很容易做到的。考虑一个简单的例子，一家金融机构只受到它的资产 A 和负债 L 的利率风险的影响。股东权益（市场价值）E_v 定义为 $A-L$，因此

$$\Delta E_v = \Delta A - \Delta L \tag{20.11}$$

使用资产和负债的“加权平均”久期，我们得到 $\Delta A/A = -D_A \mathrm{d}r_A$，$\Delta L/L = -D_L \mathrm{d}r_L$，和 $\mathrm{d}r_A = \beta \mathrm{d}r_L$（$\beta=1$ 对应着收益曲线的平行移动），因此

$$\Delta E_v = -(\beta D_A - D_L k) A \mathrm{d}r_L \tag{20.12}$$

其中，$k=L/A=1-E_v/A=1-\mathrm{EAR}$。因此，金融机构的经济权益值（或市场价值）的变化依赖于：

(1) 用“A”来衡量的金融机构的规模；
(2) 杠杆 L/A；
(3) 资产和负债的相对久期；
(4) r_A 相对于 r_L 的变化（即 β 的大小）；
(5) 利率变化的绝对值 $\mathrm{d}r_L$。

现在，对于偿债能力至关重要的是，E_v 的下降是否能够由金融机构持有的实际股权资本所承担。在美国，证券交易委员会（SEC）使用市场价值的会计形式来决定公司的证券净值和它们的最小资本要求。然而，对于银行和储贷机构这样的金融机构，使用市场价值会计方法有非常明显的“技术性问题”。而且有的资产是非交易资产，因此没有可直接观察到的市场价格（比如银行向公司的贷款）。不过这一点不适用于已被证券化的贷款（如美国的房屋贷款）。另外，在对衍生品估值和建立信用风险的市场价值时，也存在严重的问题。这些问题将在后面章节中讨论资本充足度时进一步加以阐述。非市场化的资产价值难以衡量，但如果我们愿意，可以用金融机构股票价格的变化来衡量股权的经济价值（$=A-L$），我们可以把它与上面定义的股权的账面价值比较。这个量度被称为市场账面比率。对于美国的银行业，它可能从 80%变化到 130%，因此，使用市场价值和账面价值来衡量金融机构的“金融健康程度”会有相当大的差异。

究竟应该采用市场价值的会计制度还是账面价值的会计制度来报告金融机构的“金融健康”总头寸？年度报告应该采用哪种方法？这个争论仍然在进行中。反对使用市场价值会计制度的论据是：

- 准确衡量金融机构不可交易资产的市场价值非常困难。
- 当金融机构想持有资产至到期日（因此将收到已知的面值），采用市场价值会计方法却会造成很大的波动。另外，这种会计方法造成的资本损益会出现在利润表上，这两者都会误导投资者。
- 如果采用市场价值的衡量方法，金融机构可能更不愿长期贷款，因为长期贷款对利率有很大的敏感性。银行与客户之间的关系是长期性的，它建立在减少贷款回收困难的基础上。它构成了基于信用的一种内在合约，如果使用市场价值会计，这种信用会被打破。因此，在市场价值会计体系下，信用风险可能会变得更加严重。

在报告金融机构的年度状况时，市场价值会计制度与账面价值会计制度之间的斗争似乎已被后者赢得，但问题涉及金融机构的合适资本时，市场价值的概念越来越具有影响力，我们在后面几章中会看到这一点。

20.3 本章摘要

- 对金融机构监管的主要原因是**信息不对称**（特别是对小的储蓄者），它会造成**逆向选择**（比如，对于具有不同风险的项目，贷款利率几乎相同）和**道德风险**（银行所有者的“孤注一掷”策略）。后者与系统风险一起支持了由纳税人承担存款保险和最小资本充足要求的观点。
- 与**存款保险**（由纳税人承担）相对的方法是鼓励**“安全银行”**。银行通过持有国债这样的“安全资产”来支持它们的支票账户。或者，也可以通过立法要求银行具有更大的透明度，并让个人来监督银行的资产，同时承担任何银行破产的全部损失。
- 在新世纪的发达经济中，人们不像从前那样把银行看做“特别”的金融机构。现在有多重功能的金融机构，对**银行进行特别监管**的理由已经很少了。
- 当银行的资产下跌时，**股权资本**为储蓄者提供了一个“缓冲垫”。
- **《巴塞尔协议》（1988）**关于信用风险的权重方法对不同类型的资产应用不同的相对违约概率。首先，有一个相对风险权重（或相对违约概率）的约定 w_i。然后，监管者就最具风险资产违约的绝对风险的最小价值达成一致，目前设定为 8%。这样得出银行的**最小资本充足要求**为 $E=0.08$（RWTA）。各国的监管者可以根据定期的检查而设定更高的 g 值。
- 在《巴塞尔协议》中，应对信用风险的资本同时有“**表内**”和“**表外**”项目（比如没有使用的贷款承诺，诸如远期和互换的场外衍生品）。
- **《巴塞尔协议》（1988）的信用风险资本充足度要求**基本上是主观制定的，因为相对风险权重的设置并没有实证基础，它们忽视了资产组合的分散化效应（比如，化学行业的“坏账”可以由休闲行业的“良好贷款”抵消）。在第 25 章中我们将进一步讨论关于信用风险的问题。

章末练习

1. 举出银行业所发生的“逆向选择”的例子。
2. 什么是“信息不对称”？为什么它是金融系统的一个问题？
3. 什么是金融系统的系统风险？
4. 为什么（政府支持的）存款保险会造成道德风险问题？
5. “银行资本”的功能是什么？
6. 你的银行的“巴塞尔”资本充足比率面临着跌至本国监管者设定的比率以下的危险。你会采取什么措施来提高资本比率呢？
7. 1988 年的《巴塞尔协议》对风险权重的选择如何造成更高的实际“经济”风险（即使根据《巴塞尔协议》所得到的风险量度不变或下跌）？

第21章

英国和美国的监管体系

学习目标

- 考察**英美两国金融制度**的近期历史和对金融中介机构（特别是银行）进行实际监管的一些案例。
- 了解为什么英国从几个各司其职的监管机构（如对银行、建筑协会、证券交易所）过渡为一个“**超级监管者**”。后者在2000年已经开始完全运行，被称为**金融服务管理局**（Financial Services Authority，FSA)。
- 简要了解美国对**银行和储贷机构**（S&L）的监管以及带给我们的经验教训，这体现在新的立法之中。
- 分析**存款保险**在未来的作用和取代它的一些办法。
- 讨论1988年《巴塞尔协议》和应对金融机构信用风险的最小**资本充足度要求**。理解当这些资本比率进入“危险区域”时，监管者如何变得过于积极。
- 学习**国际信用与商业银行**（BCCI）倒闭的案例。

近年来，英国和美国的监管体系都发生了重大变化，这反映了金融服务业世界范围内的快速变化（比如全球性银行的创立、银行与其他金融机构之间界限的模糊）。本章我们简要回顾一下最新的发展和导致这些变化的主要事件。希望这些（简短的）历史回顾能够使读者对金融系统变得日趋复杂所带来的问题有所警惕。这里讨论的问题对发展中国家的读者也会有很大帮助。发展中国家的金融体系正在逐步解除管制，向国外的竞争者开放（经常是作为获得诸如IMF和世界银行这类国际机构金融援助的条件）。因此，英国和美国的经历可以对“发展中”的金融体系提供一些有用的“案例研究”。然而，金融变化和国际化的进程如此之快，大多数国家很快就不得不采纳国际公认的监管控制的标准。

有一件事情是明白无误的，即（G30国家的）银行自1990年起承受着越来越大的金融压力，这使得监管的力度变得更强。这些压力包括：

- 消除国外银行进入的壁垒后，全球竞争日趋激烈。
- 更多的公司（特别在美国和英国）选择从资本市场而不是通过银行贷款融资，而使银行面对着信誉更差的公司。
- 抵押品（比如公司的土地和建筑物）不像前些年那样具有确定的价值恢复率，因而银行危机经常伴随着房地产价格的下跌（比如20世纪90年代的日本和1997年、1998年的泰国）。
- 随着卡特尔的终结和竞争加剧，贷款的利润变得越来越小。
- 远期和互换等表外项目的增长导致银行面临更多的信用风险。

21.1 英国的监管体系

我们首先简要回顾一下过去10年间金融监管领域的主要观点，一方面因为金融服务业和监管的实践都发生了重大变化，另一方面因为回顾本身也是很有启发性的。一种对监管体系很有用的分类方式是把它们分成两大类：结构规范和行为规范。**结构规范**（Structural regulation）体系下，监管者决定哪些公司和个人可以从事哪些经营活动。这通常涉及功能的划分。例如，英国的主要监管者（从1998年以来是金融服务管理局FSA）禁止保险和养老咨询公司推广它们本公司的产品，咨询与销售从功能上是分开的。然而，关于股票交易的情况却不同。这里，大多数（不是全部）公司在1986年的“大爆炸”后选择双重功能，即同时对购买股票开展咨询（经纪功能）和买卖它们自己账户上的股票（充当做市商，拥有自己的账户）。人们认为同一公司内部的经纪人/做市商角色并不会发生冲突，因为这些双重身份的公司内部有“中国墙”的存在。上面两个例子中功能分开具有差异的原因是，普遍认为人们在股票交易中了解的信息（关于风险和收益）比在购买保险合同中了解的信息更多，因此只有后者需要正式的分开。

在某个特别的市场上，参与者的行为受到**行为规范**（conduct regulation）的制约。在金融市场上，行为规范经常涉及产品质量。监管者通过执照（即设定产品的最低标准）和证明（即保证提供这些服务的从业人员具备一定的能力，比如保险推销员）来保证“质量”。某些情况下，公司可以通过它们的历史业绩为质量建立起**声誉效应**（reputation effect）：为了不丢掉明天的生意，今天不能去欺骗！

在某些金融市场上，“声誉效应”似乎很容易建立，因为客户所能得到的关于这家机构的流动性、偿债能力等信息经常并不准确，销售人员的“沉没成本”（即建筑物、计算机技术等）相对较低。但是，危险在于“声誉效应”并不能保证明天的偿债能力。例如，英国的 Barlow - Clowes 投资集团很容易就吸引到大量的投资资金，它声称这些资金只会被投资于“安全的”英国政府股票。然而，它最终由于欺诈被破产清算，因为这些钱被购买了高风险的金融资产和用于它的管理人员的奢侈生活中。类似地，作为一个很大的国际银行，国际信用与商业银行（BCCI）也在 1991 年遭受同样的命运，而被英格兰银行关闭（见下文）。巴林银行也被认为是一家具有相当“声誉效应”的银行（它是伊丽莎白二世的银行!），但当 Nick Leeson 在新加坡的衍生品交易造成 14 亿美元的损失后，该银行也在 1995 年破产。

因此，毫不令人吃惊的是，监管机构实现监管并不依赖于“声誉效应”，而是依赖于执照、证明和对机构的严格监督，包括对它们资本状况的监督。英国和美国的监管政策这些年发生了巨大变化，两国采取的措施都变得更加严厉。然而，现在评价新的英国“超级监管者”FSA 是否能够避免它的前任的错误还为时尚早，因为它在 2000 年才开始运行。在本章中，我们主要讨论银行和存贷机构（即美国的“节俭基金”（thrifts）和英国的“建筑协会”），因为它们的贷款是信用风险的主要来源。后面几章我们将讨论市场风险。

银行

直到最近，监督只是集中于在银行执照方面和对它们贷款组合的估值。1987 年的**《银行法案》**（Banking Act）的主要条款是：

(1) 设立一个银行监督委员会，帮助英格兰银行的总督行使监督职责。

(2) 为获得银行执照，需要具有最低数量的全部预付资本，银行的管理者必须是“合适的人”。

(3) 银行审计人员必须与监管者保持密切的联系，对某个贷款者的大额贷款，银行有法定义务做出汇报。

(4) 资本充足度和流动性比率都要监视，但是没有设定的最小目标。

(5) 和 1979 年的银行法案一样，保留了存款保护条款。（现在是每个储蓄者 20 000 英镑，或是每个人总存款的 75%，取其中较小的一个。）

在这个法案之下，监管者（直到最近都是英格兰银行）大体上保持着灵活的“相时而动”的态度。人们认为资本充足度要求使银行拥有足够由“自有资金”构成的“缓冲垫”，来吸收任何可能由信用风险造成的损失和支持基础设施建设（比如开设新网点）。人们没有使用任何方法对市场风险估计。股东资金（即股东权益和准备）减去固定资产（如建筑物）大体上构成“自由资本”，它被用在银行的资本充足度的计算当中。

已经确认的风险有三种主要形式：信用风险、投资（市场风险）和强迫出售风险。每种银行资产（比如证券、公司贷款、住房贷款、未抵押贷款等）都被主观指定一个“风险权重”，它根据三种主要风险确定，反映了发生损失的相对风险。自由资本和风险调整总资产的比率就给出了“资本充足比率”。另外，每个银行的流动性头寸通过现金流方法进行估计，考虑在几个成熟期间的净头寸（负债减去资产）和最近过去的累积净头寸。然而，英格兰银行所做的估计只是把这些

数字作为“有用的向导”。直到1986年，其他的一些因素被包含在称为“骆驼方法”（CAMEL approach，camel是几个词的首字母——译者注），如资本充足度、资产流动性、管理质量、收入和流动性。因此英国监管者的方法是非常灵活的，其监管基于对每个金融机构的定期检查。

有一个关键问题无法由英国的立法机关独自处理，即如何监管在一个国家注册却在另一个国家营业的银行。国际结算银行主持了一系列会议对此讨论，最终决定不建立一个超国家的监管机构，而是采纳**隶属关系原则**（principle of subordination）。就是说，每个国家的监管机构对本国的银行进行执照审查和监管，这些银行将自动获得在其他国家营业的权利（比如，如果FSA批准一家英国银行，那么这家银行可以在其他G30国家设立分支机构，而无需这些国家监管部门的干预）。

建筑协会

《建筑协会法案》(1986)（Building Societies Act）从本质上放松了对建筑协会资产负债表上贷款和存款项目的限制，并允许它们从事多样的金融服务活动（比如出售保险、买卖股票、进行房地产经纪等）。贷款中某个（固定最大的）比例的贷款现在可以是无抵押贷款（而不是只由房产支持），其一定比例的存款资金可以进入批发存款市场（有一个最大的限定）。因此，英国的建筑协会变得更加类似于银行，它们现在可以成为上市公司（比如Abbey National plc，Halifax plc）。

其他监管机构

1986年，英国当局通过**《金融服务业法案》(1986)**（Financial Services Act）对非银行的金融监管进行了重大改变，这体现了“在司法体系下基于实践者的规范”的原理。贸易与工业部的部长可以授权谁能从事投资业，但是他也可以把审批权授给证券与投资委员会（SIB）。SIB对一些自律组织（SRO）的规则进行监督审查。如果一家公司被允许成为SRO的成员，那么它就获得了“营业执照”。因此SRO的规则相当于有效的“进入壁垒”。SRO包括：证券与期货协会（SFA），金融中介、经理和经纪人监管协会（FIMBRA），期货、经纪人和交易者协会（AFBD），投资经理监管组织（IMRO），人寿保险和单位信用监管组织（LAUTRO）。《金融服务业法案》（1986）为SRO的规则和操作制定了三个主要标准。它们必须：

(1) 保证投资业的从业人员是“合适的”人；

(2) 推广完备的投资者保护；

(3) 尽可能鼓励竞争。

因为金融市场的全球化，伦敦的监管组织要直接与纽约、新加坡、香港或东京的组织竞争。因此交易者可以选择他们的买卖行为在何处发生，他们这样做时要考虑不同地方的投资者保护程度。并不是所有的金融服务机构都会被吸引到管制最少的地区（比如开曼群岛）。然而，一种观点强烈认为SRO会收到“监管获利”（regulatory capture）的影响（即它们采取某些行动有时是为了成员而不是公众的利益）。当然，在设定进入规则和创造进入壁垒之间也有一个明确的界限。令人吃惊的是，很多自律组织（例如法律协会和英国医药协会）设置了进入条件，但却不对已有

成员进行定期检查。对现存成员定期检查的缺乏会导致更少的竞争和更多的无效率。对 SRO 的另一个批评是，它们是“席位制”，而不是“现场活跃制”。与它的英国同行不同，美国的证券交易委员会（SEC）会对金融机构实行现场检查。

英国的监管体系当前（2000 年）正处于重整阶段。英格兰银行对银行的监管职能和 SIB 的权力都移交给新的“超级监管者”**金融服务管理局**（FSA）。现在，主流观点认为自我约束的体制已经失败了，部分是由于 SRO 职责的重叠和混乱，部分是由于“监管获利”的存在。FSA 在处理不对客户尽责服务的金融机构时，会更加积极，它也将对所有的风险管理进行监控。目前，英国政府正在通过对一些事件的处理设定“监管的基调”，其中包括对不正当出售（15 亿美元）私人养老基金的严厉处理，这已经使一些养老基金收到罚款处理，还有对不正当出售养老保险抵押的处理，其中的一些金融机构将不能得到足够多的资本金来支付现存的抵押。现在对 FSA 的表现进行评价还为时过早，因为若干年以后才能对它（而不是它的前任 SIB 和 SRO）所做的决定进行评论。

21.2 美国的监管体系

在美国，许多大的全国性银行是联邦储备系统的一部分，但是也有一些州和地方银行在联邦储备系统有自己的准备金。对银行集中的敌视导致立法限制银行跨州开展业务（即在其他州设立分支机构）。在美国，与英国的建筑协会等价的是储蓄与贷款机构（S&L），简称为“节俭基金”。

银行和储蓄与贷款机构

20 世纪 80 年代，大批储贷机构倒闭，留下巨额损失由纳税人承担，联邦储蓄与贷款保险公司（FSLIC）为此付出了很大代价，最终破产。银行的情况要好一些，但是仍有很多银行破产，它们的（部分）存款由联邦储蓄保险公司（FDIC）的银行保险基金进行赔偿。到 1991 年为止的 4 年里，FDIC 遭受了很大损失，也以要宣告破产进行威胁。因此，我们想了解一下美国的监管程序。我们首先考虑银行的情况。美国使用的监管方法主要可以分成以下几类：

- **纠正性措施**（Corrective action）：这里，银行只有在规定时间内筹集到足够的资本，满足最小资本充足度的要求后，监管者才允许银行继续经营。
- **容忍**（Forbearance）：这种情况下，监管者允许银行以低资本率继续经营，但会对它的行为做附加限制，以使它能重建它的资本基础。
- **政府投资**（Government investment）：这种情况下，政府提供银行所需的部分或全部资本金，来满足它的最小资本要求。

在纠正性措施下，FDIC 将出售银行的固定资产，或者更可能的是，促成它与一家健康银行合并。作为对老银行坏账的补偿，FDIC 将支付给新银行一定数量的资金。政府也可能通过 FDIC 的**开放银行援助**（open-bank assistance）投资于衰弱的银行。这里，FDIC 通常会购买次级债或者优先股股票，两者都可计入银行的资本要求。次级债是在所有未保险的储蓄者的存款得到完全支付后才能被支付的债务。优先股股票会得到事先决定的红利，比普通股股票的红利具有优先

权。在目前美国的资本要求下，次级债和具有累计红利的优先股股票被划分为“第二级”资本，不具有累计红利的优先股股票被划分为“第一级”资本。FDIC 持有的这类证券没有投票权，但在某些情况下可以被转换为普通股股票，或是带有购买普通股股票的期权。后者意味着如果银行“康复”，FDIC 可以分享银行的未来利润。在 20 世纪 90 年代早期，FDIC 可以获得银行保险基金（BIF）的资金，尽管银行破产后对此基金的要求权已经使该基金的头寸情况持续恶化。1991 年 11 月，国会通过了《银行法案》，对实行纠正性措施予以支持，但同时也包含了一项条款，使监管者在适当的时候能够使用开放银行援助。

之所以由政府进行干预来拯救破产的银行，是因为存在信息不对称，因此私人投资者不能了解银行资产头寸的真实情况。因为监管者定期检查银行的账务，他们更加清楚哪些银行从长期看具有偿债能力。

另外一个方法是“容忍”。银行被允许以低资本度继续经营，并寄希望于它能通过留存收益或向私人投资者增发股票的方式来补足资本基础。对容忍的反对意见是它造成了道德风险问题，即银行的所有者可能会把贷款投放在高风险的项目，因为如果成功，股东会获得更多的分红，如果失败，股东的成本也不会变化。政府可以通过自己投资于银行的普通股来稍微减小一些道德风险问题。这样政府将和现有的股东一起分享未来的任何利润。在某种程度上，政府稀释了现有股东对未来利润的所有权。

另一种观点也认为开放银行援助胜过容忍措施，这种观点认为，在后一种情况下，资本率低的银行为了吸引未保险的储蓄者，不得不支付很高的利息作为对银行高破产风险的补偿。在开放银行援助下，政府注入了新的资本，减小了银行破产给储蓄者的存款带来的风险，因此银行能够以较低的成本吸引到未保险存款。但这个推理并不成立。20 世纪 90 年代，大约 75%的银行存款受到法定100 000美元保险限额的保护。实际上，在很多次银行破产中，FDIC 都通过促成要破产的银行于一家健康银行合并的办法而实现了对超出该限额的未担保存款的保护。因此，经营状况较差银行的存款者基本上认为他们受到了完全的保护。

如果开放银行援助采取投资于具有投票权的普通股票的形式，那么政府就有控制银行系统的嫌疑，这将打破正常的市场机制。另一方面，如果他们不具有投票权，那么银行的所有者可能会贷款给高风险的项目（即道德风险）。最后一种观点认为，如果政府拥有比私人投资者更多的信息，那么它可以把该信息公之于众，让私人投资者提供所需资本。但这种说法没有说服力，因为许多公司为了专门的项目从银行贷款，它们不希望项目的细节泄露给市场，否则竞争对手将会得到更多的信息。

存款保险

在美国，目前100 000美元以下的银行和储贷机构存款会自动受到保险。金融机构支付占存款固定比例的保险费。在 20 世纪 70 年代和 80 年代早期，美国的利率大幅上升，大量贷款违约，特别是储贷机构的贷款。到 1988 年，接近 500 家储贷机构倒闭或处于破产边缘。储贷机构的破产、重组和再融资的成本估计超过1 500亿美元。为解决储贷机构的危机，1989 年 2 月，美国政府公布了一项计划，包括对破产的 FSLIC 的资本重组以及关闭大约 500 家储贷机构。还有一些措施用来加强 FSLIC 的资金。然而，对于改革存款保险制度却没有任何建议，我们现在就来讨

论这个问题。

为什么银行和储贷机构应该受到联邦存款保险，而其他处理金融资产的机构（如信托公司、养老保险基金、保险公司等）的债务没有政府的保险？这涉及同一个市场上的机构被公平对待的问题。如果支持联邦存款保险的论据是因为存在不对称信息，那么从原理上说，相关当局可以制定法律，使它能收集并传播“隐藏”的信息。政府可以充当评级机构的角色，停止对存款保险。

支持存款保险的一种论据是银行挤兑的可能性。然而，如果银行挤兑是由于存款者从经营良好的机构提款，那么当局总是可以充当最后的借款者，从而避免系统性的银行挤兑。这样就无需实行存款保险计划。如果存款保险是为了在发生银行挤兑时保护支付系统，那么更明智的办法是提供对于支票账户的完全保险，而其他账户根本不必保险。如果保险计划的支付没有与这家机构资产组合的风险联系起来，那必然会出现道德风险的问题。在一个非基于风险的存款保险计划下，价格（利率）不能反映贷款协议的相对风险，因此对更具风险的项目贷款的机构会获得某种意义上的“交叉津贴”。这就造成银行的管理者想承担更大的风险，因为“风险”的价格被低估了（比如，一个完全保险的汽车司机具有零“免赔额”，他更可能不顾后果地驾驶，因为如果发生事故，他不会受到任何经济损失）。另外，被保险的存款者没有任何动机去监视银行资产的风险，当看到银行的风险增加时，他也不会提出存款。逆向选择的问题也存在。既然存款保险的保费与风险无关，那么它对冒险的银行家的吸引力就会大于对保守银行家的吸引力。因此，更多热爱冒险的企业家（甚至骗子）就会进入银行业。

一旦我们愿意接受风险无关的存款计划，伴随而来的就是道德风险和逆向选择的问题，那么我们就需要采取措施来限制此类问题发生。以保险公司为例，如果保险公司发现挑出“爱冒险的司机”（在他们发生事故之前）非常困难，因而不能对个人汽车保险准确定价，那么它们可以在保险合约中进行相当一般的限制，来区别出这样高风险的特征（比如，购买保险者不能驾驶带有燃料喷射引擎的汽车，或 75 岁以上的人必须接受健康检查）。同样，监管者对银行会应用一般性的措施。例如，只有“合适的人”才可以拥有银行，所有权的获得和转移都要经过监管者事先批准，或者他们可以限制银行持有某些“风险”资产（比如，直到最近美国的商业银行才可以从事经纪活动或是承销公司证券，参见《Glass-Steagall 法案》，1933）。

其他问题

监管者也试图通过实行最小资本要求来减少道德风险问题。如果与存款相比，银行拥有更多的权益资本，那么一旦银行破产，银行的所有者就会遭受更大损失，这将使他们对经理们施加压力，让他们进行风险更小的投资（比如通过股东会议或是通过出售股票造成价格下跌）。资本充足度要求与个人贷款的抵押品要求相似，或者说它很像保险合同中的“免赔”（可减）部分。

一种观点认为，FDIC 和 FSLIC 的政策对大的机构更加有利。例如，FDIC 从没有对资产超过 6 亿美元的银行破产清算过。因此它实际上对所有（保险和未保险）的存款者提供了 100%的保险，有时甚至对债券持有者，担保和未担保的债权人也提供了保险。例如，Continental Illinois 是美国最大的 10 家银行之一，1984 年该银行濒于破产时，FDIC 对其所有存款进行了担保（包括100 000美元之上的），甚至避免持有银行债券的公司受到损失。另一方面，许多小银行被关闭，一些未保险的存款者遭受了损失。这就造成大的存款机构在吸引大额未保险的存款时

（100 000美元以上）比小机构具有竞争优势。另外，大银行的经理也比小银行的经理具有更大的道德风险问题，如果发生差错，FDIC受到的损失也会更大。

监管者也有他们自己的道德风险问题。他们有动机不去关闭濒于破产的机构（即过度容忍），因为关闭机构意味着他们的监管不够尽责，会招致外部人（如政治家）的批评，这可能会影响到他们的工作前途和未来的薪水。最后，监管者可能会被政治家和接受审查的机构所左右，而延缓关闭这些机构，这是某种形式的监管风险。

21.3 美国的近期变化

在20世纪70年代和80年代，美国银行面临着迅速的金融创新，新的金融工具层出不穷，比如货币市场开放基金、高收益债券、互换等。银行面对着来自基金的更强烈竞争，他们发现必须采用更富侵略性的措施才能吸收到存款，这就增加了银行资金的成本。在贷款方面，公司更愿意从商业票据市场筹集资金，于是就降低了对银行贷款的需求。这导致银行贷款在高风险项目上，比如房地产和杠杆收购。这段时期，存款保险计划基本没有发生变化，因此银行系统内的逆向选择和道德风险问题变得非常普遍。因为大批银行倒闭，联邦保险系统遭受巨大损失，为此，美国财政部引入了一项银行改革计划，称为现代化金融体系——对于更安全更具竞争性银行的建议（美国财政部，1991年2月5日）。

资本充足度要求

新法案中重要的一条是加强对资本充足度的要求。在财政部的建议中，美国的银行被分成5个风险等级（等级1是低风险，等级5是高风险）。我们已经看到，银行的资本与抵押类似。在财政部的建议中，具有高资本充足度的银行将被允许进行更高风险的投资。在等级1中资本率良好的银行可以相对更容易地兼并其他银行和金融公司。它们可以分散它们的资产组合，包括投资于证券资产和开放式基金，并能够以持股公司的形式开展自己的保险业务。

第2等级的银行不能从事新的金融服务业务，除非它们达到了第1等级银行的资本充足标准。第3等级的银行被定义为资本处于最低要求以下的银行，它们将受到自主性制裁（比如，对于风险贷款和资产增长的速度的限制）。监管者甚至可以罢免管理人员。第3等级的银行必须提出计划来增加资本，达到第1等级和第2等级银行的标准。第4等级的银行被认为已经濒临破产边缘，第3等级的自主性行动在这里已经变成“推定性”的。最后，第5等级的银行的资本远小于所需标准，将被其他银行兼并或者最终破产。所有的银行都要接受监管者的年度检查。一旦银行被划分入某个等级，财政部将提出建议（建议可能与最初的分类有差别）。几乎没有任何对监管者所提出的建议进行怀疑的余地，这些建议适用于属于该等级的银行。

关于监管者应该对第4和第5等级的银行采取强制性还是推定性的措施，目前还存在争论。这是一个时间不一致的问题（如Mishkin所指出，1992）。如果监管者的措施是强制性的，那么这在某种意义上是一个自动的规则，但在某些情况下这个规则并不适用（比如系统性的银行风

险）。另一方面，如果措施是推定性的，那么监管者具有自主决定权，他们可能有动机让金融机构继续经营（即监管容忍），即使机构能够恢复的可能性非常低。Mishkin 认为，毫无疑问，对于第 4 和第 5 等级的银行，监管者应该采取强制性的措施，除非监管者能够证明强制性措施对整体银行系统有害。如果监管者背离了强制性规则，那么他们有出具证据的义务。这里的问题在于，哪一种方法能够提供给监管者合适的信号，让他们的行动有益于金融机构（最终对纳税人有利，因为存在着联邦存款保险）。

当然，为了计算出资本—资产比率，还有许多其他的方法来衡量银行的“资本”和资产。例如，我们是否应该使用基于历史会计成本的账面价值呢？显然，涉及银行贷款时，历史会计忽视了贷款的任何未来潜在坏账或是违约风险。虽然银行贷款的市场价值难以估计，银行的监管者却可以把银行贷款划分成不同的风险等级，并（粗略）估计出每个等级的违约概率。《巴塞尔协议》基本就是这样做的。最终，可以实现这些贷款的证券化（比如抵押证券），或是通过交易另一方信用等级的变化来衡量市场价值的变化（参见第 25 章），或是通过不同行业公司发行的债券利率差幅的变化来衡量。

全国性银行

美国财政部认识到只被允许在一个州内经营的银行具有很高的风险。它们的贷款大部分都贷给本州的公司，存款也大多来自于本州。例如，在 20 世纪 80 年代石油市场崩溃时，任何给石油公司的贷款都有很高的违约风险，这是得克萨斯州大量银行发生倒闭的一个原因（FDIC 也遭受了损失）。在财政部的建议中，银行持股公司可以在全国范围内开展业务，因此也能在其他州开设分支机构。但有些州仍然对此限制，全国性银行是否能够称为银行的主流目前还不能确定。

财政部也建议废除《Glass - Steagall 法案》的剩余条款。资本率良好的银行持股公司将被允许开设从事证券和保险业的分公司。这样的持股公司由商业或金融公司所拥有。持股公司在银行、证券、保险的每个分公司都有单独的资本充足度要求，并接受“伞式”监管。泄漏防火墙将用来防止买卖股票的行为与为银行客户提供公正的经纪建议之间所发生的冲突。如果一家商业公司发现它缺少资金，便使用它的银行子公司作为资金的来源，也会造成利益冲突，联邦存款保险机构可能会受到潜在的损失。另一方面，银行通过进入更广泛的市场和持有更多种类的资产可以减小持股公司的总风险。后者主要依赖于联邦存款保险所面临的道德风险问题是否能够通过设定足够高的最小资本充足标准而被抵消。

存款保险的改革

财政部的提案建议把被经纪的存款从存款保险中剔除。过去，为了规避100 000美元的限额，货币经纪商会把投资者的一大笔资金拆成每份100 000的存款，存在不同的银行里。这种方法就像是养老基金里的“转手”存款。但在实践中，这个建议很难实施。

财政部的计划还包括把保险限额由每个存款者在每个银行100 000美元变成每个存款者在整

个银行系统的100 000美元。这意味着，如果一个人在A银行存了100 000美元，在B银行存了100 000美元，当两家银行同时倒闭时，这个人将只能得到100 000美元。财政部也提出了基于风险的存款保险计划。首先，它建议把存款保险费与银行的资本联系起来，这样，高资本充足率的银行就可以支付较少的保险费。该措施可以促使银行持有更多的资本，因为它可以作为“免赔额”抵消对存款保险机构的支付。

财政部也提出了一项计划来衡量私人再保险计划的可能性。FDIC将把存款者的资金中一小部分（如5%或10%）在私人保险公司进行再保险，FDIC对剩余部分保险。这5%～10%存款的保费由私人保险机构以竞标的形式根据不同的银行确定。FDIC可以把这个再保险的保费作为标准，来对银行存款中的大部分（上至100 000美元）收取保费。显然，这种基于市场的方法可以鼓励私人机构监视银行的风险情况。财政部也希望通过再保险保费的变化来了解银行是否出现了问题。美国财政部建议对它的再保险计划试运行一下，因为计划本身也存在一些问题，比如：

- 私人保险公司可能会因为承担太多的风险而倒闭（比如1985年俄亥俄州和马里兰州发生的情况）。这说明监管者也必须对私人再保险公司监管。
- 在这种制度下，如果监管机构有关于某个金融机构的内部信息，它应该与私人再保险公司分享。然而，如果FDIC准备关闭一家与再保险公司有再保险合同的机构，这就会造成利益冲突。

监管结构的变化

美国财政部建议，所有的全国性银行和储贷机构由一个新的联邦银行机构（FBA）监督，而美联储只监督各州的银行。这样，每家银行持股公司只有一个监管者（而不是像现在这样有几个）。初看起来，这样的措施很有道理。然而，还是有一些问题存在。首先，FDIC承担着银行破产的成本，虽然它有最大的动机来监督银行不进行过高风险的贷款，但它本身却不是一个监管者。第二，当银行系统发生流动性危机或是系统风险时（比如Penn Central的破产和1987年的股市崩溃时），美联储会担当最终贷款者的角色。然而，在财政部的计划下，美联储不能像以前一样监视整体的银行系统，因此难以判断系统风险是否存在。

财政部没有采纳只对“狭义银行”（即那些持有的资产只限于可忽略风险的政府股票的银行）给予完全保险的建议。另外，财政部计划允许监管者有自主权选择是否采取“太大而不能让它倒闭”的政策。于是，这方面的道德风险问题仍然存在。

美国的改革：结论

问题的核心是道德风险问题，这是由政府（最终是纳税人）提供的存款保险造成的。如果由私营机构进行再保险，道德风险问题可能会减轻一些。然而，银行监管者必须对私营的再保险机构进行监管。

财政部计划没有采纳只对“狭义银行”给予完全保险的建议。如果“狭义银行”的资产只限

于政府发行的证券，那么这样的银行应该是 100%安全的。当然，这类账户的利息也会相对较低。然而，需要清楚的是，对小投资者而言，这类资金是绝对安全的。这样就能使具有风险资产的存款机构只由市场监督。

系统风险的减少可以通过美联储担当“可以最后求助”的借款者或是美联储采取的“救生艇行动”而实现。这样，美联储可以暂时保证处于危机中银行的净资产头寸，直到获得银行的账簿，从而确定系统风险的程度。面临大范围的系统风险时（比如危机中的银行持有大量其他银行的存款），美联储可能会决定把银行解救出来。

再保险计划只能对一小部分存款承担保险，因为银行的性质决定了它们和它们的客户都不希望对外透露贷款项目的细节。因此，再保险计划只能在很小程度上降低道德风险问题。

监管机构的主要影响来自于应用最小资本充足标准和用最优的实践手段来衡量它们。银行也必须透露足够的信息来让私有机构决定它是否达到此标准。最终，私有机构和未保险的存款者必须具有动机监视潜在的银行风险。如果银行倒闭，它们必须也要对后果负责。因此，总的来讲，财政部的建议虽然通过分级的资本充足度要求加强了委托—代理人关系，但似乎没有消除存款保险带来的严重的道德风险问题。

21.4　国际信用与商业银行（BCCI）

本案例很好地描述了监管国际市场条件下的金融机构所涉及的困难。1991 年 7 月 5 日，星期五，当时的监管者英格兰银行以调查显示 BCCI 与大规模的欺诈行为有关而关闭了它在英国的机构。这导致 BCCI 在全球大部分的机构都被关闭。对 BCCI 的控制被转移给各个国家的清算者手里。人们普遍认为，虽然 BCCI 是因为欺诈的名义被关闭的，但实际上，当局介入时，它已经失去偿债能力了。

在 BCCI 破产时，Zayed 王子和他的家族拥有该集团 75%股份。（Zayed 王子是阿不扎比的统治者。）BCCI 正处于资产重组的过程中，作为援助计划的一部分，Zayed 王子刚刚注入了 4.4 亿英镑的资金。估计当时银行存款约有 10 亿英镑左右，英国居民大约有 2.5 亿英镑存在该银行里。据估计英国地方当局有 1 亿英镑的存款也在该银行中。在英国的存款保护条款之下，BCCI 的个人存款者（每个地方当局只能被算做一个存款者）将会收到 15 000 英镑或 75%存款两者中更少金额的赔偿。

BCCI 集团的主要部分是在卢森堡注册的。货币机构（Monetary Institute）是卢森堡的银行监管者，这个国家有很严格的保密法律，监管者并不对银行进行细节上的严格审查，而且审查也不定期进行。早年间，BCCI 就曾受到过批评。它曾因为洗黑钱而被美国国内税务局起诉而受到罚款处理。另外，它通过与很多公司的一系列秘密交易，取得了对一家大型美国银行 First American Bank Shares 的控制权。涉及英国地方当局的情况是，伦敦的货币经纪商作为中介把地方政府的钱投资于 BCCI，他们在地方当局和 BCCI 收取两份佣金。

这起事件中的一个关键问题涉及作为监管者的英格兰银行和银行的审计机构。自从 1986 年，银行的审计公司普华永道一直对银行的账目出具“真实而公正”的证明，它只是在 1990 年春天提出 BCCI 的财务重组问题还需要进行处理，这个意见可以被理解为对于投资者的隐晦的警告：

情况有些不对了。涉及英格兰银行的是，它在声明中认为它没有足够的证据表明BCCI不具备偿债能力，实际上，它并不是因为BCCI的偿债能力，而是因为它的欺诈行为才将它关闭。英格兰银行曾请求过Zayed王子，他能否会给予存款者更多的补偿，英格兰银行还指示英国的主要银行对有BCCI贷款的商人给予支持。然而，这些银行对前BCCI客户的附加贷款都是基于“一般性的商业条款”的。对英国主要银行的道义说服是英格兰银行经常采用的手段。

当时，英格兰银行也负责监管金融城的货币经纪商。根据《金融服务法案》(1986)，英格兰银行有权力获得货币经纪商的“账簿”和其他文档。英国地方当局以经纪商行为失误为由向他们提出诉讼。但是地方当局所持的“经纪商们有义务为他们的资金找到一个安全所在”的观点是十分模糊的。经纪商只是与地方当局协商，获得一些佣金，随后，当资金被存入银行后，它又获得来自银行的佣金（本案中是BCCI)。经纪商从两方所获得的佣金没有被公开，但被认为承受着相当激烈的竞争。

BCCI倒闭的问题在文章21.1中进行了总结。金融机构倒闭的法律后果也不容低估。清算者德勤公司（Deloitte and Touche）已经向英格兰银行索赔7亿英镑（11亿美元），理由是它不诚实地颁给BCCI执照，当它“知道、相信或怀疑”BCCI可能会倒闭时，也没有取消它的执照。高等法院（1997年7月31日）和上诉法院拒绝审理此案。因此，庭审案件持续了7年之久，在此期间，债权人（存款者和债券持有人）不能得到全部银行剩余价值的赔偿。与此同时，英国的存款保护计划付出了8 000万英镑的赔偿。金融倒闭确实是件棘手而昂贵的事情。

文章21.1　BCCI与BOE

在BCCI发生危机的时候，即使当时的监管者，即英格兰银行，把一家银行列在它的“被认可的银行”名单上，也没有意味着（或曾意味着）它会保证这家银行不会破产。因此，一般认为如果银行对存款支付很高的利息，那么相应的贷款就具有很高的风险。另外，BCCI的总部设在卢森堡而不是英国，接受的是那里的监管规则。实际上，BCCI在卢森堡的总部只是通过一家持股公司的名义在那里注册而已，它的主要业务是在其他国家进行的。卢森堡已经有法律禁止银行把总部设在那里却在别国经营业务。不幸的是，那里没有专门针对银行持股公司的法律。BCCI破产引起的一般性问题包括：

- 需要有一家领导性的监管机构对有全球性业务的银行的账目进行审计。
- 审计者和银行监管者之间的联系需要加强。
- 对存款者需要加强教育，让他们知道虽然银行有执照，监管者也并不保证它们不会破产。
- 当存在不对称信息时（对于小的存款者），监管者非常有必要让银行向股东和存款者披露尽可能多的信息。

21.5　本章摘要

2000年后，金融机构的监管问题依然是个非常重要的问题，无论在发达国家还是发展中国

家都是如此，相当重要的原因是各种金融和跨国界的资本流动。本章的要点如下：

- 对金融机构监管的主要原因是存在**信息不对称**（特别对于小储户而言），人们认为银行需要有某种形式由纳税人承保的存款保险。后者会造成银行**管理者的道德风险**问题和“孤注一掷”的策略。
- 因为金融服务业的变化（比如金融产品之间竞争加剧、综合性金融公司的建立、全球性银行的增长、银行与其他金融机构之间界限的模糊、衍生品的广泛使用和金融服务业中互联网交易的日趋重要等），**英国和美国的监管体系**正经历着重大调整。
- 纳税人支持的**存款保险**之外的办法包括“安全银行”和由私营公司根据信用等级对存款进行再保险。
- 最近，监管的主要形式是建立对几乎所有金融机构的关于信用风险（最近包括了市场风险）的**最小资本充足度要求**。当这些资本率进入“危险区域”时，监管者可以采取积极的自主性行动。
- 对于银行来说，自 1998 年，G30 国家都实行了**巴塞尔信用风险最小资本要求**。现在（2000 年）这个协议正在被重新制定。《巴塞尔协议》之外的一些方案将在后面章节进行讨论，市场风险的资本要求在下一章讨论。
- 虽然巴塞尔“规则”在设定资本要求方面对于 G30 国家提供了一个共同的国际标准，但**各国的监管者**在评估某个金融机构的风险时仍然具有很大的自主性。有些人认为这是公平合理的，有些人却认为这有些独断专行，是“保姆政府”的表现，即政府对自由市场过度的干预。
- 因为**全球化**的进程和传统的银行业、公司财务和自由账户交易之间障碍的消除，监管者们正在寻找风险管理的通用规则，从而能够应用于所有金融机构（和互联网）和所有类型的风险（如市场风险、流动性风险、信用风险等）。这些问题将在以后各章探讨。

章末练习

1. 《巴塞尔协议》中的“隶属关系准则”是什么？如何实施？
2. 存款者如何规避监管者设定的最大存款保险限定？
3. 当私营保险业以竞争性的方式为银行存款保险定价时，会发生什么问题？
4. 简要说明增强濒于破产银行的资本率的方法。
5. 在现代经济中，让单一的监管者负责（几乎）所有金融产品/机构的监督的主要论据是什么？
6. 什么是《Glass - Steagall 法案》？为什么它被废除了？
7. 在 20 世纪 80 年代的危机之后，美国的银行体系改革中两个关键措施是什么？它们成功了吗？

第22章

市场风险

学习目标

- 理解**在险价值**（Value at Risk，VaR）的概念，以及在什么条件下它能对资产组合的市场风险给出一个有用的量度。
- 学习衡量单一资产和资产组合（如股票加上外汇）的 VaR 的方法，其中资产组合的收益是单一资产收益的线性函数，收益是（多元）正态分布的。这种方法被称为“delta—正态”或“方差—协方差”方法。
- 介绍 RiskGrades™，这个产品应用简化的“方差—协方差”方法来衡量股票、即期外汇、债券和期权的风险，它为**小投资者**提供了一个有用的工具。
- 了解“方差—协方差”方法的局限性，以及如何通过“**delta - gamma**”方法和完全估值方法（如蒙特卡罗模拟）对它进行完善。
- 介绍在各种时期预测波动率的几种方法，包括**简单移动平均**（simple moving average，SMA）和**指数加权移动平均**（exponentially weighted moving average，EWMA）。

- 学习如何评价我们对组合 VaR 预测的准确性。这被称为**事后检验**（back-testing）。
- 了解市场风险的**资本充足度**要求与 VaR 之间的联系，和 VaR 如何用来衡量交易员的头寸风险。
- 了解监管者对金融机构资本要求的其他方法，包括**“巴塞尔标准化方法”**（Basle standardised methodology）、**“巴塞尔内部模型”**（Basle internal model）方法和**事先承诺**（precommitment）方法。

前一章中，我们学习了 G10 国家的监管者在《巴塞尔协议》（1988）之下设定资本充足要求，来应对银行给政府、个人和公司贷款的信用风险。在本章和后两章中，我们将要研究市场风险，即由于可交易资产（如股票、债券、外汇、期货和期权）价格的变化造成的风险。大量的金融机构（和一些大的工业商业公司）持有多种资产的净头寸。出于它们自身谨慎原因，美国的金融机构需要衡量它们组合的“美元”市场风险，这通常被称为在险价值。另外，监管机构也使用 **VaR** 来制定市场风险的最小资本充足要求。

如果每天 5%临界值的 VaR 是 1 亿美元，这意味着每 20 天里有 1 天的损失会超出 1 亿美元。衡量 VaR 的方法有很多种，本章里我们主要讨论方差—协方差方法，其他方法（如历史模拟、蒙特卡罗、重复取样法、压力测试、极值理论、“崩溃量度”等方法）会在后面两章讨论。我们所用的大部分材料是基于 J. P. 摩根发布的 RiskMetrics™（1996）提出的风险衡量方法。目前这种方法已被大多金融机构采用，本书中“RiskMetrics”这个词泛指 RiskMetrics™中所提出的方法。

22.1　关键问题

DELTA 和完全估值方法

本节中，我们将对后面两章所讨论的主要问题做一个简要介绍。第一个关键问题在于我们对资产（或资产组合）的价值变化是采用线性（或二阶）近似还是“完全”估值方法。第二个主要问题是资产的收益是否具有（多元）正态分布的形式，因为这个假设（连同线性假设一起）可以大大简化 VaR 的计算。

我们通过下面的例子来学习利用方差—协方差方法衡量组合的 VaR。让 N_i 等于类型为 i 的资产数量 i，每个都具有价值 V_i。那么包含 n 个资产的组合价值 V_p 是：

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} N_i V_i \tag{22.1}$$

如果每个资产的价值 V_i 依赖于标的资产 S_i（比如股票期权），那么对于组合价值变化的一阶近似是：

价值的变化＝(对价格变化的敏感度)(价格的变化)

$$dV_p = \sum_{i=1}^{n} N_i S_i (\partial V/\partial S_i)(dS_i/S_i) \tag{22.2}$$

其中，资产的“收益”是 dS_i/S_i。这被称为**delta 估值方法**，因为任何一阶导数可以被看做资产（如期权）的“delta”值。例如，如果 V_i 是期权的价格，那么 $\partial V_i/\partial S_i=\Delta_i$，即期权的 delta。如果 V_i 是股票价格，那么 $\partial V_i/\partial S_i=1$，$N_iS_i$ 是最初持有的股票 i 的价值。如果我们再假设资产的收益 dS_i/S_i 是（多元）正态的，那么我们可以使用（标准）正态分布的分位点来决定 VaR 值。例如，我们可以使用标准正态分布的 5%的分位点 −1.65。因此这被称为 delta—正态方法。需要注意的是，使用 delta—正态方法需要对收益的**方差—协方差**进行预测。

大体上讲，“delta—正态”方法对股票、债券和远期、期货、互换这样的衍生品比较适用。它也可以用来对期权价值的变化进行近似，其中“对价格变化的敏感度”$\partial V_i/\partial S_i$ 由期权的 delta 决定。然而，虽然期权的 VaR 能够很容易通过 delta—正态方法计算出来，结果却非常不准确，因为期权的 delta 只是对非线性价格的一阶近似。因此，对期权的价格，我们可以更进一步，使用二阶近似来对期权的价值变化进行近似（即泰勒展开）：

$$dV_p=\sum_{i=1}^{n}N_iS_i\Delta_i(dS_i/S_i)+(1/2)\Gamma_iS_i^2(dS_i/S_i)^2 \tag{22.3}$$

其中，Γ_i 为单个期权的 gamma。使用以上公式计算价值的变化被称为 delta - gamma 方法。然而，还是有一个问题，$(dS_i/S_i)^2$ 这一项的出现意味着价值与收益的变化不再是线性关系了，因此，我们不能再使用正态分布的分位点了（比如对应左尾5%的−1.65）。另外，期权的价值依赖于标的资产波动率的变化，这没有体现在上面公式当中。因此，如果资产或资产组合的价值与资产的收益是高度非线性的，那么我们必须要使用**完全估值方法**（full valuation method）：

$$\text{价值的变化}=\text{在“新”价格的价值}-\text{在初始价格的价值} \tag{22.4}$$

一般来说，期权的头寸是标的资产的价格和波动率的变化的高度非线性函数。因此，完全估值方法经常与蒙特卡罗模拟一起使用，来计算包含期权头寸的 VaR 值。然而，本章中，我们主要集中讨论 delta 估值方法，第 24 章中我们将学习蒙特卡罗模拟。

衡量风险

单一资产的风险可以用它的收益的概率分布来概括。虽然对正态分布经常使用标准差来衡量风险，但对某种分布的风险，通常并不存在一种单一的可接受的衡量方法。如果某种资产的收益是独立正态同分布的（即 *niid*），那么（毫无疑问）可以用它的方差（或标准差）来衡量风险。对于正态分布的收益，我们能有 90%的把握确信实际的收益等于期望收益加或减 1.65σ（见图 22—1），其中 σ 是收益的标准差。换种说法就是，我们期望实际收益小于 $\mu-1.65\sigma$ 或大于 $\mu+1.65\sigma$ 的情况在每 20 次中会发生 1 次（即 5%的时候）。

进一步，如果我们认为实际收益是零，那么我们可以把 1.65σ 作为“下行风险”的量度（以 5%的概率）。因此，如果我们在某项资产上持有净头寸为 V_0 美元，那么下行的“在险价值”的金额是

$$\text{VaR}=V_0\ (1.65\sigma)\ \text{美元} \tag{22.5}$$

假设计算出的资产组合的 VaR 是每天 1 亿美元，那么 VaR 的等价表达式是：

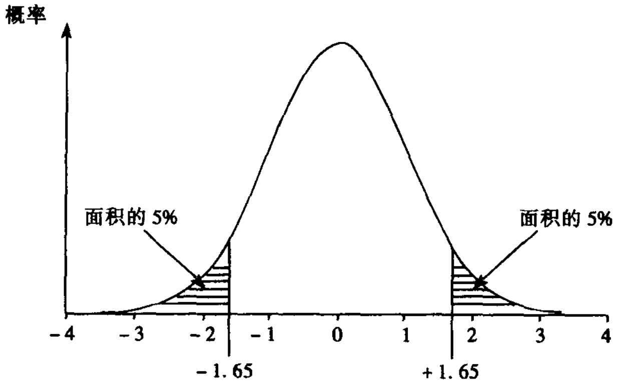


图 22—1　标准正态分布

VaR＝1 亿美元
每 20 天里，有 19 天我预测的最大损失是 1 亿美元
或者
每 20 天里，有 1 天我预测的损失会超过 1 亿美元

如果资产收益是非正态的，那么 90％的置信区间不是$\pm 1.65\sigma$。然而，我们将会看到，对于很多资产来说，正态收益的假设是很有道理的近似。

很显然，我们需要研究在各个市场（和国家）上多种资产的收益的标准差（σ）和它们之间的相关系数（ρ）。这不是一个小问题，因为σ和ρ都是随时间变化的。另外，我们需要对这些变量的未来值进行预测（例如 1 天或 1 星期等），因为我们试图估计的是资产组合的潜在未来风险。

组合风险

我们如何衡量资产组合的风险呢？如果资产（比如股票）组合的收益是每项资产收益的线性函数$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$，那么组合的方差（或标准差）是

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} \sum w_i w_j (\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j) \tag{22.6}$$

其中，w_i 为每项资产 i 占总资产的比例（市场价值），σ_i 为资产 i 收益的标准差，ρ_{ij} 为资产 i 和 j 收益的相关系数。

从概念上，如果组合包括国内或国外的股票资产，这是衡量风险的一种有用方法。（如果包括国外股票，那么要考虑美元和国外货币之间的相关系数。）

我们是否能够把支付息票的债券也纳入这个线性框架之内呢？债券会带来另外的难题，因为它们具有在一定时期上的一系列（息票）支付。然而，我们已经知道可以把所有附息债券看做是很多零息票债券的集合。这种方法有一个实践上的优点，我们可以把不同债券 10 年后的支付加起来，得到在 $t=10$ 时总的现金流。例如，2 年期附息债券的价值 $V_0^{(2)}$ 是零息票债券的线性组合：

$$V_0^{(2)} = V_1 + V_2 \tag{22.7}$$

其中，$V_1=C/(1+r_1)$，$V_2=(C+M)/(1+r_2)^2$，r_i 为即期利率，C 为息票支付，M 为到期价值。我们在下一章中会看到，息票债券的 VaR 可以使用基于公式（22.7）的 delta 方法计算。为了实现后者，我们需要知道 1 年期、2 年期……的即期利率波动率和它们之间的相关性。然而，一旦我们知道了收益的波动率，每种零息票债券的价格（收益）波动率就能很容易地通过久期公式获得（参见附录 22.1）：

$$\sigma(\mathrm{d}P/P)=-n\sigma_y \tag{22.8}$$

其中，$\sigma(\mathrm{d}P/P)$为债券收益的标准差，σ_y 为（连续复利）即期收益的标准差，n 为零息票债券的成熟期（也是它的久期）。

公式(22.8)是对真实价格变化(由债券价格的 PV 公式给出)的线性一阶近似。这里有一个小问题需要注意。在债券市场的文献中，“波动率”是指价格的变化($\mathrm{d}P/P$)。本章中，“波动率”是指价格变化的标准差，即 $\sigma(\mathrm{d}P/P)$。我们将会看到，RiskMetrics 可以让用户直接对债券价格变化的波动 $\sigma(\mathrm{d}P/P)$进行估计，因此实际上我们不需要担心公式(22.8)的使用。

当我们面对着诸如 FRA（或期货）这样的证券时，把它们纳入线性框架下就变得有些困难了。一份 3 个月×6 个月的 FRA 是一份让你在 3 个月后再借款 3 个月的合约。但 3 个月×6 个月 FRA 具有一个“合成的”相对物，即现在进行 6 个月期的借款，再把借到的钱存 3 个月。因此，这个“合成的”FRA 的风险依赖于 3 个月和 6 个月借款的即期利率的波动和它们的协方差（和所涉及的本金）。因此，delta 方法也能够应用于 FRA 上面。围绕着计算债券、FRA 和其他衍生品的 VaR 有很多问题，我们下一章再详细讨论。

即使某些资产的收益（如股票的收益）是正态分布的，如果衍生品（如股票期权）和标的资产价格之间具有非线性的关系，那么衍生品的美元价值也不是正态的。严格地说，虽然对于收益的微小变化，线性关系是合理的近似（即我们使用久期时），但债券价格的变化与它的收益的变化不是线性的（即“凸性”的关系）。对于期权来说，非线性是更严重的问题。在某个范围内，期权的回报可能是零，随后，它会随标的资产的即期价格非线性地上升。当涉及非线性时，我们或者要对价值变化进行良好的近似（比如利用泰勒一阶或二阶展开），或者要使用完全估值方法。如果非正态严重时，我们必须模拟价值变化结果的完全分布（利用数值方法决定左尾 5%处的分位点）。我们可以使用蒙特卡罗方法进行模拟，由于涉及复杂的统计问题，我们在第 24 章中再对此讨论。

另一个关键问题是我们对资产组合的 VaR 的计算是否准确。显然这要取决于我们对 σ_i 和 ρ_{ij} 的估计是否准确。利用过去的数据，我们可以把特定组合的实际利润与损失（P/L）和利用公式(22.6）预测的结果对比，从而能够测试我们预测的准确程度。如果我们对 σ_{p} 的预测是足够的，那么每 20 天中，只有 1 天实际的损失会大于预测的损失（假设正态性并利用 5%分位)。

这些是我们在本章和后面几章要讨论的关键问题。下面，我们详细分析怎样衡量 VaR。

22.2 在险价值：VaR

VaR：单一资产

如果收益是正态分布的，那么单一资产的风险就是它的标准差。从广义上说，收益 R_t 是资

产的资本收入或损失（加上任何红利支付）。例如，考虑一位美国投资者的每日 VaR，她拥有 1 亿欧元的外汇头寸。她要做的第一件事是把头寸盯市。如果现在的即期利率是每欧元 1.15 美元，那么最初的价值是 $V_0=1.15$ 亿美元。假设每日即期汇率变化的标准差（σ）是 0.5%，即期汇率的日均百分比变化（$\bar{R}$）是零。如果每日收益的分布 R 是正态的，那么 90%的日外汇收益应该位于 $\bar{R}+1.65\sigma$ 和 $\bar{R}-1.65\sigma$ 之间，即 0.825%和−0.825%之间。换个说法就是，只有 5%的外汇收益应该大于+0.825%，有 5%小于−0.825%，每种情况的频率不超过每 20 个工作日发生一次的频率（即 5%的时间里）。1 亿欧元的 VaR 美元价值（对于美国投资者而言）刚好比 100 万美元略少一点：

$$\mathrm{VaR}=V_0(1.65\sigma)=948\ 750(\text{美元}) \tag{22.9}$$

因此，在 95%的时间里，你在 24 小时里的损失要小于948 750美元（假设你维持 1 亿欧元的头寸不变）。

VaR：资产组合

对于一个资产（比如股票）组合，当计算组合的标准差时，必须要考虑收益之间的相关性。一个资产组合（为了简单起见，我们只使用了两种资产）在期末的市场价值是

$$V_{\mathrm{p}}=V_{0\mathrm{p}}(1+R_{\mathrm{p}}) \tag{22.10}$$

其中，V_{p} 为组合在期末的市场价值，$V_{0\mathrm{p}}$为组合在 $t=0$ 时（今天）的市场价值（$=V_1+V_2$—投资于每种资产的美元），R_{p} 为组合的比例收益（$=w_1R_1+w_2R_2$）。

组合收益的波动由通常的公式给出，对于两种资产是

$$\sigma_{\mathrm{p}}=\sqrt{w_1^2\sigma_1^2+w_2^2\sigma_2^2+2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2} \tag{22.11}$$

取期望值，由公式（22.10）得：

$$EV_{\mathrm{p}}=V_{0\mathrm{p}}(1+ER_{\mathrm{p}}) \tag{22.12a}$$

$$\sigma_{V_{\mathrm{p}}}^2\equiv E(V_{\mathrm{p}}-EV_{\mathrm{p}})^2=V_{0\mathrm{p}}^2(R_{\mathrm{p}}-ER_{\mathrm{p}})^2=V_{0\mathrm{p}}^2\sigma_{\mathrm{p}}^2 \tag{22.12b}$$

因此，**在险价值的金额**为

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{p}}=V_{0\mathrm{p}}(1.65\sigma_{\mathrm{p}})=V_{0\mathrm{p}}1.65\sqrt{w_1^2\sigma_1^2+w_2^2\sigma_2^2+2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2} \tag{22.13}$$

如果资产收益是完全正相关的（$\rho=+1$），并且 w_1，$w_2>0$ 那么这是**最坏情况下的 VaR**，因为这是 VaR 所能取的最大值：

$$\textbf{最坏情况下的 }\mathbf{VaR_p}=V_{0\mathrm{p}}1.65\ (w_1\sigma_1+w_2\sigma_2)\ =\mathrm{VaR}_1+\mathrm{VaR}_2\qquad (w_1,\ w_2>0) \tag{22.14}$$

在 $\rho=+1$ 和 w_1，$w_2>0$ 时，没有资产分散化的效应。然而，需要注意的是，如果在 $\rho=+1$ 时，一种资产的头寸是空头（比如 $w_1<0$，$w_2>0$），那么风险也会互相抵消。当我们有两种以上的资产时，组合的 VaR 的金额可以用矩阵形式表示：

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{p}}=V_{0\mathrm{p}}\ [\mathbf{zCz}']^{1/2} \tag{22.15}$$

其中，$z=[w_1\ (1.65\sigma_1),\ w_2\ (1.65\sigma_2),\ \cdots,\ w_n\ (1.65\sigma_n)]$

$$C=\begin{bmatrix}1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n}\\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \\ \rho_{n1} & \cdots & & 1\end{bmatrix}$$

C 是相关系数矩阵，z 是**波动率**向量，并用它们的资产比例（w_i）加权。RiskMetrics 的数据库提供对于“波动率项”$1.65\sigma_i$ 和相关矩阵 C 的估计。投资者可以提供组合的权重 w_i，并利用公式（22.15）进行计算得到 VaR，如果投资者输入每种资产的实际金额，通常会更加方便。假设在 $t=0$ 时持有每种资产的最初美元数量是 V_1 和 V_2，那么

$$w_1=V_1/V_{0p},\quad w_2=V_2/V_{0p}$$

替换公式（22.13）或公式（22.15）中的 w_i，我们有

$$\mathrm{VaR}_p=[ZCZ']^{1/2} \tag{22.16}$$

其中，$Z=[V_1(1.65\sigma_1),V_2(1.65\sigma_2),\cdots,V_n(1.65\sigma_n)]$

$$=[\mathrm{VaR}_1,\mathrm{VaR}_2,\cdots,\mathrm{VaR}_n]$$

我们定义 $\mathrm{VaR}_i=V_i\,(1.65\sigma_i)$，因为这是资产 i 单独计算的 VaR 金额。注意，向量 Z 仅包含构成组合的资产的 VaR。当报告个别的 VaR 时，总是使用正的 $|V_i 1.65\sigma_i|$。但在计算分散化的 VaR 时，V_i 的符号必须包含在 Z 之中，因此，如果资产被卖空，那么 $V_i<0$。因此为了计算 VaR，投资者或者输入所持有的每种资产的金额，或者每种资产的比例，然后使用合适（但等价）的公式，公式（22.15）或公式（22.16）。我们用一个简单的例子就能清楚地说明这些问题。

在表 22—1 中，一个美国投资者持有 1 000 万美元的 AT&T 股票和 500 万美元的 IBM 股票。假设（即没有分散效应）组合每日的 VaR 是 33 万美元，对于 $\rho=-0.10$，它显著减少到 25 万美元。由公式(22.16)，VaR_p 也可以写成(对于两种资产的组合)我们更熟悉的形式：

$$\mathrm{VaR}_p=\sqrt{\mathrm{VaR}_1^2+\mathrm{VaR}_2^2+2\rho(\mathrm{VaR}_1)(\mathrm{VaR}_2)}$$

VaR：汇率风险

计算 VaR 时，我们如何处理汇率风险呢？假设你是一个美国投资者，持有 1.4 亿欧元的德国股票指数 DAX。这时，你面对着 DAX 变化和美元—欧元汇率 S 变化的风险。实际上，你持有着两个资产构成的组合，收益为 $R_p=R_{\mathrm{DAX}}+R_s$（即具有等权重为 1 的线性关系）。因此，如果 DAX 和美元—欧元汇率之间存在负的相关性，那么就会有显著的分散化收益。一旦你计算出了所持有 DAX 的 VaR（欧元），那么你可以使用通常的公式计算 VaR 的美元值（参见附录 22.2）：

$$\mathrm{VaR}_p=\sqrt{ZCZ^T}$$

其中，$Z=[\mathrm{VaR}_{\mathrm{DAX}},\mathrm{VaR}_s]=[V_{0\$}\,1.65\sigma_{\mathrm{DAX}},V_{0\$}\,1.65\sigma_S]$，$V_{0\$}$ 为最初持有 DAX 股票头寸的美元价值，σ_{DAX} 为 DAX 的波动率，σ_S 为美元—欧元汇率的波动率。

对于 DAX 和外汇头寸，向量 Z“包含”着同样的最初美元价值 $V_{0\$}$。这是因为持有欧元形式的 DAX 等价于持有 $V_{0\$}$ 的 DAX 加上 $V_{0\$}$ 的外汇。(2×2) 的协方差矩阵 C 包含 DAX 和外汇汇率之间的相关系数。

预测波动率

为了计算 VaR，我们需要预测资产收益的波动率。一个简单的预测方法是假设日波动率是过去收益平方的**简单移动平均**（simple moving average，SMA），权重等于 $1/n$，因此

表 22—1　　**资产组合的 VaR**

数据：“做多”1 000 万美元 AT&T 股票和 500 万 IBM 股票。

AT&T 的日波动率 $\sigma_1=1.5\%$。

IBM 的日波动率 $\sigma_1=1.0\%$。

问题： 1. 如果(a)$\rho=+1$ 和(b)$\rho=-0.1$，使用组合方差公式 σ_p^2 计算美国投资者的 VaR。并评论(a)和(b)之间的差异。

2. 利用美元价值作为输入以及矩阵符号计算 $\rho=-0.1$ 的 VaR。

答案： 1. (a)组合方差：

$$\sigma_p^2=(2/3)^2(1.5)^2+(1/3)^2(1)^2+2(2/3)(1/3)(1)(1.5)(1)=1.778$$

$$\sigma_p=1.333(\%)$$

$$\text{VaR}_p=V_0(1.65\sigma_p)=\$15\text{m}(1.65)(0.0133\,3)=330\,000(\text{美元})$$

(b)组合方差($\rho=-0.10$)：

$$\sigma_p^2=(2/3)^2(1.5)^2+(1/3)^2+2(2/3)(1/3)(-0.1)(1.5)(1)=1.044$$

$$\sigma_p=1.022(\%)$$

$$\text{VaR}_p=V_0(1.65\sigma_p)=15(1.65)(1.022)/100=250\,000(\text{美元})$$

虽然 ρ 很小(绝对数量)，但它是负数，使 VaR 减少了大约 24%。

2. $\text{VaR}_1=(10\,000\,000\text{ 美元})1.65\sigma_1=247\,500(\text{美元})$

$\text{VaR}_2=(5\,000\,000\text{ 美元})1.65\sigma_2=82\,500(\text{美元})$

最坏情况 $\text{VaR}=\text{VaR}_1+\text{VaR}_2=330\,000(\text{美元})$

$$\text{分散化 VaR}_p=[\text{VaR}_1,\text{VaR}_2]\begin{bmatrix}1 & -0.1\\ -0.1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{VaR}_1\\ \text{VaR}_2\end{bmatrix}$$

$$=\sqrt{\text{VaR}_1^2+\text{VaR}_2^2-2(0.1)(\text{VaR}_1)(\text{VaR}_2)}$$

$$=\sqrt{0.061\,25+0.006\,81-0.004\,08}=\sqrt{0.063\,98}=250\,000(\text{美元})$$

$$\sigma_{t+1|t}^2=(1/n)\sum_{i=0}^{n-1}R_{t-i}^2 \tag{22.17}$$

下标 $\sigma_{t+1|t}$ 可以被理解为用基于 t 时刻的信息对 ($t+1$) 时刻预测。另外的方法是假设权重随着过去时间的变长而减小：

$$\sigma_{t+1|t}^2=(1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i R_{t-i}^2 \tag{22.18a}$$

它也可以写成下面的等价形式：

$$\sigma_{t+1|t}^2=\lambda\sigma_{t|t-1}^2+(1-\lambda)R_t^2 \tag{22.18b}$$

其中，R_t 为资产的每日收益（均值为零），λ 为介于 0 和 1 之间的权重（比如 $\lambda=0.94$）。σ_0 为公式（22.18b）递推中任意选择的起始值，例如，它可能是最初 50 个左右 R_t^2 观测值的简单平均。因为每天都可以得到新的信息，因此对未来 1 天 $\sigma_{t+1|t}^2$ 的预测可以每日更新。因此，对方差（或标准差）的预测随时间而变。权重$(1-\lambda)\lambda^i$ 以指数衰减，因此这种预测方法被称为**指数加权移动平均**（EWMA）。例如，当 $\lambda=0.94$，λ^i 依次等于 0.94，0.88，0.83，…，在对当前方差进行预测时，更早收益的平方被赋予更小的权重。原理上，公式（22.18a）和公式（22.18b）中

EWMA 预测的和具有无限大的值，实践中，RiskMetrics 使用（74 天的）有限和。人们发现 EWMA 预测公式比 SMA 给出的结果更好。上面公式经过调整后也可以用来预测资产收益的相关系数（参见第 24 章）。

大于 1 天的时段上的波动率如何预测呢？第一个最明显的方法是用过去所要求时段的波动率进行预测，这是直接方法。例如，我们可以用过去 36 个月的股票收益通过公式（22.18a）或（22.18b）来计算月的标准差。使用更广泛的一个方法是“根号 T 法则”。它基于这样一个事实，即如果每日（对数）价格变化是独立同分布的（即不是序列相关），那么

$$\sigma_T = \sqrt{T}\sigma \qquad (22.19)$$

其中，σ 为每日标准差的预测值（我们省略了下标），T 为预测期间的交易日数。例如，在 25 个交易日上（大约 1 个月）的标准差是 $\sigma_{25} = \sqrt{25}\sigma = 5\sigma$。直接方法要求我们对所有资产在“新的时段”上的所有方差都重新计算，因此，在可能的情况下，根号法则的计算量更小（在 RiskMetrics 中用来计算最多 1 个月期间的波动率）。我们可以用类似的方法预测每天和每月的协方差和相关系数，这些问题将在第 24 章中进行讨论。

风险量度的有效性

对每天标准差和相关系数的预测和对日 VaR 的预测（公式（22.16））每天都发生变化（即使持有的资产不变）。然而，我们需要评价我们对组合 VaR 的预测是否准确。我们可以把组合 VaR 的每日（变化的）预测值 $\mathrm{VaR}_{t+1|t}$ 与历史上组合实际的隔夜利润和损失（P/L）比较。图 22—2 是比较的结果。

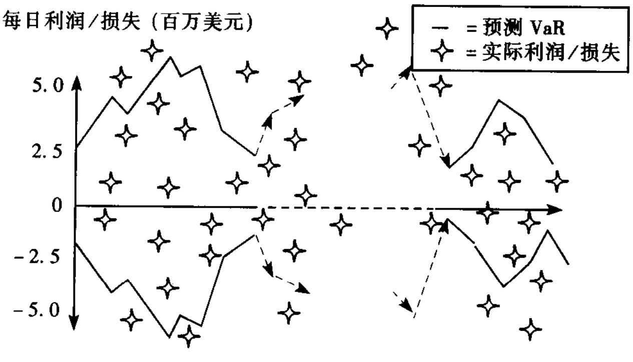


图 22—2 事后测试

对组合每天 VaR 的预测是两条对称的实线，实际的 P/L 是星号。如果我们对 σ 和 ρ 的预测是足够的，那么我们应该观测到，在每 20 个星星中，有 1 个会在 VaR 线之外。如果有 5%以上的星星在 VaR 线之外，那么我们估计的 σ 和 ρ 值就低估了真实的组合风险。这种检验方法被称为**事后检验**（back-testing）。有一点需要说明，如果实际的 P/L 的测量值不是隔夜观察的，它们应该是 24 小时内“无行动 P/L”的数字（各种资产头寸是不变的）。换句话说，实际的 P/L 数字应该反映每种资产都被持有 24 小时（即从收盘到收盘）的情况下发生的利润/损失。实际的 P/L 必须反映日内交易造成的头寸变化。在图 22—2 假设的例子中，实际的利润等于或超过 $\mathrm{VaR}_{t+1|t} = V_{0p}1.65\sigma$ 大约 7 次（总共 7 个月的数据，约 175 个交易日）。损失的情况也大体如此。

因此，VaR 预测值高估了 5%的潜在损失。

资产管理和风险

为了预测组合的 VaR，我们的基本输入是估计的方差和协方差。然而，这些估计值有多种用途。例如，它们可以用来决定组合模型中的资产分配，也可以评估交易员的风险头寸。我们利用这些估计值作为输入变量，为了：

- 计算使组合风险最小化所需持有每种资产的比例（见图 22—3 点 A 和点 A*）。
- 计算组合中各种资产（比如股票和债券）的比例，从而最大化收益方差比（Sharpe 比率）（见图 22—3 中点 M 和点 M*）。（后者假设可以获得一项无风险资产，我们也要对预期收益率预测，见下文的“RiskGrades”）。
- 评估交易员基于相对 Sharpe 比率的表现。

均值—方差组合理论用来处理涉及计算最优组合权重（w_i）的问题（见 Cuthbertson 和 Nitzsche，2001）。然而，因为估计的方差和相关系数随时间而变，那么持有每种资产的最优比例必须随时重新计算并调整组合的头寸（在图 22—3 中，从点 M 移动到点 M*）。

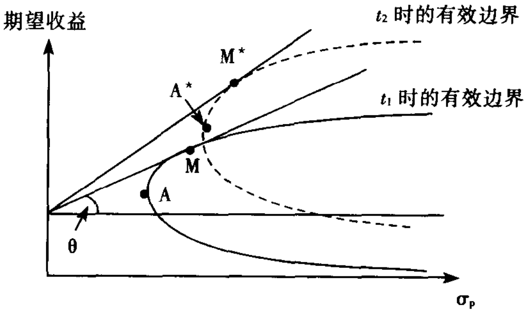


图 22—3　时变组合权重

VaR 的另一个优点是经理们利用它作为统一的标尺来对交易员和投资经理设定头寸限制。只要投资经理们的组合（每日）VaR 没有超过经理设定的标准，那么每个投资经理都被允许改变他的组合的构成。比如，一位高级经理可以为他的股票和债券交易员设定不同的 VaR 限制。这就省掉了复杂头寸规则的要求（比如，不超过 1 亿美元投资于具有 2 年久期的国债和不超过 5 000 万美元投资于具有 3 年至 5 年久期的国债，等等）。另外，因为 VaR 包含了风险分散效应，所以对高层管理者的风险限制可以设定得比低层风险限制的总和更低一些（见图 22—4）。

22.3　RiskGrades$^{\mathrm{TM}}$

使用方差—协方差方法建立起衡量风险的基本原理之后，我们在这里简要介绍一下 J. P. 摩根（严格地说是“RiskMetrics 集团”）的 RiskGrades$^{\mathrm{TM}}$方法。这是用来衡量投资组合风险的简化方法。它主要面向“小投资者”，完全基于方差—协方差方法，可以应用于有限种类的资产类别（即股票、债券、即期外汇、普通香草期权）。

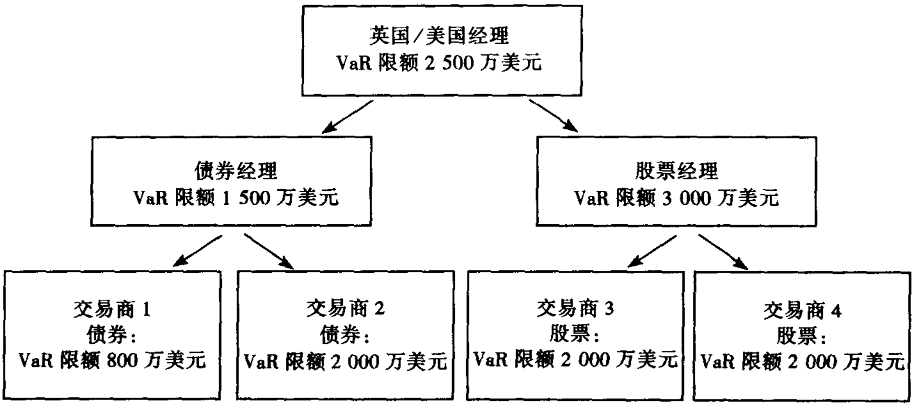


图 22—4　市场风险的头寸限额

虽然投资于 G10 国家的股票在长期（比如 15 年至 20 年）会得到“高回报”，在相对中短时期上却是具有风险的。比如，如果在 1973 年 1 月，你投资10 000美元在一个美国股票组合上，那么到 1974 年 12 月，这些股票的价值就会跌至6 600美元（−34%），直到 10 年后的 1983 年，你的股票价值才会重新达到10 000美元。类似地，如果你是一个美国投资者，在 1988 年 1 月你投资10 000美元在日本股票上，到 1989 年 12 月时，你的股票价值会变成接近原来的两倍。但到 1992 年 7 月时，它的价值将会跌至6 700美元，即使到 2000 年 1 月，它的价值也没有回升到原来的10 000美元。RiskMetrics™通过给出对波动率和相关系数的时变估计，从而允许投资者利用衡量组合风险的方差—协方差方法，估计出这些变化的风险。下面让我们来看一下这是如何实现的。

RiskMetrics™首先把所有资产收益的波动率调整成某个基准的相对值，因此，风险评分（risk grade）等于 100 就相当于每年 20%的风险（大约相当于过去 5 年里按照国际化市场投资权重构成的组合的标准差）。因此，如果两个组合的风险评分分别是 $\mathrm{RG}_1=100$，$\mathrm{RG}_2=400$，后者的风险将是前者的 4 倍。**单一资产的风险评分**不过是利用$\sqrt{T}$法则得到的标准差再按照基准（20%）调整后的值：

$$\mathrm{RG}_i=\frac{\sigma_i\sqrt{252}}{\sigma_{\text{基准}}}\times 100 \tag{22.20}$$

其中，σ_i 为日标准差，$\sigma_{\text{基准}}=0.20(20\%)$。**一个组合的风险评分**（$\mathrm{RG}_p$）只需利用组合方差的标准公式(22.6)：

$$\mathrm{RG}_p=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}w_1^2\mathrm{RG}_i^2+\sum_{i\neq j}\sum w_iw_j\rho_{ij}\mathrm{RG}_i\mathrm{RG}_j} \tag{22.21}$$

其中，w_i 为持有的资产 i 的比例。组合“最坏的情况”或者**未分散化的风险评分**（URG）是

$$\mathrm{URG}_p=\sum_{i=1}^{n}|w_i|\mathrm{RG}_i \tag{22.22}$$

因此分散化的好处是：

$$\text{分散化益处}=\mathrm{URG}_p-\mathrm{RG}_p \tag{22.23}$$

还有一个概念很有用处，就是增加或减少一种（或多种）资产时对组合风险的边际贡献。这是**风险冲击百分比**（percentage risk impact）：

$$\%\mathrm{RI}=\frac{\text{当资产被排除在外时风险评分的变化}}{\text{初始的风险评分}} \tag{22.24a}$$

$$\%\mathrm{RI}=\frac{\mathrm{RG}_p^{(n)}-\mathrm{RG}_p^{(n-1)}}{\mathrm{RG}_p^{(n)}}100\% \tag{22.24b}$$

当计算%RI 时，需要假设从组合中排除某些资产后，出售它们得到现金，当然现金具有零风险，$\sigma_{\mathrm{cash}}=0$，与其他所有资产的相关性也为零，剩余资产的权重保持不变。

股票

让我们看一下这些风险度量如何应用于持有两种股票的简单情况，这两种股票是思科（Cisco）和可口可乐（Coca-Cola），每种股票投资为10 000美元（因此 $w_1=w_2=1/2$）。RiskGrades™ 提供了对 σ_i 和 ρ_{ij} 的预测，因此以上的“统计量”很容易计算出来，其结果见表 22—2。

表 22—2　**RiskGrades™**

	权重	风险等级	%风险冲击
可口可乐	1/2	188	28
思科	1/2	179	25
组合		125	
分散化		58.5	

资料来源：Table2. 2，*RiskGrades™ Technical Document*，RiskMetrics Group，2000.

可口可乐和思科的风险评分差异是 9（=188−179），表明可口可乐比思科的波动率高 1.8%（9×20%基准）。然而，两者都具有相对较高的年标准差，每年约为 36%（180×20%基准）。它们未分散化的 RG（即假设收益的相关系数 $\rho=+1$ 并且两者都为多头）是

$$\mathrm{URG}=\frac{1}{2}(188)+\frac{1}{2}(179)=183.5$$

（分散化）的组合风险评分（使用实际的相关系数）是 $\mathrm{RG}_p=125$，因此，分散化效应为：

$$\text{分散化效应}=183.5-125=58.5$$

因此，在实际的 ρ 小于+1 的条件下，这意味着由于分散化的益处（=32%=58.5/183.5），风险得到实质性减小。

可口可乐的%RI 是 28%，表明如果可口可乐的股票被卖掉，变成持有10 000美元的现金，组合（10 000美元现金+10 000美元思科股票）的风险将下跌至 28%。总风险减小的原因是最初的20 000美元都投资于风险资产，而现在只有10 000美元在风险资产（思科）上。RI%的计算公式是

$$\%\mathrm{RI}=\frac{125-[(0.5)79+(0.5)0]}{125}100\%=\frac{35.5}{125}100\%=28\%$$

因此，对于股票组合风险随时间的变化（即对 σ_i 和 ρ_{ij} 预测的变化）和某一时点上不同组合

（即 w_i 的变化）的风险，RiskGrades™提供了一个有用的量度。它也可以根据投资者预先设定风险评分 RG_{max}来选择合适的权重从而最大化期望收益：

$$\underbrace{\max}_{w} R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i \tag{22.25}$$

我们也可以包括不能做空的限制 $w_i \geqslant 0$。解出这个问题，得到最优的 w_i^* 并不困难（见 Cuthbertson 和 Nitzsche，2001），但是需要输入投资者对于期望收益 R_i 的预测。RiskGrades™还有一些其他有用的应用，比如压力测试、最坏情况损失、超额损失、最坏连续损失，等等，这些都能在 RiskGrades™非常优秀的技术文档里找到（其中一些概念将在第 24 章讨论）。下面我们接着讨论原来的问题，我们将简要介绍 RiskGrades™方法是如何处理债券和期权的。

债券和期权

债券和期权（使用 Black - Scholes）的“人造”每日价格序列可以使用下面公式计算：

$$P_t^B = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+0.5y_t)^n} + \frac{M}{(1+0.5y_t)^n} \tag{22.26}$$

$$P_t^O = BS(S_t, r_t, \sigma, K, T) \tag{22.27}$$

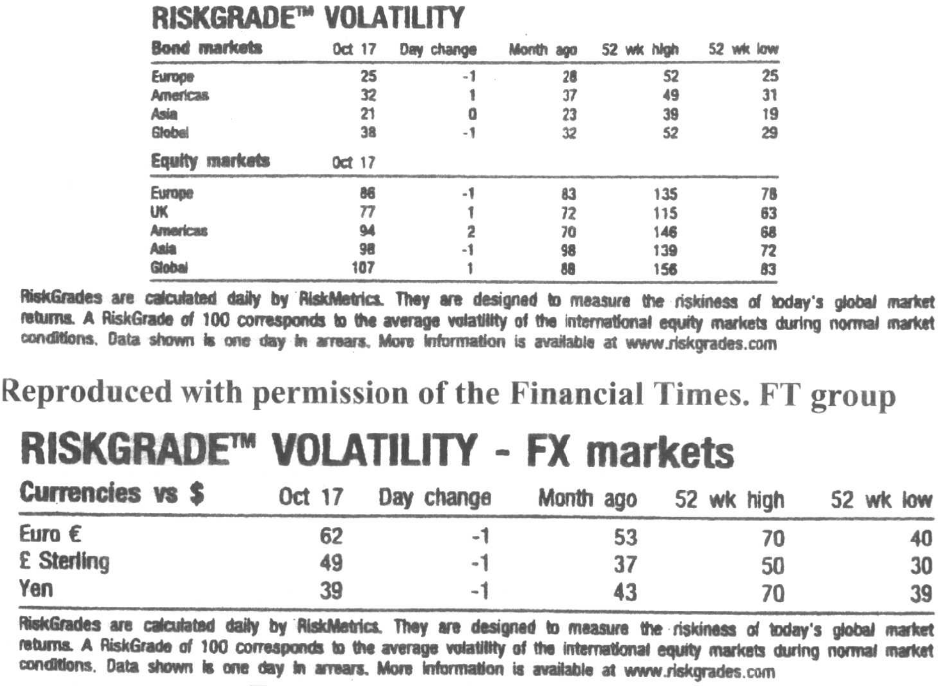
请注意，这些都是“人造”的每日价格序列，因为对债券和期权（每天）我们都假设了一个固定的寿命。对于债券，y_t 的历史每日序列是变化的，而对于期权，S_t 和 r_t 被认为每天都在变化（而 σ 和 T 是恒定的）。那么人工每日收益的公式是：$R_t^{(j)} = \ln(R_t^{(j)} / P_{t-1}^{(j)})j = $“$B$”或“$O$”，由此我们可以计算出（不同成熟期的）债券和期权的方差和协方差。这样，RiskGrades™认为债券和期权的方差—协方差方法与股票是相同的。

例如，假设一个组合包括一股思科（RG＝179），一个看跌期权（RG＝600），得到组合的 $RG_p = 102$。组合的风险评分比思科股票和看跌期权的评分都要少，因为股票价格和期权价格之间具有负的相关性，因此产生了分散化益处。看跌期权的%RI 是－58%。“负”说明什么呢？它说明，如果看跌期权被卖出，得到现金，那么组合将由“一股思科股票加上现金”构成，那么总风险将会增加 58。这时因为出售期权得到现金相当于用零相关性的资产替换负相关性的资产，因而增加了总风险。毕竟，最初购买看跌期权的目的就是来部分对冲思科股票的头寸。

正如前面我们所说的那样，方差—协方差方法可能不准确，特别对于期权来说。这就是金融监管者为什么要求大的投资银行在衡量期权风险时使用更复杂的方法（我们将在后面两章讨论）和比正态分布更“复杂”的统计过程的原因。然而，RiskGrades™为小投资者提供了一个有用的工具。《金融时报》会刊登 RiskGrades™的波动率数据，参见图 22—5（2000 年 10 月 19 日的报纸）。基准指数是 100，代表（正常情况下）国际股票市场的平均波动率。我们可以看到，世界范围内的债券市场比股票市场风险更小，Global 具有最高的风险 107，欧元、英镑和日元具有较低的波动率，在 39 到 62 之间。

22.4 资本充足度和市场风险

金融公司（如证券交易者、做市商、投资银行、养老基金）持有可交易资产的头寸，因此会



RISKGRADE™ VOLATILITY

Bond markets	Oct 17	Day change	Month ago	52 wk high	52 wk low
Europe	25	-1	28	52	25
Americas	32	1	37	49	31
Asia	21	0	23	39	19
Global	38	-1	32	52	29
Equity markets	Oct 17				
Europe	86	-1	83	135	78
UK	77	1	72	115	63
Americas	94	2	70	146	68
Asia	98	-1	98	139	72
Global	107	1	88	156	83

RiskGrades are calculated daily by RiskMetrics. They are designed to measure the riskiness of today's global market returns. A RiskGrade of 100 corresponds to the average volatility of the international equity markets during normal market conditions. Data shown is one day in arrears. More information is available at www.riskgrades.com

Reproduced with permission of the Financial Times. FT group

RISKGRADE™ VOLATILITY - FX markets

Currencies vs $	Oct 17	Day change	Month ago	52 wk high	52 wk low
Euro €	62	-1	53	70	40
£ Sterling	49	-1	37	50	30
Yen	39	-1	43	70	39

RiskGrades are calculated daily by RiskMetrics. They are designed to measure the riskiness of today's global market returns. A RiskGrade of 100 corresponds to the average volatility of the international equity markets during normal market conditions. Data shown is one day in arrears. More information is available at www.riskgrades.com

图 22—5　RiskGrades$^{\text{TM}}$波动率《金融时报》

经《金融时报》允许后复制。

遭受损失。出于谨慎的考虑，它们应该持有资本（包括从过去留存收益中累积的股东资金和贷款损失准备）作为对潜在损失的保护，否则金融机构就可能破产。欧盟、（国际结算银行负责银行业监管的）巴塞尔委员会和联邦储备委员会（美联储）最近都在考虑用各种方法估计市场风险，它们也都建议应该持有最小数量的资本来应对此类风险。

有三种广义的方法来设定市场风险的资本充足度要求。国际结算银行（BIS）的巴塞尔监督委员会（BSC）提出了两种方法，即标准化方法和内部模型方法。美国关于第三种方法，即事先承诺的方法，进行了很多讨论，虽然该方法还没有在任何国家实行。我们将阐述这三种方法的要点，其中两种方法与VaR方法密切相关。但要注意到，在两种巴塞尔方法中，本地监管者都拥有一定的自主权。这些“地方差异”有很多，并且（随时间）发生变化，有兴趣的读者可以参考“本地监管者”的网站查看具体（往往相当乏味）的细节（比如，英国金融服务管理局FSA的网站上面有“热带雨林”一般多的资料供免费下载，BIS的网站也相差无几）。如果信息的传播接近于零成本，并且它们对使用者仍然具有一定价值，那么简单的经济学就会告诉我们，信息会大量存在！有人称它为“信息过剩”，因为人们通过网络传播信息，却几乎没有动机为了“增加价值”而首先对它进行过滤。

巴塞尔标准化方法

这是一种“搭积木”式的方法。这种方法对股票、债券、外汇和衍生品等不同市场都设定了不同的市场风险和相应的资本要求。然后，这些资本要求被加在一起，所以资产之间不存在分散

效应。欧洲委员会（EC）的资本充足建议（CAD）与“标准化巴塞尔”规则类似，在原则上从1996年1月起在欧盟内应用。

为了实施标准化方法，经常需要进行一定程度的简化，因此这种方法只是非常宽松地基于金融理论之上。这里我们只讨论一些广义的原则。大多数资产类别被认为有一个市场风险和一个独特风险。市场风险用来衡量价格的一般变化（如股票价格、利率、汇率）对市场价值的影响。独特风险是与个别发行者相关的因素（如信用评级）引起的风险。标准化方法的关键特点在文章22.1中列出，对这个方法的批评有：

- 几乎或根本没有考虑风险的分散化。
- 对于独特风险的总头寸和市场风险的净头寸的选择具有随意性。（同样符号的）净头寸是算术相加的，因此这种方法认为资产之间的相关性为+1（即没有分散化的好处）。
- 当计算资本要求时，随意应用比例调整因子（例如对于股票是8%，对于商品是15%）。
- 达到标准的成本很高，一旦最小资本要求得到满足，公司就没有动机去实行最好的风险衡量方法。

总的来说，标准化方法可以被概括为“一个尺码适用所有人”的模型。但是如果使用这个方法的金融机构具有很强的多样性，那么对每种资产所要求的监管风险资本就不能反映“真实的”经济风险，于是它就会造成无效率、组合扭曲和“不平坦的竞赛场”。（例如，对于商品的资本要求高达15%，实际上它高估了真实的风险，会导致金融机构持有的商品比最优的标准要少）。另外，如果总的监管负担很大，那么会造成非居间化（disintermediation）（比如金融公司没有受到监管，于是银行转向经营金融公司的业务，或是银行转移到监管更少的地区，这可以称为监管套利）。最初认为标准化方法将会被“小的、不复杂的机构”采用，但随着可以廉价定制的衡量VaR软件的出现，大多数机构都开始采用内部收益模型方法。

文章22.1 巴塞尔“标准方法”

- **资本要求**（capital charge）根据主要的资产种类制定：固定收益证券、外汇、股票、商品和期权。然后每个类别的资本要求被加在一起。
- **债务证券**（debt security）的资本要求以市场和独特风险为基础。独特风险是基于对“总”头寸的信用风险的估计。信用“桶”包括“政府”、“合格的”和“其他”各类，资本要求从对“政府”的0%到“其他”的8%。
- **债务的市场风险**（market risk on debt）以每种货币的13个到期区间的净头寸为基础。这13个净头寸中的每一个都被赋予一个风险权重（粗略反映相对久期），然后相加起来。对市场风险资本要求的基础是所有交易账户中经过风险权重调整后的净空头或净多头的总和。（由于各个成熟期上存在不完全对冲的可能性，要进行一些小的调整。）
- **外汇头寸**（FX position）8%的资本要求是基于每种货币的净头寸（即净多头或净空头的更高者）上。没有考虑分散化的好处。
- **股票**（Equity）也有独特风险和市场风险的资本要求。对于市场风险，不同国家市场上（使用当前汇率计算的）总的净头寸（即总的多头和总的空头之间的差）有8%的资本要求。对于独特风险，银行所有的多头和空头股票头寸的绝对值需要有8%的资本要求（如

果账户的流动性和分散度很好，可以减为 4%，对于指数基金可以减为 2%)。

- 对于**商品**（commodity）（黄金除外）的资本要求是每种商品净头寸的 15%。对于黄金的要求与外汇相同。
- **期货、互换和远期**要用它们等价的标的资产的多头和空头来表示（即合成头寸），资本要求就如同应用于标的资产一样。比如，1 年后收到 100 万美元 5 年到期债券的国债期货合约，可以被看做 100 万美元 6 年期（=5+1）债券的多头和 1 年期债券的空头。
- 粗略地说，任何**期权头寸**的价值被赋予一个等于期权 delta 值的权重（delta-plus 方法），这样得到一个“组合 delta”作为资本要求的基础。如果期权账户的比重特别大，有很多的对冲行为，那么通过对对冲头寸进行情景分析得到附加的资本要求（比如，关于标的资产和它的波动率的变化）。

巴塞尔“内部模型”方法

从 1996 年起，G30 国家的监管者允许银行使用它们自己的内部模型来评定市场风险，这些模型大多是基于 VaR 方法的。监管者对所使用模型的形式做了一些一般性的限定（比如，使用组合方差作为股票头寸风险的量度），而银行必须证明这些模型足够准确（比如通过事后检验）。资本要求是基于内部模型估计出的 VaR 的某个倍数而确定的。在欧盟内部，“内部模型”方法可以代替标准方法使用，但必须先经过政府监管部门的批准。

为了获得使用内部模型方法的资格，银行必须向监管者证明它拥有合适的“专家”和风险管理流程。在英国，对各个所需项目的评估可以用两个词来概括，CAMELB & COM（即 **C**apital，**A**ssets，**M**arket risks，**E**arnings，**L**iabilities，**B**usiness risk，Internal **C**ontrols，**O**rganisation and **M**anagement）。从广义上说，**质量标准**包括：

- 监管者对风险模型必须覆盖的范围设定一个一般性的指导原则。
- 风险暴露每天都要进行综合和计算，每天的利润和损失（P&L）数据都要被记录下来。
- 风险模型和暴露要受到银行内部不同级别的评估。
- 监管者必须验证风险管理模型的有效性（比如通过压力测试和事后检验），如果它有缺陷，监管者必须提高资本要求，或是禁止这个模型的使用。
- 事后检验必须包括“假设情况”（比如 1 天的固定组合权重）和实际的交易结果。

对使用内部模型方法的一般**数量标准**要求：

- 模型必须包括所有的主要市场风险和全部交易账户的风险（比如利率、外汇、股票、商品价格、期货、和期权）。
- 提供 10 个交易日内最坏 1%潜在损失的 VaR（即 10 天 1%的 VaR）。可以使用根号 T 法则利用 1 天的预测进行计算。
- 所用方法必须考虑到期权头寸的非线性，并估计它们对内在波动率变化的敏感度（比如，FSA 允许有三个选择，“缓冲方法”、“统一简化方法”和“情景矩阵方法”。有趣的是，第二个方法包含着某种宗教色彩，因为它在估计期权头寸对于标的资产和它的波动率的变化的风险时，要涉及“十字架”或“圣乔治十字架”矩阵）。

- 银行具有自主权进行各个广义资产种类内部的分散化风险抵消。然而，使用相关系数来包含各个资产之间（比如股票、债券、商品和外汇之间）的分散化效应时，要得到监管者的批准，这与金融机构所用“内部”模型的准确度有关。
- “内部模型”的参数估计必须使用至少一年以上的数据，每个季度必须至少更新一次（比如对方差和相关系数的估计）。

资本要求基于下面两者之中的更大者：

（1）银行前一天对于组合（10 天 1%）VaR 的估计值 $\text{VaR}_{t+10\,|\,t}$；

（2）之前 60 个工作日它对组合（10 天 1%）VaR 的估计值的平均值 $\text{VaR}_{t-i}^{(10)}$（乘以大于等于 3 的一个因子）。

此外，还有附加的对“独特风险”（SR）的资本要求，以反映交易账户中固定收益和股票头寸的独特风险（SR 被设定为不小于标准化方法得到的独特风险的一半）。因此，市场风险的资本要求（KC）为

$$\text{KC}_t = \max\left[M \times \sum_{i=1}^{60} (\text{VaR}_{t-i}^{(10)}/60), \text{VaR}_{t+10|t}\right] + \text{SR}_{t-1} \tag{22.28}$$

乘数 M 的最小值是 3，但是如果监管者通过事后检验和上面所述的标准检测，对银行的内部风险模型不满意，会把它设定为更高的值。根据事后检验的结果，附加因子（plus factor）可以把乘数提高 0 到 1 之间，直到最大值 4。巴塞尔“内部模型方法”的理论基础在 J. P. 摩根的 RiskMetrics 中得到广泛应用，但有一些操作上的区别，参见文章 22.2（国际结算银行，1996）。

文章 22.2　RiskMetrics™与巴塞尔的比较

- RiskMetrics（RM）允许所有资产的**组合效应**，然而，除非监管者批准，巴塞尔只允许资产类别内部的分散化效应（比如在固定收益证券内部、在股票内部、在 FOREX 内部）。
- RM 使用 1 天的 5%分位点损失，然而巴塞尔更加保守，选择**左尾端的** 1%和 10 个工作日的时期。因此，对于最初价值为 V_0 美元的组合，巴塞尔的 VaR 是 $\text{VaR}_p\ (\text{Basle}) = V_0 2.33\sqrt{10}\sigma_p = V_0\ (7.37)\ \sigma_p$，而 RM 的 VaR 是 $\text{VaR}_p\ (\text{RM}) = V_0\ (1.65\sigma_p)$。
- RM 对标准差和相关系数的估计使用递减权重的 74 天数据（即 EWMA），而巴塞尔建议使用等权重或 EWMA，但是要求用过去 1 年以上的数据（即 252 个交易日）。
- 对于期权组合，巴塞尔建议使用 **“delta-gamma”** 近似加上对内在波动率的调整（即 vega 效应），RM 主张使用**蒙特卡罗模拟**。
- RM 的波动率估计每天进行更新，巴塞尔估计每季度至少更新一次。

事先承诺方法

这里，每个银行都事先承诺它在一定时间内可能发生某个金额的最大损失。对这个最大损失的预测，每个银行都可以使用自己喜欢的方法。银行对于市场风险的资本要求就等于它事先承诺的最大损失。如果银行实际的累积损失超过了事先承诺的价值，那么可以对银行进行处罚，处罚

的形式包括附加的资本要求，或是罚款，或是加强监管措施。这种方法目前还没有被采用，美国也只是开始试行这种方法（见 Kupiec 和 O’Brien，1995）。

使用事先承诺来达到经济（或其他）目的是一种广泛使用的激励机制。例如，家长对孩子们的行为往往会有个事先承诺（比如，如果你不在晚上 10：30 之前回家，那一个星期你都别想出门）。在工业界，公司事先承诺及时修好公路，铁路公司承诺让火车正点到达，医院承诺减少特别手术的等待时间，在高等教育方面的一个事先承诺是培养出“高质量的毕业生”。在新西兰，中央银行有一个低通胀率数字的事先承诺，如果承诺没有被实现，那么总督的职位可能就不保了。有些目标是由外部实体（比如政府）设置的，其他的则是内部制定的。惩罚的手段也有区别，包括对不良表现通报，或加强监督控制（例如在英国学校里），或是直接的经济惩罚（比如对于没能按时完工的铁路）。近来，英国、美国、澳大利亚、新西兰的事先承诺和对违反承诺的处罚都开始增强，变得更加广泛，特别是在公共领域。

事先承诺是双方之间条款清楚的合约：客户—缔约者之间的关系。合约的条款应该提供激励机制，因此客户（代理人）的目标可以通过缔约者（委托人）来实现。如果目标没有实现，那么缔约者应该受到惩罚，从而能对客户进行足够的赔偿，并激励它在未来信守承诺。在金融市场上，主要的外部性是由系统风险和信息不对称造成的（比如银行和“不了解情况”的客户之间）。对于银行和储贷机构来说，这样的信息不对称经常会造成实行（最终由）纳税人承担的存款保险计划。事先承诺方法的优点和缺点是：

- 对任何违反事先承诺的检验都是简单透明的。
- 它鼓励管理者进行全盘式的风险管理，改善风险模型和风险管理步骤。它完善了内部模型方法。
- 在缺乏外部资本要求时，它减小了失真度，因为组合（在资产上的）分配应当根据管理者和股东所做的“决策”保持不变。
- 它减小了报告负担（遵守成本），因为银行使用模型的准确性不需要被频繁验证。
- 它不能阻止“孤注一掷”的策略。
- 它没有提出一致的资本要求（即公平的竞赛场）。

只有当银行不会采取“孤注一掷”的策略时，才能使用事先承诺的方法。它对银行的资本和风险管理流程并不进行事先和定期的检查，因此它只能适用于经营状况良好的银行（即具有很高的经营价值）。“不一致的批评”表明面临类似风险的机构没有被平等地对待。因此，有些银行可能会通过宣布较低的事先承诺标准和较低的监管资本要求而获得竞争优势（但是导致附加罚款支出的概率却更大）。

惩罚

简单而透明的惩罚措施是把违反事先承诺的行为公之于众：“在过去的 3 个月内，银行 A 违反了它 1 亿美元的事先承诺，金额为 1 000 万美元”。于是违反行为可以被市场评估，可能会反映在股价下跌或信用等级的降低上（因此银行就要为它的资金来源，比如 CD 和发行的债券支付更高的利率）。如果因为市场范围内的资产价格下跌造成类似的银行全部违反了承诺，那么它们的相对股价将会保持不变。然而，如果一家银行错误地估计了它的风险暴露，它的相对（和绝对）

股价将会下跌。这本身就会促使股东和管理层改善风险管理措施。

其他的惩罚包括监管者对银行进行罚款，或是要求银行（在下一个审查期内）持有更多的资本，或是向风险更小的方向改变它的组合头寸。这些措施需要监管者有一个模型来衡量银行承担的风险，这又使我们回到了内部模型方法。因此，直接施加罚款措施的前提是，假定存在一个对风险的客观衡量方法和相关的最优资本充足要求。施加罚款的另一个问题是，“你在银行倒下时（或是很短时间后）又给了它一下”。

22.5 本章摘要

- 如果我们假设收益是（多元）正态分布的，并且组合的价值与资产的收益具有线性关系，那么我们就很容易使用 delta—正态或**方差—协方差方法**计算（任何分位上的）VaR。
- RiskGrades™假设方差—协方差方法可以用于股票、即期外汇、债券和期权。即使方差—协方差方法可能不准确，特别对于期权，但 RiskGrades™为小投资者提供了**有用的工具**。
- **delta—正态方法**可以被应用于股票、债券、外汇、互换和期货。对于期权，要使用更复杂的方法。这就是为什么金融监管者要求大的投资银行在衡量期权和其他“复杂的”证券（如可转债、奇异期权等）时要使用复杂的方法（下面两章将讨论相关内容）。
- 计算组合的 VaR 需要**预测方差和协方差**（相关系数），EWMA 预测方法经常被使用。
- 如果收益是独立（同）分布的，那么我们可以使用根号 T 法则来预测不同长度时期的波动率（即 $\sigma_T=\sqrt{T\sigma}$，其中 σ 是对 1 天波动率的预测）。
- 设定市场风险资本要求的**巴塞尔内部模型方法**与 J. P. 摩根的 VaR 方法非常接近。其他的监管方法包括**巴塞尔标准化方法**和**事先承诺方法**。
- “本国”监管者通过**事后检验**来检查内部模型对组合 VaR 预测的准确性。如果 VaR 的预测不准确，那么“本国”的监管者可以增加决定资本要求的“乘数”。

章末练习

1. 当计算 VaR 时，为什么资产收益是正态分布的假设十分有用？

2. 什么是 VaR 方法中的事后检验？

3. 当对金融机构承受的市场风险监管时，什么是“事先承诺方法”？

下面的很多问题的答案多可以根据公式 VaR＝ $(\mathbf{ZCZ}')^{1/2}$ 使用 Excel 或其他软件包（如 Gauss，RATS，Mathematica）解决。

4. 一个零息票债券将在 2 年后支付 1 000 英镑，你有下列信息：

（a）当前收益率 y＝每年 8.25%。

（b）收益率变化的标准差 σ_y＝每天 1.009%。

要求：

（a）计算零息债券的市场价值。

(b) 计算这项资产的 VaR。利用 σ (dP/P) $=n\sigma_y$，其中 n=现金流的成熟期（=久期）。

(c) 计算该资产 10 天和 25 天的 VaR。

5. 你有一个价值10 000英镑的组合，由资产 1、资产 2 和资产 3 构成。你已经计算出来每天的标准差分别是 5.418%，3.042 4%和3.636 3%。资产 1 和资产 2 之间的相关系数是 0.962，资产 1 和资产 3 之间的相关系数是 0.403，资产 2 和资产 3 之间的相关系数是 0.610。

(a) 组合的 VaR 是多少？

(b) 如果所有资产的收益完全正相关，VaR 将是多少？

6. 你持有价值 1 亿英镑的组合，如果当前美元—英镑的汇率是 1.5（美元/英镑），英国组合收益与美元—英镑汇率的相关系数是 0.5，那么你的美元 VaR 是多少？FT 全股指数的收益的标准差为每天 1.896%，σ_{FX}=每天 3%。

7. 你是一个美国居民，持有 1 亿德国马克（DM）的 DAX 指数和 1 亿美元面值的美国零息债券，它们将在 1 年后到期。当前的即期汇率是 0.6（美元/德国马克），1 年期美元的即期利率是 r=每年 3%。每天的标准差是 $\sigma_s=3\%$，$\sigma_{DAX}=2\%$，$\sigma_B=0.5\%$，其中 σ_B=债券价格的标准差，σ_s=美元—德国马克汇率的标准差，相关系数为 $\rho_{s,DAX}=-0.5$，$\rho_{s,B}=0$，$\rho_{B,DAX}$。计算你的组合每日的 VaR（使用左尾 5%处的点）。

附录 22.1　收益率波动和收益波动

连续复利

一个有连续复利收益率 y，到期期限为 n，在到期日支付为 1 美元的零息债券的价格为

$$P_t=\exp(-y_t n) \tag{A22.1}$$

对于更长时间的 n，$h\approx n-1$，其连续复利的收益为

$$R_t=\ln(P_t/P_{t-1})=-n(y_t-y_{t-1}) \tag{A22.2}$$

价格收益的波动率用 σ (dP/P) 来表示就是

$$\sigma(\mathrm{d}P/P)=n\sigma(\Delta y_t) \tag{A22.3}$$

这里，σ (Δy_t) 是（以连续复利计算的）即期收益率（每天）变化的标准差。

离散复利

用离散复利来计算的话，一个零息债券的价格和收益为

$$P_t=1/(1+y_t)^n \tag{A22.4}$$

和（对于更大的 n）

$$R_t=-n\ln[(1+y_t)/(1+y_{t-1})] \tag{A22.5}$$

因此，债券收益（价格变动）的标准差为

$$\sigma(\mathrm{d}P/P)=n\sigma\left[\ln\left(\frac{1+y_t}{1+y_{t-1}}\right)\right] \tag{A22.6}$$

这里 σ [.] 是 $\ln[(1+y_t)/(1+y_{t-1})]$的标准差。在 RiskMetrics 方法中原始输入的是收益率的一些数据，但是使用者也可以填入（用上面的方程计算出的）（债券）价格波动率的估计值。后者可以直接用于 VaR 的计算。

我们发现上面关于 1 天水平的计算中，我们假设债券的到期期限保持在“n”（也就是说不是 $n-1$ 天）。当我们计算更长时期的 VaR 时，债券的价值逐步向它的票面价值靠近（也就是“拉至平价”），而且它的波动率减少。这一技巧被应用于债券价格波动性的计算中（参见 J. P. 摩根，1996，127 页）。

附录 22.2 VaR：汇率风险

一个美国投资者想知道美元 VaR 值的大小。但是，他可能持有的是外国资产。为了描述计算过程，现在我们考虑这样一个投资组合：投资者持有价值为 V_E 欧元的德国股票指数（DAX）：

初始德国股票指数头寸 $V_E=90\ 910\ 000$ 欧元

目前的即期利率 $S_0=1.1$ 美元/欧元

初始持有的德国股票指数以美元表示的价值 $V_{0\$}=V_{DM}S_0$

（美元/欧元）即期利率的波动性 $\sigma_S=0.565$

德国股票指数的日回报率为 R_{DAX}

（美元/欧元）即期利率的日回报率为 R_S

DAX 的波动率 $\sigma_{DAX}=0.605$（每日%）

R_{DAX}和 R_S 的相关系数 $\sigma=-0.27$

这里我们需要说明的很重要一点是，VaR 的计算公式取决于我们所采取的即期利率的表达方式（这里是每欧元的美元价值），RM 中的惯例是“每单位外币的本币价值”。

德国投资组合的初始美元价值（在 $t=0$ 时）$V_{0\$}=VE_{S0}$

1 天后的即期利率 $S_1=(1+R_S)S_0$

$T=1$ 时组合的价值

以欧元表示的组合的价值为 $V_E(1+R_{DAX})$ (A22.7)

以美元表示的组合的价值 $V_ES_1(1+R_{DAX})=V_ES_0(1+R_{DAX})(R_s)$ (A22.8)

所以，1 天后以美元表示的投资组合的价值为

$$V_{p\$}=V_{0\$}(1+R_{DAX})(1+R_s) \tag{A22.9}$$

因为 R_{DAX}和 R_S 的价值比较小，所以我们可以忽略掉交叉项“$R_{DAX}R_S$”，那么上面的公式就可以写成回报率的线性表达式：

$$V_{p\$}=V_{0\$}(1+R_{DAX}+R_s) \tag{A22.10}$$

只有 R_{DAX}和 R_S 是随机变量。所以每日（以美元表示的）VaR 值为

$$\mathrm{VaR}_p=1.65V_{0\$}(\sigma_{DAX}^2+\sigma_{\$}^2+2\rho\sigma_{DAX}\sigma_{\$})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ZCZ^T} \tag{A22.11}$$

这里：

$$Z=[\mathrm{VaR}_{\$,\mathrm{DAX}},\mathrm{VaR}_{\$,\mathrm{S}}]=[V_{0\$}(1.65\sigma_{\mathrm{DAX}}),V_{0\$}(1.65\sigma_{\mathrm{S}})]$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}$$

美国投资者持有的90 910 000欧元以美元表示的 VaR 值 $V_{0\$}$ = （90 910 000 欧元） 1.10= 100 000 000 美元：

$$\mathrm{VaR}_{\$,\mathrm{DAX}}=(100\ 000\ 000\ \text{美元})(1.65)(0.006\ 05)=998\ 250(\text{美元})$$

$$\mathrm{VaR}_{\$,s}=(100\ 000\ 000\ \text{美元})(1.65)(0.005\ 65)=932\ 250(\text{美元})$$

$$\mathrm{VaR}_{p}=\sqrt{(0.998)^2+(0.932)^2+2(-0.27)(0.998)(0.932)}=1\ 363\ 000(\text{美元})$$

最坏的情况（$\rho=1$）：

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{p}}=\mathrm{VaR}_{\$,\mathrm{DAX}}+\mathrm{VaR}_{\$,\mathrm{S}}=19\ 305\ 000\ 000(\text{美元}) \tag{A22.12}$$

因为 DAX 的回报率和美元—欧元兑换率之间存在着负相关关系，所以，存在着分散风险的作用。如果德国股票指数下跌，美国投资者就会损失欧元，但是如果同时伴随有美元—欧元即期利率的上升，那么在 1 天后的现货市场上，每单位的欧元就可以代表更多的美元。

第23章

VaR：映射现金流

学习目标

- 学习应用**单指数模型**（single index model，SIM）来简化对股票组合 VaR 的计算。
- 掌握把**附息债券**的现金流“映射”到“零息债券”的集合之上，从而计算附息债券组合的 VaR。
- 理解如何使用“合成”的现金流来计算**浮动利率票据**（FRN）、互换和远期利率协议（FRA）的 VaR，这也是映射或“逆向工程”的一个例子。
- 学习把**远期外汇交易**映射到一个合成组合之上，组合包括两个货币市场的头寸和一个即期外汇市场的头寸。这是一种抛补利率平价关系，我们可以以此为基础利用合成组合计算远期头寸的 VaR。
- 介绍使用 delta 和 delta＋gamma 近似计算**期权头寸** VaR 的局限性。

交易与投资管理是全球性的行为，持有的净头寸包括不同国家的种类繁多的资产（比如股票、货币市场工具、债券、互换、商品、即期和远期外汇、期货和期权）。例如，RiskMetrics™对 35 个国家的外汇即期头寸收益，大量股票、商品和各个到期日债券的收益率/价格的每日波动率（1.65σ）和相关系数进行估计。衍生品（如 FRN，FRA，互换，远期和期货）的头寸经常可以用它们的标的资产（比如股票、即期收益率、即期外汇）来“代表”或实施“逆向工程”，这样就会减少需要存储和处理的“原始”数据数量。在 RiskMetrics™中，这被称为“映射”。

23.1 映射：概述

计算 VaR 时对数据的处理是一项很庞大的工程，因为要每天进行估计。为了把大量的计算减少一些，实践中有很多细节问题需要处理。特别是如果收益的相关系数矩阵很大，它可能会包含接近完全相关的收益。这时，从技术上说，就无法计算资产组合的 VaR。因此，通过把“原始”的复杂资产“映射”到更加基本的资产上从而减少收益的数量就显得极为重要。映射的方法为很多种资产的 VaR 计算提供了一个合理的一般性框架，比如 RRA、FRN、远期、期货和互换。“映射框架”也可以用来处理期权，但这时由于方法本身的限制，我们通常需要使用其他方法（比如蒙特卡罗模拟）。

首先考虑股票的“映射”过程。我们可以用**单指数模型**来简化国内股票组合的 VaR 计算，它很容易扩展到股票组合包含国外资产的情况，这时要考虑组合的外汇风险。一个计算附息债券的统一方法必须要考虑到不同的政府债券具有不同的到期日、息票率和付息日期。为了简化对附息债券的计算，RiskMetrics 把每个债券映射为一系列零息债券。这需要使用即期的利率。对于货币市场资产，RiskMetrics 提供了 1 个月、3 个月、6 个月、12 个月的即期收益率，对于债券，即期收益率的“标准”到期时间是 2 年、3 年、4 年、7 年、9 年、10 年、15 年、20 年、30 年。对这些更长到期时间的即期收益率的估计可以通过收益率曲线拟合得到，因为大多数国家都没有国债剥离息票市场。通过选择标准的到期时间，需要计算的数量得到了控制。但是如果现金流（息票）没有落在这些到期日之上，那么应用 VaR 方法之前，要把它们映射到这些标准的“定点”之上。

把资产映射到 RiskMetrics 体系以后，我们一般会采用另一种简化方法，即我们认为组合价值的变化（$\mathrm{d}V_p$）和资产收益的变化是线性关系：

$$\mathrm{d}V_p = \sum_{i=1}^{n} V_{0,i}R_i \sum_{i=1}^{n} V_{0,i}(\mathrm{d}P_i/P_i) \tag{23.1}$$

其中，V_{0i}为资产 i 的美元（现在）价值，R_i 为资产 i 的收益（或价格变化）。上式对股票完全成立，对其他几种资产（如附息债券，FRA，FRN，远期，期货和互换）是很合理的近似。从公式（23.1）可以直接得到组合的标准差，由通常形式的公式给出：

$$\sigma \mathrm{d}V_p = \left[\sum_{i=1}^{n} V_{0,i}^2\sigma_i^2 + \sum_{i\neq j}\sum V_{0,i}V_{0,j}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\right]^{1/2} \tag{23.2}$$

无论资产收益具有什么样的分布，公式（23.2）都可以用来计算组合的标准差。但是我们只通过标准差还无法决定左端 5%的点，我们还要假设资产收益具有一个独特的分布。特别是，如果我们假设资产收益分布是（多元）正态，那么分散化 VaR 的 5%的分位点是：

分散化 $\mathrm{VaR}_p=\sqrt{ZCZ^T}$

$Z=[\mathrm{VaR}_1,\mathrm{VaR}_2,\cdots,\mathrm{VaR}_n]$

$\mathrm{VaR}_i=V_{0,i}(1.65\sigma_i)$

C 是相关系数矩阵。

(23.3)

比如，对于 $n=3$ 的资产，相关系数矩阵是

$$C=\begin{bmatrix}1 & \rho_{12} & \rho_{13}\\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23}\\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1\end{bmatrix} \tag{23.4}$$

在这里，线性和正态性的假设是非常关键的。“映射”本身有时与线性关系完全一致，不一致时，我们经常使用线性近似（即我们使用一阶泰勒展开）。线性关系无法对期权进行很好的近似，在不能应用线性假设时，我们必须使用其他更复杂的方法（比如涉及凸性和 delta－gamma 的二阶近似，或是蒙特卡罗完全估值方法）。如果组合价值的变化 dV_p 和资产收益的变化高度非线性（比如股票期权），那么即使标的资产（如股票）的收益是正态分布的，组合的价值也将不是正态分布的。因此，当计算期权组合（给定分位的）VaR 时，要使用完全分布，而不是仅仅使用“1.65σ”的规则。

公式（23.3）是极为有用的，因为计算机上的矩阵运算很容易实现。假如我们能使用线性和正态假设，我们在计算分散化 VaR 所需要的全部变量就是相关系数矩阵、每项持有资产的现值 $V_{0,i}$和收益的波动率。接下来我们将把各种资产的现金流映射到这个线性框架之内（很多例子是根据 1996 年的 J. P. 摩根设计的，因此读者可以把我们的结果与 J. P. 摩根的原始材料进行对比，这些材料可以从互联网上获得）。

如果所有资产都是多头（即所有的 $V_i>0$），并且所有资产的收益完全正相关（因此 C＝所有元素都为 1 的矩阵），这时的 VaR 就是最坏情况的 VaR。因此由公式（23.3）：

最坏情况 $\mathrm{VaR}=\mathrm{VaR}_1+\mathrm{VaR}_2+\cdots+\mathrm{VaR}_n$

表 23—1 显示上面公式很容易以矩阵形式应用。现在假设有 3 项资产（股票），每项资产有 10 000美元，但资产 2 是卖空的。相关系数都为正，并且很大。“最坏情况”或未分散化的 VaR 是1 996美元，但分散化 VaR 就小得多，为 783 美元。这是因为，虽然资产 2 与其他资产有正的相关性，但它是卖空的，实际上在组合内形成了负的相关性。

表 23—1 “现货”资产组合的 VaR

资产	资产价值	标准差	VaR	VaR 绝对值		相关系数矩阵		
1	10 000	5.418 0%	894	894		1	0.962	0.403
2	−10 000	3.042 4%	−502	502		0.962	1	0.61
3	10 000	3.636 3%	600	600		0.403	0.61	1
					单独的 VaR	894	−502	600
		最坏情况 VaR		1996	分散化的 VaR	783		

23.2 VaR：股票组合

为求出 VaR 而计算出某一国家所有股票的方差和协方差需要很大的工作量。为了简化问题，我们可以使用单指数模型 SIM，因为这可以把所有收益的方差和协方差用资产的 beta 来概括。因此单个资产的收益被映射到市场收益之上。SIM 假设资产 i 的收益完全由市场收益决定（参见附录 23.1）：

$$R_i=\alpha_i+\beta_iR_m+\varepsilon_i \tag{23.5}$$

其中，R_i 为资产 i 的收益，R_m 为市场收益，β_i 为股票 i 的 beta。

另外，我们假设 $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0$，$R_m$ 独立于 ε_i。对 β_i 的估计可以从“风险量度服务”机构得到，或是从 R_i 对 R_m 的时间序列回归得到（比如使用最近 6 个月的每日数据）。包含 n 个资产的股票组合（具有比例权重 w_i）的收益是

$$R_p=\sum_{i=1}^{n}w_iR_i=\sum_{i=1}^{n}(w_i\alpha_i+w_i\beta_iR_m+w_i\varepsilon_i) \tag{23.6}$$

因此

$$R_p=\alpha_p+\beta_pR_m+\sum(w_i\varepsilon_i) \tag{23.7}$$

其中，$\alpha_p=\sum w_i\alpha_i$ 和 $\beta_p=\sum w_i\beta_i$ 为股票组合的 beta。

因此，股票组合的收益线性依赖于市场收益（和组合的 beta β_p）。可以证明（参见附录 23.1）股票组合的标准差是

$$\sigma_p=\beta_p\sigma_m \tag{23.8}$$

当作为组合的一部分时，每只股票的独特风险 ε_i 被分散掉。因此，$\sum w_i^2\sigma_{\varepsilon_i}^2$ 很小，可以忽略不计。为了计算 σ_p，我们只需要估计 n 项资产的 β_i 和 σ_m。我们不再需要估计 n 个 σ_i，更重要的是，也不需估计 $n(n-1)/2$ 个 ρ_{ij}。我们要做的只是把股票的收益映射到它们本地（市场）指数。这大大减小了估计组合 VaR 的计算量。VaR 由下式给出：

$$\mathrm{VaR}_p=V_{0,p}1.65\sigma_p=V_{0,p}\beta_p(1.65\sigma_m) \tag{23.9}$$

其中，$V_{0,p}$为组合的总的美元价值。表 23—2 给出了使用 SIM 计算单一货币股票组合的 VaR 的一个简单例子。注意 $w_i=(V_{0,i}/V_{0,p})$，上面公式可以用矩阵形式写出：

表 23—2　　利用单因子模型得到的美国股票组合 VaR

数据：	持有的两个美国股票：$\beta_1=0.6$，$\beta_2=1.5$ σ_m（标准普尔 500）＝每天 2.938% 两个股票的市场价值分别是 75 万美元和 25 万美元。
问题：	假设单指数模型成立(并假设这是一个分散得很好的组合)，那么这个美国投资者的组合 VaR 是多少？
答案：	**组合的 beta** $\beta_p=w_1\beta_1+w_2\beta_2=(3/4)(0.6)+(1/4)(1.5)=0.7$ **VaR** $\mathrm{VaR}=V_0\beta_p(1.65\sigma_m)=$1 000 000 美元$(0.7)1.65(0.0293)=33\,842$(美元)

$$\text{分散的 } \mathrm{VaR}_p=\sqrt{ZCZ'}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{VaR}_i \tag{23.10}$$

其中，$\mathrm{VaR}_i=V_{0,i}\ (\beta_i 1.65\sigma_i)$，$Z=[\mathrm{VaR}_1, \mathrm{VaR}_2, \cdots, \mathrm{VaR}_n]$，相关系数矩阵 C＝单位矩阵。注意，在 SIM 下，C 矩阵是单位阵，因为在 SIM 下所有个别资产的系统运动都是市场收益 R_m，相关性都包含在 beta（和 σ_m）之中。

SIM 是只有一个因子的单因子 R_m 模型。然而，通过假设所有的资产收益都受到几个（比如 3 个）因子的影响（即某种形式的 APT 模型），我们可以在 VaR 的“映射”框架内，对这个方法进行扩展。因此，所有这 n 个资产收益之间的相关系数将只取决于这些底层“风险因子”的 (3×3) 相关系数矩阵。

VaR：国外股票

假设一个美国投资者持有一个德国股票组合，标准差由 SIM 给出：

$$\sigma_G=\beta_p\sigma_{DAX} \tag{23.11}$$

其中，σ_{DAX} 为 DAX（即德国股票市场指数）的标准差，β_p 为这个德国组合的 beta。显然，这个组合承受着 DAX 变化的风险和来自美元—欧元汇率变化的风险。如果组合的欧元价值是 $V_{0,E}$，那么它的美元价值是 $V_{0,\$}=S_0V_{0,E}$，其中 S_0 是汇率（美元/欧元）。组合的美元价值的变化（线性近似）是

$$\Delta V_p=V_{0,\$}(R_G+R_{FX}) \tag{23.12}$$

其中，$V_{0,\$}$ 为这个德国股票组合的最初美元价值，R_G 为德国组合（即 DAX）的收益，R_{FX} 为美元—欧元汇率（美元/欧元）的变化。

组合的方差因此依赖于 R_G 和 R_{FX} 之间的相关系数 ρ 和它们的方差，美元 VaR 是

$$\mathrm{VaR}_p=(1.65)\sigma(V_p)=V_{0,\$}(1.65)(\sigma_G^2+\sigma_{FX}^2+2\rho\sigma_G\sigma_{FX})^{1/2} \tag{23.13}$$

这也可以用矩阵形式表示：

$$\mathrm{VaR}_p=\sqrt{ZCZ^T} \tag{23.14}$$

其中，$Z=[V_{0,\$}(1.65)\sigma_G, V_{0,\$}\sigma_{FX}]$，C＝ (2×2) 相关系数矩阵，$\rho_{12}=\rho_{G,FX}$。一个国外组合的美元 VaR 只需要把最初的美元市场价值 $V_{0,\$}$ 根据两个风险来源的变化进行调整。RiskMetrics 提供了对 σ_{FX} 和相关系数 ρ_{ij} 的预测。因此，很容易就能得到 Z 和 C。

我们可以把这个方法扩展到包含国内和国外两种资产组合的情况。例如，一个美国投资者持有 $V_{0,\$}^{US}$ 的美国股票和 $V_{0,\$}^{G}$ 的德国股票，那么合适的 Z 向量将是

$$Z=[V_{0,\$}^{US}(1.65)\sigma_{US} \quad V_{0,\$}^{G}(1.65)\sigma_G, \quad V_{0,\$}^{G}\sigma_{FX}] \tag{23.15}$$

变量 σ_{US} 是美国股票头寸的波动率，根据 $\sigma_{US}=\beta_p^{US}\sigma_{sp}$ 得到，其中 β_p^{US} 是美国股票的组合 beta，σ_{sp} 是美国股票指数的波动率。这里，(3×3) 的相关系数矩阵应该是

$$C=\begin{bmatrix} 1 & \rho_{US,G} & \rho_{US,FX} \\ \rho_{US,G} & 1 & \rho_{G,FX} \\ \rho_{US,FX} & \rho_{FX,G} & 1 \end{bmatrix} \tag{23.16}$$

因此，风险经理只需要输入现有的美国头寸和德国头寸的美元价值（即 $V_{0,\$}^{US}$ 和 $V_{0,\$}^{G}$）和这两个组合的 beta 值即可。

23.3 VaR：附息债券

附息债券可以被看做是一系列没有息票支付的零息债券的集合。其他资产，比如 FRN，远期合约和互换都可以被分解成一系列未来的现金流并以下文介绍的类似方式处理。本节中，我们主要计算由附息的政府债券所构成组合的 VaR。首先，我们假设所有的付息日正好落在 RiskMetrics 提供即期利率 y_i 的那些顶点上。每个息票（现金流）C_i 在到期日 i 都可以用合适的即期利率折现，获得它的当前市场价值 V_i，其中 $V_i=C_i/(1+y_i)^i$，y_i＝即期利率。

单个息票

我们首先需要计算零息债券的价格波动率。久期建立了收益率变化和价格变化之间的联系，对于连续复利收益：

$$(\mathrm{d}P/P)_i=(-n_i)\mathrm{d}y_i \tag{23.17}$$

其中，$\mathrm{d}y_i$ 为即期收益率的日变化，n_i 为在 $t=i$ 时的现金支付（息票）的久期。那么，价格波动率 σ_i（$\mathrm{d}P/P$）是

$$\sigma_i(\mathrm{d}P/P)=n_i\sigma_{\mathrm{d}y_i} \tag{23.18}$$

RiskMetrics 计算即期收益率的变化 $\sigma_{\mathrm{d}y_i}$，并把它们转化为价格的波动 σ_i（$\mathrm{d}P/P$）。但是，在 RiskMetrics 中，“价格波动率”和该项所公布的数字实际上等于 $1.65\sigma_i$（$\mathrm{d}P/P$）。使用久期能让我们对价格变化进行一阶近似（和保持线性）。对于现值为 V_i，在到期日 i 的单一息票支付，它的美元 VaR 是

$$\mathrm{VaR}_i=V_i(1.65\sigma_i) \tag{23.19}$$

表 23—3 给出了计算单一息票支付的 VaR 的例子。

表 23—3 **5 年期息票支付的价格波动率**

数据：	面值 100 000 美元的 10 年期年度附息债券，息票率为 7.5%。 当前日期是 1995 年 3 月，待付息票从 1996 年 3 月开始。 5 年期即期收益率＝每年 7.6%，5 年期价格波动率 σ＝每天 0.3。
问题：	5 年的顶点上，息票支付的每日 VaR 是多少？
答案：	息票支付＝0.075(100 000 美元)＝7 500(美元) 市场价值 V_0＝7 500 美元/$(1.076)^5$＝5200(美元) $\mathrm{VaR}=V_0(1.65\sigma)$＝5 200 美元(1.65(0.3)/100)＝25.74(美元)

几个息票支付

附息债券的市场价值是 $V=V_1+V_2+\cdots+V_n$，其中 V_i 为零息债券的现值。这是一种线性关

系，因此附息债券的VaR是

$$\mathrm{VaR}_p=(ZCZ')^{1/2} \tag{23.20}$$

其中，$Z=(\mathrm{VaR}_1,\mathrm{VaR}_2,\cdots,\mathrm{VaR}_n)$，$\mathrm{VaR}_i=V_i(1.65\sigma)$，C为（在每个标准顶点上）债券收益的相关系数矩阵，σ为零息债券的价格波动率。相关系数是各个到期时间的零息债券价格变化的相关系数。因此计算考虑到了不同到期时间之间的分散化效应。总结起来，债券组合的VaR的计算要经过以下步骤：

- 把RiskMetrics在每年的各个到期日或顶点上的所有债券的所有息票支付相加。这样就得到每个顶点上的总息票支付。
- 使用RiskMetrics即期收益率计算各个顶点上所有息票支付的市场价值，即$V_i=C_i/(1+y_i)^{n_i}$或者$C_i\exp(-y_in_i)$。
- 使用标准公式计算全部顶点上所有现金流的（分散化）VaR（考虑不同零息债券收益之间的相关性）：$\mathrm{VaR}_p=(ZCZ')^{1/2}$。

映射现金流

RiskMetrics使用的标准顶点包括1个月、3个月、6个月、12个月和2年、3年、4年、5年、7年、9年、10年、15年、20和30年，它只提供这些顶点上的债券收益波动率和相关系数。如果现金流没有落在标准顶点上，那么我们就要面临一个新的问题。我们需要把一个实际的现金流映射为相邻顶点上的两个单独的现金流。例如，$t=6$时的实际现金流1亿美元（见图23—1）必须按比例分配到RiskMetrics中$t=5$和$t=7$的顶点上。

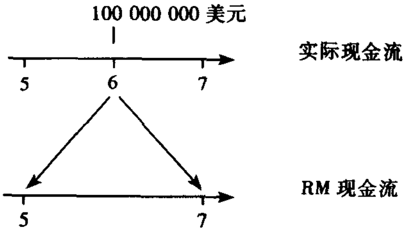


图23—1 RiskMetrics：映射现金流

总的来说，RiskMetrics把现金流分配（映射）到标准顶点的方法要保证：

- 分配到相邻RiskMetrics顶点（比如5年和7年）上的现金流的总的市场价值等于原始的现金流价值（即在$t=6$年的1亿美元）。
- 两个现金流都与原始现金流具有相同符号。
- 两个现金流组合的市场风险等于原始现金流的市场风险。

使用一个数字实例可以最好地说明这个问题（参见J. P. 摩根，1996，134页）。假设我们在$t=6$年有实际现金流1亿美元，我们需要把它映射到RiskMetrics中$t=5$和$t=7$的顶点上。RiskMetrics提供的信息列于表23—4中。

为了找到在$t=5$和$t=7$之间合适的分配比例，我们按以下步骤进行（见表23—4）：

（1）（线性）插值求出6年期的收益率$y_6=\alpha y_5+(1-\alpha)y_7=(1/2)0.065+(1/2)0.067=0.066$（6.6%）。

表 23—4　　**标准顶点上的 RiskMetrics 数据**

RM 顶点	收益率	波动率＝（1.65σ）	相关系数矩阵	
第 5 年	$y_5=6.5\%$	$\sigma_5=0.30$	1	0.99
第 7 年	$y_7=6.7\%$	$\sigma_7=0.60$	0.99	1

（2）计算实际现金流的现值 $V_6=100\ 000\ 000(1+y_6)^6=68\ 150\ 000$（美元）。

（3）（线性）插值求出 6 年期的波动率 $\sigma_6=\alpha\sigma_5+(1-\alpha)\sigma_7=(1/2)0.3+(1/2)0.6)=0.45$。

（4）计算出 RiskMetrics 标准顶点上分配的比例 γ 和 $(1-\gamma)$，即 $V_5=\gamma V_6$，$V_7=(1-\gamma)V_6$，使得在 5 和 7 上债券价格变化的波动率等于在 6 的估计波动率：

$$\sigma_6^2=0.45^2=\gamma^2\sigma_5^2+(1-\gamma)^2\sigma_7^2+2\gamma(1-\gamma)\rho\sigma_5\sigma_7$$

因为 σ_5，σ_7 和 ρ 可以从 RiskMetrics 直接得到，惟一的未知数是 γ，我们求得（参见附录 23.2）$\gamma=0.496$ 或 $\gamma=3.38$。我们忽略后者，因为它违反了每个顶点现金流都大于零的原则（即 $1-\gamma<0$）。

映射现金流到 RiskMetrics 顶点

表 23—5 显示，在 $t=6$ 的实际现金流是 1 亿美元，在第 3 列中，插值的收益率是 6.6%。1 亿美元现金流的现值是 PV＝68 150 000 美元，列于第 4 列中。插值得到的标准差 $\sigma_6=0.45$，如上所述用来分配权重，其中 $\gamma=0.496$，$(1-\gamma)=0.504$（见表 23—5 第 6 列）。因此，$\text{PV}_6=68\ 150\ 000$ 美元（见表 23—5 第 7 列）的分配是：

- 第 5 年顶点：$\text{PV}_5=0.496\ (68.15)=33\ 800\ 000$（美元）
- 第 7 年顶点：$\text{PV}_7=0.504\ (68.15)=34\ 350\ 000$（美元）

表 23—5　　**把 $t=6$ 的现金流映射到 RM 的顶点 $t=5$ 和 $t=7$**

<table>
<tr><th colspan="8">实际现金流：息票＝第 6 年的 100 美元</th></tr>
<tr><th colspan="8">RiskMetrics 在第 5 年和第 7 年的顶点</th></tr>
<tr><th></th><th>(1)期限</th><th>(2)实际现金流</th><th>(3)收益率</th><th>(4)现值</th><th>(5)波动率</th><th>(6)权重</th><th>(7)现金流</th></tr>
<tr><td>第 5 年顶点</td><td>5 年</td><td></td><td>$y_5=6.5$</td><td></td><td>0.30</td><td>0.496</td><td>33 800 000 美元</td></tr>
<tr><td>现金流</td><td>6 年</td><td>100 000 000 美元</td><td>$y_6=6.6$</td><td>68 150 000 美元</td><td>0.45</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>第 7 年顶点</td><td>7 年</td><td></td><td>$y_7=6.7$</td><td></td><td>0.60</td><td>0.504</td><td>34 350 000 美元</td></tr>
</table>

资料来源：RiskMetrics（1996）p. 134.

VaR 的计算

在 $t=5$ 和 $t=7$ 的现金流的 VaR 分别是（见表 23—6）：

$$\text{VaR}_i=\text{PV}_i(\text{PVol}_i)=\text{PV}_i(1.65\sigma_i) \tag{23.21a}$$

$$\text{VaR}_5=33\ 800\ 000\ \text{美元}(0.30)=10\ 140\ 000\ \text{美元} \tag{23.21b}$$

$$\text{VaR}_7=34\ 350\ 000\ \text{美元}(0.60)=20\ 610\ 000\ \text{美元} \tag{23.21c}$$

令 $Z=[\text{VaR}_5,\ \text{VaR}_7]$，C＝相关系数矩阵，那么考虑到 $t=5$ 和 $t=7$ 的债券收益相关性时，两个现金流的 VaR 是：

$$\begin{aligned}\text{VaR} &= [ZCZ']^{1/2} = [\text{VaR}_5^2 + \text{VaR}_7^2 + 2\rho \text{VaR}_5 \text{VaR}_7]^{1/2} \\ &= [(10.14)^2 + (20.61)^2 + 2(0.99)(10.14)(20.61)]^{1/2} = 44\,400\,000(\text{美元}) \qquad (23.22)\end{aligned}$$

表 23—6　　在 $t=6$ 时 1 亿美元现金流的 VaR

期限	RM 现金流，现值	波动率＝1.65σ	VaR_i（i=5，7）	相关系数矩阵	
				第 5 年	第 7 年
5 年	33 800 000 美元	0.30	10 140 000 美元	1	0.99
7 年	34 350 000 美元	0.60	20 610 000 美元	0.99	1
$\text{VaR}(\rho=0.99)=[\text{VaR}_5^2+\text{VaR}_7^2+2\rho\text{VaR}_5\text{VaR}_7]^{1/2}=44\ 400\ 000$(美元)					

注：VaR_i＝(RM 现金流)$_i$×(波动率)$_i$，对于 i＝5 和 7。

主成分分析

对于即期利率运动，一个有用的“统计映射”是主成分分析 PCA，它“减少”了我们计算 VaR 时需要处理的即期利率的数量。（但它并没有消除映射现金流的要求。）PCA 是一种统计技术，它应用于一个（$N\times k$）“收益”矩阵 X，试图用一个小集合（比如 3 个）的主成分 q_i（i=1，2，3）来“解释”所有这些收益的运动。这里的“收益”将是即期利率的集合（比如，k=15，每个有 N 个观察值），它们代表我们的即期收益率曲线。q 是矩阵 X 中原始即期利率的（加权）线性组合：

$$q_i = Xc_i \ (i=1,2,3) \qquad (23.23)$$

其中，C_i 为估计的常量（它实际上是对于矩阵 $X'X$ 的最大特征向量的特征值）。

PCA 方法的主要优点是每个 q 与其他的 q 都是正交的（不相关），因此我们马上可知所有的相关系数都是零（通过构造）。对于即期利率，一般发现这些（15 个）即期利率的 95%以上都可以用这 3 个主成分（PC）“实证表示”。第 1 个主成分被认为是收益率曲线的平行移动，第 2 个代表收益率曲线的扭动，第 3 个（它对即期利率变动的解释最小）代表收益率曲线的“拱起”（它不常发生）。对 VaR 计算重要的是，这 15 个左右即期利率被“线性映射”到 3 个不相关的变量（q）之上，这显著减小了 VaR 计算的维度。

23.4 远期利率协议

为了计算远期利率协议 FRA 的 VaR，需要解决一个新的现金流“映射”问题。我们必须把现金流“分解”为等价的合成 FRA，以使我们使用即期利率，而不必处理远期利率的波动性问题。我们举一个例子对此说明：出售 6 个月×12 个月 100 万美元名义本金的 FRA。这笔交易涉及在 6 个月后借出期限为 6 个月的名义 100 万美元，实际的现金流图 23—2。

我们假设 6 个月和 12 个月的即期利率分别是 $y_6=6.39\%$，$y_{12}=6.96\%$，在 FRA 的第一段有 182 天，第二段有 183 天。我们下面证明由即期利率可以得到隐含的远期利率 $f_{6,12}$＝每年 7.294%。因此，在 6 个月后借出另外 6 个月的 100 万美元会在 12 个月后得到1 036 572美元。我

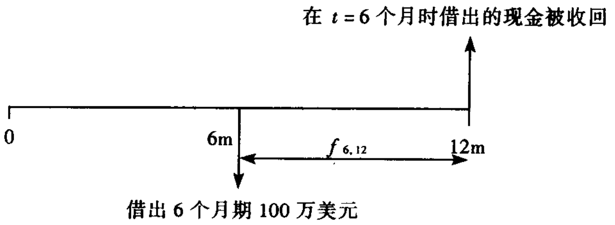


图 23—2　卖出 6 个月×12 个月 FRA：实际现金流

们现在把 FRA 的这些现金流分解为两个即期交易。

考虑以折现制借入 6 个月期的 100 万美元（即以 $y_6=6.39\%$借入969 121美元）并把资金以 $y_{12}=6.96\%$进行 12 个月期的投资（见图 23—3）。每一段都被盯市。借入（即做空）6 个月的现值为 $V_0=-1\ 000\ 000$ 美元$/[1+y_6(182/365)]=-969\ 121$美元。以 $y_{12}=6.96\%$借出（做多）为期 12 个月的969 121美元会得到1 036 572美元（=969 121美元(1.069 6)），这与 FRA 本身收到的金额相同。这是因为我们使用的远期利率是由两个即期利率推导而得：

$$(1+y_{12}(365/365))=[1+y_6(182/365)][1+f_{6,12}(183/365)] \tag{23.24}$$

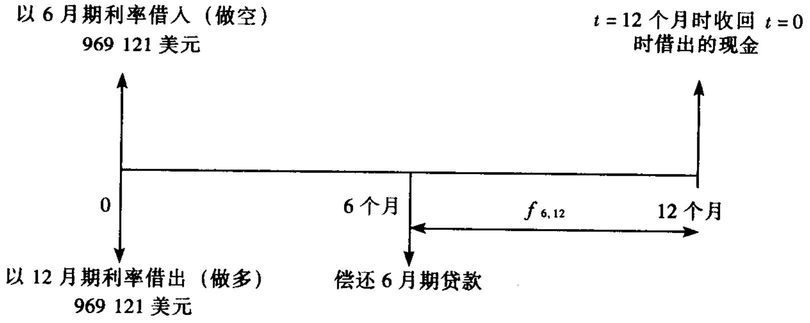


图 23—3　卖出 6 个月×12 个月 FRA：合成现金流

因此，出售 FRA 的实际现金流，即在 6 个月后支出 100 万美元，在 12 个月后得到 1 036 600 美元（见表 23—7 第 2 列），等价于做空（借入）969 121美元（$=V_1$）6 个月，借出969 121美元（$=V_2$）12 个月（见表 23—7 第 6 列）。在合成交易里，$t=0$ 时的净现金流为零，和实际的 FRA 相同。FRA 的价值的变化（$dV_{FRA}=-dV_1+dV_2$）与 V_1 和 V_2 是线性关系。这些头寸的每一个 VaR（见表 23—7 第 8 列）是：

表 23—7

在险价值（6 个月×12 个月 FRA）

(1)期限	(2)现金流	(3)收益率(%)	(4)现值(V_i)	(5)RM顶点	(6)RM现金流	(7)波动率(%)		(8)VaR(美元)
						收益率	价格(dP/P)	VaR_i
182 天	−1 000 000	6.39%	−969 121 美元	6 个月	−969 121	6.94	0.130 1%	2 081
365 天	1 036 572	6.96%	−969 121 美元	12 个月	969 121	7.42	0.291 6%	4 662
分散的 $VaR(\rho=0.7)=[(2\ 081)^2+(4\ 662)^2-2(0.7)(2\ 081)(4\ 662)]^{1/2}=3\ 534$(美元)								

注：在前 6 个月的分支中，假设天数是 182，在后 6 个月的分支中，假设天数是 183，这样一年有 365 天。第（8）列中的 VaR 是第（6）列和 1.65σ 的乘积（即价格波动率）。收益率的波动率没有在计算中使用，但常常作为备忘出现在 RM 表格之中。分散 VaR 计算时出现的负号是由于合成头寸涉及 6 个月期的借入，$V_6=-969\ 121$。因此

$$\begin{aligned} VaR &= [VaR_1^2+VaR_{12}^2+2\rho\ (1-VaR_6)\ (VaR_{12})]^{1/2} \\ &= [V_6^2\ (1.65\sigma_6^2)\ +V_{12}^2\ (1.65\sigma_{12})^2+2\ (-V_6)\ V_{12}\rho\ (1.65\sigma_{S6})\ (1.65\sigma_2)]^{1/2} \end{aligned}$$

其中，V_i=到期日 i 的现值，σ_i=到期日 i 的价格波动率，每个到期日的在险价值是 $VaR_i=V_i\ (1.65\sigma_i)$。

- $\text{VaR}_6=969\ 121$ 美元$(1.65)(0.130\ 2/100)=2\ 081$(美元)
- $\text{VaR}_{12}=969\ 121$ 美元$(1.65)(0.291\ 6/100)=4\ 663$(美元)

(合成的)FRA 头寸的 VaR 是3 534美元，使用 $\rho=0.7$ 计算得到

$$\text{VaR}=(ZCZ')^{1/2}=[\text{VaR}_6^2+\text{VaR}_{12}^2+2\rho(-\text{VaR}_6)(\text{VaR}_{12})]^{1/2} \tag{23.25}$$

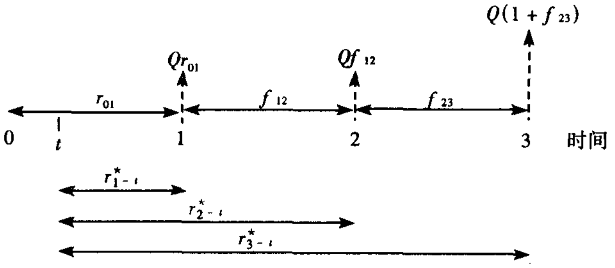
VaR_6 的负号是因为合成头寸中包括做空（借入）6 个月。1 个月以后，上面的计算将不再这么直接了，因为证券已经变成 5 个月×11 个月的 FRA，每个现金流都要被分配到相邻的 RiskMetrics 标准的“到期日顶点”上去。

23.5 FRN 和互换的 VaR

浮动利率票据

浮动利率票据（floating rate note，FRN）是根据已知的 Q 美元本金而支付浮动息票的证券。浮动利率通常是 LIBOR，因此，如果每 3 个月支付一次息票，那么就以 3 月期 LIBOR 作为参考利率。假设现在是 3 月 15 日，当前 3 月期 LIBOR 是 10%，$Q=1\ 000\ 000$ 美元。持续 6 个月的 FRN 将在 6 月 15 日支付25 000美元＝（0.10/4）1 000 000 美元，而 6 月 15 日的 LIBOR 是多少，将会决定 9 月 15 日的息票支付。因此，第一次息票支付是已知的，但 FRN 开始后所有的未来息票都是未知的，会随着未来 LIBOR 的变化而变化。此外还要注意，实际的息票支付是延后发生的，它的根据是 3 个月前的 LIBOR。FRN 中的本金交换在 FRN 开始和结束时都要发生。我们下文将会看到，隐含的远期利率可以用来获得 FRN 的公平价值（或价格）。

图 23—4 是一个典型的 FRN 支付图像，初始的到期时间是 3 年（年息票），其中的“今天”是 FRN 开始后的 3 个月后。实箭头代表 $t=1$ 的第一个已知的支付，虚线是未知的未来浮动利率支付。$t=3$ 时的最终支付包括已知的本金 $Q=1\ 000\ 000$ 美元和未知的最终浮动利息。因此，FRN 包含一个 $t=1$ 时的已知支付，$t=2$ 和 $t=3$ 时一系列未知的“零息票债券”支付。为了计算 FRN 的 VaR，我们需要知道它在 t 时刻的市场价值。为了使计算尽可能的简单，我们使用“简单”利率（这与市场上 LIBOR 的报价方法一致）。



注：如果 $t=$ 互换开始后 0.25 年，那么 $1-t=0.75$ 年，$2-t=1.75$ 年，$3-t=2.75$ 年。

图 23—4　FRN 的现金流：在支付日之间

对 FRN 定价

我们能使用隐含远期利率的概念计算出 FRN 的公平价格。考虑 $t=2$ 时的（未知）浮动息票

支付。它的价值由未知的$t=1$时的 LIBOR 决定。我们对于这一利率的最好估计是（年）远期利率f_{12}，因此，$t=2$时的期望浮动利率支付是Qf_{12}，在时刻t的支付 DPV 是

$$PV_2=\frac{Qf_{12}}{(1+r^*_{2-t})} \qquad \text{其中} \qquad r^*_{2-t}=r_{2-t}(2-t) \tag{23.26}$$

折现率r^*_{2-t}是t和第 2 年之间的简单加总即期利率。例如，如果$t=$FRN 开始后的（1/2）（6 个月），那么$2-t=1.5$年。如果年 LIBOR 在 FRN 开始的$t=0$时为r_{01}，浮动息票支付在$t=1$时是Qr_{01}，现值为$PV_i=(Qr_{01})/(1+r^*_{1-t})$。FRN 在$t$时的公平价值是所有期望未来息票加上已知的最终支付$Q$的 DPV：

$$V_{\text{FRN}}=\frac{Qr_{01}}{(1+r^*_{1-t})}+\frac{Qf_{12}}{(1+r^*_{2-t})}+\frac{Qf_{23}}{(1+r^*_{3-t})}+\frac{Q}{(1+r^*_{3-t})} \tag{23.27}$$

我们把上式中的远期利率替换成等价的即期利率可以对其简化。比如，在t时刻，f_{12}由下式决定：

$$(1+r^*_{1-t})(1+f_{12})=(1+r^*_{2-t}) \tag{23.28a}$$

$$f_{12}=\frac{(1+r^*_{2-t})}{(1+r^*_{1-t})}-1 \tag{23.28b}$$

$t=2$时现金流的现值变成

$$PV_2=\frac{Qf_{12}}{(1+r^*_{2-t})}=Q\left[\frac{1}{(1+r^*_{1-t})}-\frac{1}{(1+r^*_{2-t})}\right] \tag{23.29}$$

类似地，替换f_{23}：

$$\begin{aligned}V_{\text{FRN}}=&\frac{Qr_{01}}{(1+r^*_{1-t})}+\left[\frac{Q}{(1+r^*_{1-t})}-\frac{Q}{(1+r^*_{2-t})}\right]\\&+\left[\frac{Q}{(1+r^*_{2-t})}-\frac{Q}{(1+r^*_{3-t})}\right]+\frac{Q}{(1+r^*_{3-t})}=\frac{Q(1+r_{01})}{(1+r^*_{1-t})}\end{aligned} \tag{23.30}$$

因此，FRN 在t时刻的价值等价于一个零息债券，现值为$V_{\text{FRN}}=Q(1+r_{01})(1+r^*_{1-t})$。那么 FRN 的 VaR 依赖于单一（已知）即期利率r^*_{1-t}的波动率，并应用于已知的现金流Q（$1+r_{01}$）之上（见图 23—5）。我们把 FRN 的现金流映射为到期时间为（$1-t$）的单一现金流。如果我们令σ（dP/P）代表相应于即期利率r^*_{1-t}的价格的波动率，那么

$$\text{VaR}_{\text{FRN}}=V_{\text{FRN}}1.65\sigma_{dP/P} \tag{23.31}$$

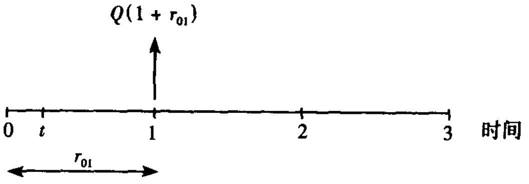


图 23—5 FRN 的等价现金流：在支付日之间

注意，在 FRN 开始的时刻$t=0$，我们有$r^*_{1-t}=r_{01}$，所有的未来现金支付的现值等于票面价值$V_{\text{FRN}}=Q$。因为购买者在$t=0$放弃了Q美元，FRN 最初的净价值为零。在t时，如果r^*_{1-t}相对于最初的参考利率r_{01}下跌，那么 FRN 的价值将变大（见公式（23.30））。最后，要注意到，如果我们使用复利，FRN 在t时的价值将是

$$V_{\mathrm{FRN}}=\frac{Q(1+r_{01})}{(1+r_{1-t})^{1-t}} \tag{23.32}$$

其中，r_{1-t}为年连续复利。当然，随着时间推移，应用于现金流的即期利率将会改变。另外，一些现金流与 RiskMetrics 的标准顶点不一致，我们必须把它们映射到标准顶点之上。

利率互换

收到浮动、支付固定的利率互换等价于做多一个 FRN，做空一个附息债券。因此，由以上的推导，一旦我们计算出 n 个固定息票支付的和 FRN 的 VaR，互换的“组合 VaR”可以利用通常的方法 $Z=[\mathrm{VaR}_1,-\mathrm{VaR}_2,\cdots,-\mathrm{VaR}_n,\mathrm{VaR}_{\mathrm{FRN}}]$和合适的相关系数矩阵计算出来。

23.6 外汇远期和期权的 VaR

外汇远期

读者可能会认为，对于一个美国居民，远期市场上 1 000 万欧元头寸的美元 VaR 是很容易计算的，即 $\mathrm{VaR}_{\mathrm{FR}}=(F_0\times 10\ 000\ 000)(1.65\sigma_{\mathrm{FR}})$，其中，$F$ 为当前的远期汇率，σ_{FR}为远期汇率的波动率。原理上这是正确的，但这样的话，我们的数据库就要包含所有国家的所有到期时间的所有远期汇率的波动率和相关系数。为了回避这个问题，我们把这个远期合约分解为它的“合成等价物”，因为我们已经有了后者变量的数据。

为了避免“存储”远期汇率波动率和计算大量附加的协方差，我们把远期合约映射为两个即期利率和一个即期汇率，并以此计算 VaR。为了说明这个映射（或合成远期），假设一个美国（国内）居民持有一个远期合约，将在 1 年后得到 1 000 万欧元。当前即期率为 $S=1.12$（美元/欧元），$r_d=6.0\%$，$r_f=5.0\%$（复利），因此，远期汇率是

$$F_t=S_t\mathrm{e}^{(r_d-r_f)(T-t)}=1.161\ 0(\text{美元/欧元}) \tag{23.33}$$

因为抛补利率平价关系，我们把上面 $t=1$ 时的现金流用 $t=0$ 时的两个货币市场和一个即期外汇市场的头寸表示（见图 23—6）。$t=1$ 时的现金流出是 1 161 万美元。现在，我们需要复制 $t=0$ 时期货合约的零净现金流。因此，我们立即把美元换成欧元，在货币市场上以 Euribor（欧元银行同业拆借利率）借出欧元，我们的远期合约等价于包含下面两个资产的映射：

（1）$t=0$ 时，以 r_d 借入 $V_d=(10F)\ \mathrm{e}^{-r_d(T-t)}=10\ 950\ 000$（美元）；

（2）在外汇市场上以利率 r_f 借出上面 V_d 美元。我们有

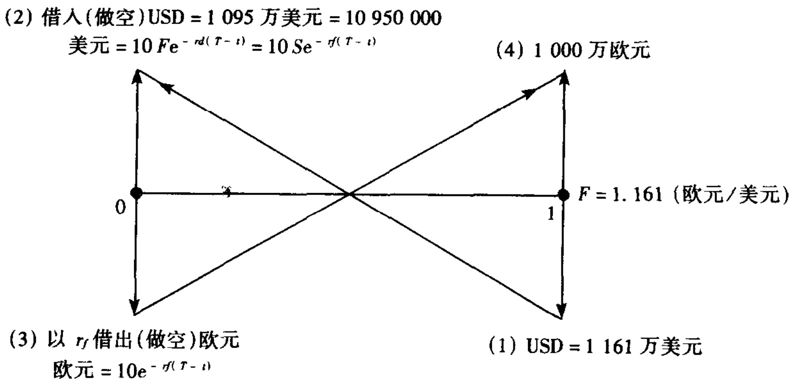
$$V_{\mathrm{d}}=(10F_t)\mathrm{e}^{-r_d(T-t)}=10S_t\mathrm{e}^{-r_f(T-t)}=10\ 950\ 000(\text{美元}) \tag{23.34}$$

其中，我们使用了 $F_t=S_t\mathrm{e}^{(r_d-r_f)(T-t)}$。

（3）（2）中的头寸也包括一个即期外币的等价多头，数量 $V_s=V_f$。

附录 23.3 中列出了上面计算的数学过程，表 23—8 中列出了数值计算过程。“映射组合”中每个个别资产的 VaR 是：

$$\mathrm{VaR}_i=V_i(1.65\sigma_i)=\{108\ 429\quad 9\ 036\quad 14\ 457\} \tag{23.35}$$


(2) 借入(做空)USD = 1 095 万美元 = 10 950 000
美元 = $10Fe^{-rd(T-t)}$ = $10Se^{-rf(T-t)}$
(4) 1 000 万欧元
0
1
F = 1.161 (欧元/美元)
(3) 以 r_f 借出(做空)欧元
欧元 = $10e^{-rf(T-t)}$
(1) USD = 1 161 万美元

注意，我们使用了 $F = S\exp[(r_d - r_f)](t-1)$。

图 23—6　现金流：远期合约与合成

其中，$i=(s, f, d)$，σ_i 代表即期汇率的标准差和国外与国内资产的价格波动率。最坏情况 VaR 是131 921美元，外汇远期的分散化 VaR 是：

$$\mathrm{VaR}=(ZCZ')^{1/2}=111\ 174\ \text{美元} \tag{23.36}$$

表 23—8　　映射外汇远期：美元—欧元（德国）

输入数据

本币是美元，外国是“欧洲/德国”，欧元作为外币。

期限(年)	1
本币	USD
外币	EURO
即期汇率	1.150 0(本币/外币)
利率(国内)	6.000 0%
利率(国外)	5.000 0%
头寸价值	10 000 000(欧元，外币)
远期汇率	1.161 0
头寸价值	−11 609 524(美元，本币)

资产	价值（国内货币）	汇率（美元/外币）	价格波动率	价格标准差	现值（本币）	VaR（绝对值）		相关系数矩阵		
								即期外汇	欧元资产	美元资产
即期外汇		1.150 0	0.99	0.6	10 952 381	108 429	即期外汇	1	0.25	0.04
欧元资产	10 000 000		0.082 5	0.05	10 952 381	903 6	欧元资产	0.25	1	0.20
美元资产	−11 609 524		0.1320	0.08	−10 952 381	14 457	欧元资产	0.04	0.20	1
							单独 VaR，Z	108 429	9 036	−14 457

最坏情况 VaR＝131 921

分散化 VaR＝111 174

分散化的 VaR 和只根据即期外汇头寸得到的 VaR 即108 429美元相差不大(见表 23—8)，这是因为即期汇率的波动率比两个利率的波动率都大得多，它的效应“淹没”了分散化带来的好处。这是意料之中的，因为(根据抛补套利)远期汇率和即期汇率基本上是一对一的移动，实际未平仓的远期头寸具有非常高的风险。

期权

标的于支付红利股票(或外币，或期货期权)的欧式看涨和看跌期权的价格根据 Black - Scholes 公式具有 $P=f(S,r,y,\sigma,T-t)$的形式，其中，P 为期权价格，$y=$ “红利” 收益。由泰勒展开：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2+\frac{\partial f}{\partial \sigma}\mathrm{d}\sigma+\frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \Delta \mathrm{d}S+\frac{1}{2}\Gamma(\mathrm{d}S)^2+\Lambda \mathrm{d}\sigma+\rho_r \mathrm{d}r+\rho_y \mathrm{d}y+\theta \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{23.37}$$

除了对 $(\mathrm{d}S)^2$ 项之外，上面公式对所有的项都是线性的，我们可以对这一项之外应用我们的 “线性” 或 delta 方法（参见附录 23.4）。在附录 23.4 中，我们证明了，如果标的资产的收益 $\mathrm{d}S/S$ 是正态分布的，那么（忽略其他项）

$$\sigma_{\mathrm{df}}=\Delta S\sigma_{\mathrm{dS}/S}\sigma_{\mathrm{df}}=\Delta S\sigma^2_{\mathrm{ds/s}} \tag{23.38}$$

$\mathrm{VaR}_{\mathrm{df}}=1.65\sigma_{\mathrm{df}}$。在多元正态的假设下，VaR 的计算中包括附加的线性项 r，y 和 $\mathrm{d}\sigma$ 并不是一个问题。然而，对于波动率 σ，这个假设并不现实。如果我们需要更准确地衡量 VaR（即包含 $\mathrm{d}S^2$ 项），那么我们必须舍弃 delta - gamma 方法而采用其他方法，比如蒙特卡罗模拟，由此，我们能够得到期权价格结果的完全分布（参见下一章）。

23.7 本章摘要

对于大的金融机构，当它面对大量不同种类的资产时，计算 VaR 的工作量相当大。使用的简化包括以下要点：

- **单指数模型**用来简化某个国家股票头寸 VaR 的计算。
- **国外资产**可以被看做具有两个风险来源：“本地货币收益”（比如，对于持有德国股票的美国投资者是 DAX 的收益）和即期外汇风险。VaR 方法考虑到了“本地货币收益”（如 DAX 指数收益）和外汇汇率变化（美元—欧元汇率）的相关系数。
- 通过把**附息债券**看做一系列零息债券，计算出标准顶点上息票的 VaR，是计算附息债券组合 VaR 的可行方法。这种方法可以直接用来计算零息货币市场证券的 VaR（比如短期国债、银行收据和商业票据）。
- 基于即期利率，**FRA 或 FRN** 可以被分解为一系列等价的合成现金流。当计算 VaR 时，这些合成的现金流可以用处理附息债券的类似方法对待。
- **支付固定、收取浮动的利率互换**等价于看多一个支付固定息票债券，同时看空一个 FRN。这种映射方法使得计算互换的 VaR 时只需用到即期利率的信息（和久期近似）。
- 使用抛补利率平价，**购买外汇的远期合约**等价于以即期汇率看多一个国外债券，同时看

空一个国内债券。因此，可以利用利率和即期外汇的波动率和相关系数的（已有）数据来计算出 VaR。

- 可以使用 delta 方法（即线性近似）计算出**包含期权的组合**的 VaR，但结果可能并不准确。delta - gamma 近似更好一些，但也只考虑到了由于股票价格造成的变化。计算由于波动率变化造成的 VaR 需要更复杂的方法，比如**蒙特卡罗模拟**。
- **映射**改善了“大量数据存储”的问题，减少了相关系数矩阵的维度，也带来了计算上的优点。然而，当**线性**或（多元）**正态假设**不能提供良好近似时（比如组合包含期权），我们需要考虑其他方法。下一章我们将讨论这些问题。

章末练习

1. 什么是“映射”？为什么它在计算 VaR 时很有用？

2. 列出使用 VaR 衡量市场风险时的六个潜在问题领域。

3. 1994 年，奥兰治县的财政官员 Robert Citron 损失了大约 70 亿美元。用少于半页纸的篇幅解释这是如何发生的（利用《经济学家》或其他金融报刊）。

下面大多数问题的答案，都可以根据公式 $(ZCZ')^{1/2}$ 利用 Excel（或其他软件包，如 Gauss，RATS，Mathematica 等）得出。

4. 一项金融资产（如债券）具有以下支付图像：

年	1	2	3
支付（美元）	400	450	500
即期利率（%，年）	7.84	7.96	7.98
债券收益（价格变化）的标准差（%，每天）	0.23	0.20	0.25

（a）计算每个现金流的市场价值。

（b）计算 $t=1$，2，3 年时每个现金流的（一天）VaR。

（c）如果 $\rho_{12}=0.80$，$\rho_{13}=0.70$，$\rho_{23}=0.6$，计算所有三个现金流的 VaR。

5. 你有一个包含三个英国行业的股票组合：消费品、资本品和金融服务业。当地的市场指数是 FT 全股指数。你的组合的市场价值和组合的 beta 如下：

	市场价值（英镑）	β_i，FTA
消费品	1 000 000	1.078 9
资本品	900 000	0.993 7
金融服务	450 000	1.038 2

FT 全股指数的收益具有的标准差为每天 1.896%。假设这三个资产收益由单指数模型产生，并且三项资产构成分散化良好的组合，计算这个组合的 VaR。

6. 当前是 1996 年 3 月 1 日。你持有的债券组合在每年的 6 月 1 日支付 5 000 英镑（即在 0.25 年、1.25 年、2.25 年之后，等等）。然而，你只拥有标准到期日的价格和收益率波动率的信息。利用 RiskMetrics 方法和下表的信息，对于 2002 年 6 月 1 日到期的支付（即 6 年 3 个月之后），回答下述问题：

到期日（年）	收益（%，每年）	价格 σ（dP/P）（%，每年）
5	6.93	1.261
7	7.01	1.109

(a) $t=6.25$ 年时现金支付的市场价值是多少（利用 $y_{6.25}$）？

(b) $t=6.25$ 年时价格波动率的标准差是多少（利用 $\sigma_{6.25}$）？

(c) 假设 RM 计算出了 $t=6.25$ 时5 000英镑现金流对标准顶点的最优分配，$\gamma_5=0.40$，$\gamma_7=0.60$。如果 $t=5$ 和 $t=7$ 的现金流的相关系数是 $\rho=0.8$，那么这两个现金流的 VaR 是多少？

7. 你出售了本金为100 000美元的一个 6 个月×12 个月 FRA（假设 180 天=6 个月，1 年=365 天）。如果 $y_6=6.5\%$，$y_{12}=7\%$（单利），远期—远期利率是多少？

(a) 证明 FRA 给出的现金流等价于（$t=0$）借入现金，然后把所得金额进行 12 个月的投资（贷出）。

(b) 如果在 6 个月和 12 个月的每日价格波动率是 $\sigma_6=1\%$，$\sigma_{12}=0.5\%$，相关系数为 $\rho=0.7$，那么最坏情况 VaR 和实际 VaR 是多少？（使用左尾处 5%。）

附录 23.1 VaR 和单指数模型

我们在这里想说明的是 RiskMetrics 中股票组合映射是如何利用单指数模型推导出下列表达式的：

$$\sigma_p=\left[\sum_{i=1}^{n}w_i\beta_i\right]\sigma_m=\beta_p\sigma_m \qquad (A23.1)$$

其中，σ_p 为投资组合的标准差，σ_m 为市场组合的标准差，$\beta_p=\sum w_i p_i$ 为投资组合的“beta”值。

单指数模型可以由方程（A23.2）以及假设方程（A23.3）组成：

$$R_i=\alpha_i+\beta_i R_m+\varepsilon_i \qquad (A23.2)$$

$$E(\varepsilon_i)=0 \qquad (A23.3a)$$

$$E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=\sigma_{\varepsilon i}^2 \quad i=j$$
$$=0 \quad i\neq j \qquad (A23.3b)$$

$$\mathrm{Cov}(R_m,\varepsilon_i)=0 \qquad (A23.3c)$$

所以可以推出：

$$ER_i=\alpha_i+\beta_i ER_m \qquad (A23.4a)$$

$$\sigma_i^2=\beta_i^2\sigma_m^2+\sigma_{\varepsilon i}^2 \qquad (A23.4b)$$

$$\sigma_{ij}=\beta_i\beta_j\sigma_{\mathrm{m}}^2(i\neq j) \tag{A23.4c}$$

投资组合的期望收益率和标准差（方差）的定义为：

$$ER_{\mathrm{p}}=\sum w_iER_i \tag{A23.5a}$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_iw_j\sigma_{ij} \tag{A23.5b}$$

上面投资组合方差的表达式要求有 n 个方差和 $n(n-1)/2$ 个协方差。当 $n=150$ 时，就要求输入11 325个值。为了减少要求输入的数值的数量，我们应用单指数模型。将方程（A23.2）带入方程（A23.5a）中，我们可以得到

$$ER_{\mathrm{p}}=\sum w_i\alpha_i+(\sum w_i\beta_i)ER_{\mathrm{m}}=\alpha_p+\beta_pER_{\mathrm{m}} \tag{A23.6}$$

这里 $\alpha_{\mathrm{p}}=\sum w_i\alpha_i$ ana $\beta_{\mathrm{p}}=\sum w_i\beta_i$ 。

利用方程（A23.4）替换方程（A23.5b）中的 σ_i^2 和 σ_{ij}：

$$\sigma_{\mathrm{p}}^2=\Big[\sum_{i,j=1}^{n}w_iw_j\beta_i\beta_j\Big]\sigma_{\mathrm{m}}^2+\sum_{i=1}^{n}w_i^2\sigma_{\varepsilon j}^2=\Big(\sum w_i\beta_i\Big)\Big(\sum w_i\beta_j\Big)\sigma_{\mathrm{m}}^2+\sum w_i^2\sigma_{\varepsilon i}^2 \tag{A23.7}$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}^2=\beta_{\mathrm{p}}^2\sigma_{\mathrm{m}}^2+\sum w_i^2\sigma_{\varepsilon i}^2 \tag{A23.8}$$

方程（A23.8）也可以写成

组合总风险＝市场风险＋特殊风险　　（A23.9）

在单指数模型中，计算 ER_{p} 和 σ_{p}^2 只需要 $3n$ 个 $\beta_i\sigma_{\varepsilon i}\alpha_i$ 的估计值和 σ_{m}^2，ER_{m} 的估计值，加起来有 $3n+2$ 个输入值（当 $n=50$ 种资产时，输入值的个数为 452）。这就大大简化了按方程（A23.5a）和方程（A23.5b）所示的“一般模型”计算的过程。特殊风险只是回归方程（A23.2）中剩余项的（加权）平方和。如果我们持有的不是一个风险分散化的投资组合，那么方程（A23.8）中最后一项就不为零，在计算时就必须被包含进去。然而，如果我们假设这样一种状态：所有股票在投资组合所占的比重都是 $w_i=1/n$，那么就有：

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{p}}^2=\beta_{\mathrm{p}}^2\sigma_{\mathrm{m}}^2+n^{-1}\Big(\sum\sigma_{\varepsilon i}^2/n\Big)} \tag{A23.10}$$

最后一项括号中的内容就是特殊风险的平均值 $\sigma_{\varepsilon i}^2$。所以最后一项就是（$1/n$）$\sigma_{\varepsilon i}^2$，当 $n\to\infty$ 时，该项的值为零（$n=25$ 个随机选取的股票就足以保证该项的值很小）。所以，在一个风险被充分分散化的投资组合中：

$$\sigma_{\mathrm{p}}=\beta_{\mathrm{p}}\sigma_{\mathrm{m}}=\Big(\sum w_i\beta_i\Big)\sigma_{\mathrm{m}} \tag{A23.11}$$

如果 V_i 是资产 i 的头寸，那么投资组合的价值 $V_p=\sum V_i$。由于 $w_i=V_i/V_p$，那么投资组合的 VaR 就可以用下列两种等价的形式来表示：

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{p}}=V_{\mathrm{p}}(1.65\sigma_{\mathrm{p}})=V_{\mathrm{p}}\sum w_i(1.65\beta_i\sigma_{\mathrm{m}})=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{VaR}_i \tag{A23.12}$$

这里 $\mathrm{VaR}_i=V_i\beta_i$（$1.65\sigma_{\mathrm{m}}$），或

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{p}}=\sum\mathrm{VaR}_i=(ZCZ')^{1/2} \tag{A23.13}$$

这里 $Z=[\mathrm{VaR}_1,\ \mathrm{VaR}_2,\ \cdots,\ \mathrm{VaR}_n]$，且 C 是一个单位矩阵。

RiskMetrics 给出了的 σ_{m} 的估计值，使用者提供了 V_i 的价值以及 beta 的估计值。在单指数模型中，一个关键的假设是 $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0$，也就是说公司 i 的股票（或行业 i）与公司 j 的股票是不相关的。然而，在实践中发现，当 ε_i 和 ε_j 的正相关系数很小时，特殊风险仍旧随着 n 的增加而快速减少。

作为一个附带的问题，在单指数模型的假设下，股票间的相关系数可以由 beta（和方差）的估计值计算出来，而这并没有多大的价值：

$$\rho_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}=\frac{\beta_i\beta_j\sigma_{\mathrm{m}}^2}{\sigma_i\sigma_j} \tag{A23.14}$$

这里 σ_i 和 σ_j 由方程（A23.4b）给出。我们注意到，如果单指数模型很好地符合 $\sigma_{\varepsilon i}$，那么 $\rho=1$，因为每个资产的收益率仅仅取决于 R_{m}。然而在 RiskMetrics 中，协相关系数 ρ_{ij} 是通过 EWMA 计算的，因为 RiskMetrics 法旨在寻找一种普通的方法来预测股票、债券、FOEX 等资产间的相关关系，单指数模型并不是对所有类型的资产都适合。我们注意到市场模型放松了单指数模型要求 $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i\varepsilon_j)=E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0$ 的假定。但是这样一来，我们简化的投资组合风险的表达式（A23.11）就不能成立。只要 $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)\neq 0$，那么就必须求出所有的协方差来计算 σ_p。

附录 23.2　债券：现金流的分配

问题

用线性的插值法计算在 $t=6$ 时（处于标准顶点“5”和“7”之间）的实际现金流波动率的估计值为

$$\sigma_6=(1/2)\sigma_5+(1/2)\sigma_7=0.45 \tag{A23.15}$$

我们希望在两个标准顶点之间分配 $t=6$ 时的现金流，它的面值为100 000 000美元，其现值为 $V_6=68\ 150\ 000$美元。我们让 $V_5=\gamma V_6$，$V_7=(1-\gamma)V_6$，以使 $V_6=V_5+V_7$（也就是说我们保持市场价值不变）。这两个现金流的回报率为

$$R_{\mathrm{p}}=\gamma R_5+(1-\gamma)R_7 \tag{A23.16}$$

回报率的方差为

$$\sigma_{\mathrm{p}}^2=\gamma^2\sigma_5^2+(1-\gamma)^2\sigma_7^2+2\gamma(1-\gamma)\rho\sigma_5\sigma_7 \tag{A23.17}$$

但是现在我们要求 $\sigma_{\mathrm{p}}=\sigma_6=0.45$，给定 $\sigma_5=0.3$，$\sigma_7=0.6$ 且 $\rho=0.99$。

求解

我们要通过方程（A23.17）求出这样一个 γ，它可以使得 $\sigma_{\mathrm{p}}=\sigma_6=0.45$。方程的 RHS 在形式上是关于 γ 的一个二次方程式：

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \tag{A23.18}$$

这里：

$$a=\sigma_5^2+\sigma_7^2-2\rho\sigma_5\sigma_7=0.093\ 6$$

$$b=2\rho\sigma_5\sigma_7-2\sigma_7^2=-0.3636$$

$$c=\sigma_7^2-\sigma_6^2=0.1575$$

对于 γ，方程（A23.18）解的标准形式是

$$\gamma=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{A23.19}$$

所以 $\gamma=0.496$ 或者 3.38。在 $t=6$ 时实际的现金流量是正的，所以我们舍弃 $\gamma=3.38$，因为此时 $1-\gamma=-2.38$，得出 $t=7$ 时的现金流为负值。为了分配我们的现金流，我们取 $\gamma=0.496$：

$$V_5=\gamma(68\,150\,000\text{ 美元})=33\,800\,000(\text{美元}) \tag{A23.20}$$

$$V_6=\gamma(68\,150\,000\text{ 美元})=34\,350\,000(\text{美元}) \tag{A23.21}$$

附录 23.3 映射远期合约

现在考虑一个持有远期多头的美国居民。该远期合约要求一年后购买 1 000 万欧元。那么这个远期合约的价值为

$$V_t=(F_t-F_0)e^{-rd(T-t)} \tag{A23.22}$$

这里 F_0 是合约中规定的初始远期利率（也就是交割价格）。r_d 是国内（US）利率。目前的远期利率（每欧元的美元价值）为

$$F_t=S_te^{(r_d-r_f)(T-t)} \tag{A23.23}$$

这里 S_t 是 FX 的即期利率（国内/国外）且 r_f 是外国（欧元）利率。把方程（A23.23）代入方程（A23.22）中，我们可以得到

$$V_t=S_te^{-r_f(T-t)}-F_0e^{r_d(T-t)} \tag{A23.24}$$

利用泰勒一阶展开式，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V&=\frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S+\frac{\partial V}{\partial r_f}\mathrm{d}r_f+\frac{\partial V}{\partial r_d}\mathrm{d}r_d\\&=[e^{-r_f(T-t)}]\mathrm{d}S-(T-t)[Se^{-r_f(T-t)}]\mathrm{d}r_f+(T-t)[F_0e^{-r_d(T-t)}]\mathrm{d}r_d\end{aligned} \tag{A23.25}$$

现在，对我们知道的外国和本国资产运用久期公式 $\mathrm{d}P/P=-(T-t)\,\mathrm{d}r$：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V&=[S_te^{-r_f(T-t)}]\frac{\mathrm{d}S}{S}+[S_te^{-r_f(T-t)}]\frac{\mathrm{d}P_f}{P_f}-[F_0e^{-r_d(T-t)}]\frac{\mathrm{d}P_d}{P_d}\\&=V_s\frac{\mathrm{d}S}{S}+V_f\frac{\mathrm{d}P_f}{P_f}-V_d\frac{\mathrm{d}P_d}{P_d}\\&=\text{FX 现货的多头头寸}+\text{外国货币债券的多头}+\text{国内债券的空头}\end{aligned} \tag{A23.26}$$

如果我们持有一个 1 000 万欧元的多头远期合约，那么上面所有 V_i 的价值将要变成（10 000 000欧元 V_i）。这样，远期头寸就可以映射为这样一个头寸：该头寸是价值为 V_S 的外国货币现货多头，价值为 V_f 的外国货币债券的多头（且 $V_S=V_f$）和一个价值为 V_d 的国内债券的空头的（线性）组合。

附录 23.4　映射期权

在 Black - Scholes 假定下，标的资产为支付红利股票（或是外国货币，或是期货期权）的欧式看涨和看跌期权价格的表达形式为 $P=f(S,r,y,\sigma,T-t)$。这里 P 代表期权的价格。$\mathrm{d}P\equiv \mathrm{d}f$ 的泰勒展开式为：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial S}\mathrm{d}S+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2+\frac{\partial f}{\partial \sigma}\mathrm{d}\sigma+\frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \Delta S\,\frac{\mathrm{d}S}{S}+\frac{1}{2}\Gamma S^2\left[\frac{\mathrm{d}S}{S}\right]^2+\Lambda\mathrm{d}\sigma+\rho_r\mathrm{d}r+\rho_y\mathrm{d}y+\theta\mathrm{d}t \qquad \text{(A23.27)}\end{aligned}$$

其中，r 为无风险利率，y 为“股息”收益率，σ 为波动率。上面的方程是除（$\mathrm{d}S)^2$ 之外所有项的线性形式。忽略（$\mathrm{d}S)^2$ 和 $\mathrm{d}\sigma$ 项，我们可以应用“线性”或 delta 法，按一般的方法求出 $\sigma_{\mathrm{d}f}$。为了能够更好地应用 delta - gamma 近似值，我们需要更详细地检查（$\mathrm{d}S)^2$ 项。假定所持有期权风险的主要来源仅仅是标的物 S 的变化。我们现在想找到一个分布使它适合 $\mathrm{d}f$。假设$\mathrm{d}S/S$ 服从期望为零，标准差为 σ 的正态分布，我们可以证明的 $\mathrm{d}f$ 前三阶矩为：

$$\begin{aligned}&\mu_{\mathrm{df}}\equiv E(\mathrm{d}f)=(1/2)S^2\Gamma\sigma^2 \\ &E(\mathrm{d}f^2)=S^2\Delta^2\sigma^2+(3/4)S^4\Gamma^2\sigma^4 \\ &E(\mathrm{d}f^3)=(9/2)S^4\Delta^2\Gamma\sigma^4+(15/8)S^6\Gamma^3\sigma^6 \qquad \text{(A23.28)}\end{aligned}$$

如果知道右边的项 Δ，Γ（通过 Black-Scholes），目前股票的价格 S 和 σ 的估计值（例如，隐含波动率或 EWMA 或 GARCH 方法对波动率的计算），我们就可以计算出 $\mu_{\mathrm{d}f}$，E（$\mathrm{d}f^2$）和 E（$\mathrm{d}f^3$）。如果我们忽略 E（$\mathrm{d}f^3$），那么前两阶矩就服从均值为 $\mu_{\mathrm{d}f}$，方差为 $\sigma_{\mathrm{df}}^2\equiv E(\mathrm{d}f^2)-[E(\mathrm{d}f)]^2$ 的正态分布，从而我们很快就可以得到 5％分位点的 VaR 值是 $1.65\sigma_{\mathrm{df}}$。有时忽略 E（$\mathrm{d}f^3$）项是很危险的，但是我们有得到前三阶矩的可行的方法，从而得到关于分布分位点的直接公式。例如，我们已经得到了 E（$\mathrm{d}f^i$），$i=1$，2，3 的估计，那么第 q 分位点可以应用 Cornish - Fisher 展开式，由下面的表达式给出：

$$q\text{ 分位点的截点}=\mu_{\mathrm{df}}+m_q\sigma_{\mathrm{f}}$$

这里：

$$\begin{aligned}&m_q=z_q+(1/6)(z_q^2-1)Q_{\mathrm{df}} \\ &Q_{\mathrm{df}}=\frac{1}{\sigma_{\mathrm{df}}^3}E[(\Delta f-\mu_{\mathrm{df}})^3]=\frac{E[(\Delta f)^3]-3E[(\Delta f)^2]\mu_{\mathrm{df}}+2\mu_{\mathrm{df}}^3}{\sigma_{\mathrm{df}}^3} \qquad \text{(A23.29)}\end{aligned}$$

Q_{df}是对偏度的一个测量值，是方程（A23.28）中变量 E（$\mathrm{d}f^i$）的三阶矩的函数。z_q 是标准正态分布 N（0，1）第 q 分位点（例如，第一分位点的 $z_q=-2.33$）。

决定期权 VaR 值的程序为：

（1）计算 E（$\mathrm{d}f^i$），$i=1$，2，3；

（2）计算 Q_{df}；

（3）选择 z_q；

（4）利用方程（A23.29）计算第 q 分位点的 VaR 值。

现在我们举个例子做更详细的说明。假设我们已经运用方程（A23.28）求出了 $\mu_{\mathrm{df}}=-0.3$

美元和 $\sigma_{df}=2.0$ 美元，$Q_{df}=-0.4$。在该种分布中的偏度与假设正态分布计算出的 VaR 值有什么不同呢？假设正态条件下第 1 分位点的 VaR 值为

$$\text{VaR}(1\%,\text{正态性})=\mu_{df}-2.33\sigma_{df}=-0.3-2.33(2.0)=-4.96(\text{美元})$$

如果我们在实际分布中考虑到偏度，那么

$$m_q=z_q+(1/6)(z_q^2-1)Q_{df}=-2.33+(1/6)[2.33^2-1](-0.4)=-2.625$$

第 q 分位点的美元临界点 $=\mu_{df}+m_q\sigma_f=-0.3-2.635\ (2.0)\ =-5.75$ (美元)

因此将偏度考虑进去，VaR 的值从 4.96 升高到 5.75（也就是增加了 14%）。

当我们把其他风险源例如随机波动率 $d\sigma$，利率 dr 等都包括进去的时候，上面这一简单的公式形式就不适合了。而且当我们持有 1 个以上的期权时，E（df^i）的矩的表达式变得很复杂。正是这些原因，包含期权的投资组合的 VaR 值通常通过下列两种方法得到：利用蒙特卡罗模拟（参见下章）“得出”结果的完全分布和“完全估值方法”（例如，利用 Black - Scholes 的封闭形式解得到期权的价格）。

第24章

VaR：统计性问题

学习目标

- 介绍从实证角度来看是否大多数资产的收益率是我们在利用**方差—协方差方法**（variance - covariance approach）估计投资组合的 VaR 时所假设的独立同分布的正态函数（即 *niid*）。
- 考察在不同时段上计算波动率时所用的$\sqrt{T}$法则的来源。
- 比较几种预测波动率的不同（参数）方法。我们主要关注的是**指数加权移动平均方法** EWMA 和 GARCH 模型，但是也对隐含波动率的应用进行了讨论。它们都是参数化的方差—协方差方法中所需要的一些变量。
- 考察估计投资组合 VaR 的**非参数方法**（non-parametric methods）。例如历史数据模拟方法以及它在重复取样中的扩展应用。我们比较这些非参数方法和方差—协方差方法之间的准确度。我们把这个过程称为事后检验。
- 演示如何应用蒙特卡罗模拟 MCS 来获得（非线性）头寸的 VaR，尤其是那些包含了期权头寸的 VaR。

- 分析各种传统的 VaR 方法，这些传统的方法包括**压力测试（stress testing）、最差情景分析（worse case scenario analysis）和极值理论（extreme value theory）**。

在预测投资组合的 VaR 时，要对输入变量进行衡量，这时要涉及一系列实际问题，本章我们将对其展开讨论。在参数化的方差—协方差方法和蒙特卡罗模拟方法中，主要的输入变量是对于方差和相关系数的预测值，我们还将分析几种预测方法，比如指数加权移动平均方法 EWMA 和 GRACH 模型。接下来我们讨论这些预测模型的精确度。后面一节主要讨论 MCS 方法，特别是关于包含期权的投资组合的 VaR 的计算，最后我们讨论其他计算 VaR 的方法，包括历史数据模拟方法（和重复取样方法），还有压力测试和一些“尾部估计方法”，比如最差情景分析和极值理论。

24.1　统计学基础

如果每日收益率都是 *niid* 的，即独立正态同分布的，那么整体的分布特点就可以用均值和标准差来表示。我们已经知道了这在用方差—协方差方法来计算投资组合的 VaR 中十分有用（前面的两章中有所介绍）。在这一部分中，我们分析如果对真实的资产收益率做出正态独立分布的假设，那么在进行估值时会产生多大的误差。

每日收益率是否是正态分布的?

人们发现汇率、长期债券价格和股票价格的每日变动（连续复利）都是近似（无条件满足）正态分布的，但是在下面几种情况下它们会偏离我们的正态假设：

- 当收益率的分布具有胖尾（比较大的峰值）、更高的峰值或是“细腰”分布而不是正态分布（即实际收益率是尖顶峰度的）时。
- 收益率是负偏斜的（即在左尾比在右尾存在更多的观察值）。
- 每日收益率之间存在少量的正相关（即今天的收益率可能对预测明天的收益率有所帮助）。
- 每日收益率的平方具有很强的自相关性（即在很长的一段时间时期内，波动的周期与市场相一致）。

因此，为了更加精确地对资产的收益建模，我们不能无条件地假设它们具有正态分布。为了描述偏离正态分布的程度，研究者一般应用两种方法。首先，假设每日收益率或者是服从无条件但是与时间无关的分布，或者是服从一个与时间相关的但是有条件的分布。无条件时间独立的分布包括标准正态、稳定的 Paretian 模型和混和跳跃模型。有条件的时间依赖型分布包括所谓的 ARCH 和 GARCH 模型。不管是有条件（时间依赖的）还是无条件的分布都可能会产生胖尾（除非是无条件的正态分布模型），由于 ARCH 和 GARCH 模型的应用比较广泛，因此我们下面主要介绍这两种模型。

对于正态性的大部分检验假设（总体）方差是不变的，并且数据之间不是自相关的，但是如果认为这些参数实际上并不是不变的，那么就很难正确解释经验结果。可以证明，货币市场短期利率的变化并不是正态分布的，原因可能是货币当局对市场做出的一些经常性调整。然而，对于大多数投机性的即期资产，假设它们的收益率是（有条件的）正态分布是比较合理的近似。对于更长时间（例如每年）的收益率可能这就不正确了。例如，Fama 和 French（1980）发现，股权的长期（例如 3 年至 5 年）收益率具有非常强的自相关性。

序列独立性和法则

我们已经注意到，如果给出一个每日波动率 σ 的预测值（我们省略了下标 t），那么我们就可以计算出在 T 时间内的波动率，表示为下式：

$$\sigma_T=\sqrt{T}\sigma \tag{24.1}$$

其中，σ 为每日收益率的标准差。注意在推导 $\sqrt{T}$ 法则的时候我们并没有关于正态要求的假设。下面，我们介绍如果价格（或者价格的自然对数）是随机游走的时候，怎样来应用 $\sqrt{T}$ 法则：

$$p_t=\mu+p_{t-1}+\sigma\varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim iid(0,1) \text{且 } p_t=\ln(P_t) \tag{24.2}$$

如果每日的（连续复利）收益率 R_t 序列不相关，我们有

$$R_t=\ln(P_t/P_{t-1})=(p_t-p_{t-1})=\mu+\sigma\varepsilon_t \tag{24.3}$$

通过对公式（24.2）进行反复的递推，我们得到：

$$p_1=\mu+p_0+\sigma\varepsilon_1$$

$$p_2=\mu+p_1+\sigma\varepsilon_2=\mu+(\mu+p_0+\sigma\varepsilon_1)+\sigma\varepsilon_2$$

因此

$$p_t=p_0+\mu t+\sigma(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_t)$$

从 0 到 t 这个时期内的收益率是

$$R_{0t}=\ln(P_t/P_0)=\mu t+\sigma\sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i \tag{24.4}$$

因此

$$ER_{0t}=\mu t \tag{24.5a}$$

以及：

$$\sigma_{0t}^2=\sigma^2 t \tag{24.5b}$$

$$\sigma_{0t}=\sqrt{t}\sigma \tag{24.6}$$

我们可以更方便地把最后一个公式写为 $\sigma_T=\sqrt{T}\sigma$，其中 T 是我们衡量波动率的时间段。这样的话，根据对于收益率 R_t 的 iid 假设，我们可以利用 $\sqrt{T}$ 法则，通过对每日收益率的估计值来计算（诸如）每周收益率（5 天）的波动率，$\sigma_5=\sqrt{5}\sigma$。另外，如果收益率是序列无关的，那么就意味着在连续的两天里出现 5％的超额 VaR 可能性的机会只有 0.25％，因此，“连续的坏运气”（比如说 5 天以上或是 10 天以上）出现的几率非常非常小。然而，如果没有这个不相关的假设，可能就不能得到这个结论。幸运的是，每日收益率的自相关性确实很小。当然，当每日收益率存在相关性的时候（即使相关性非常小），$\sqrt{T}$ 法则也只能近似成立，并且应用时的误差随着时间段

T 的增长而上升。（例如，当我们要衡量超过几年的投资组合的风险时，近似性可能较差，因为正如我们所知，时间段越长，自相关性表现得越强。）

24.2　参数估计

计算投资组合 VaR 的参数方法（最主要的是方差—协方差方法和 MCS 方法），要求我们知道关于预期收益率、（条件）方差和相关系数的估计值。在这一部分中，我们来分析一下各类预测方法的优点和缺点。

每日收益均值

如果 R_t（$t=1, 2, \cdots, n$）代表每日收益率，那么通过 n 个观测值计算出的平均收益率就是

$$\bar{R}=\frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n} \tag{24.7}$$

如果应用滚动窗口的方法（n 天）来衡量 $\bar{R}$，那么这个历史的平均收益率将随着时间的变化而变化。人们发现，即期汇率、股票还有债券的收益率大多以零为中心，并以很大的波动率在这个值上下波动（见图 24—1）。由于在预测实际的平均每日收益率时存在很大程度的不确定性，我们经常假设 $\bar{R}$ 对于所有的资产都是零，这也是我们在 RM 中所进行的假设（然而，下面的一些公式出于完整性而包含了 $\bar{R}$）。

在 RiskMetrics™中，平均每日收益 $\bar{R}$ 被假设为零。

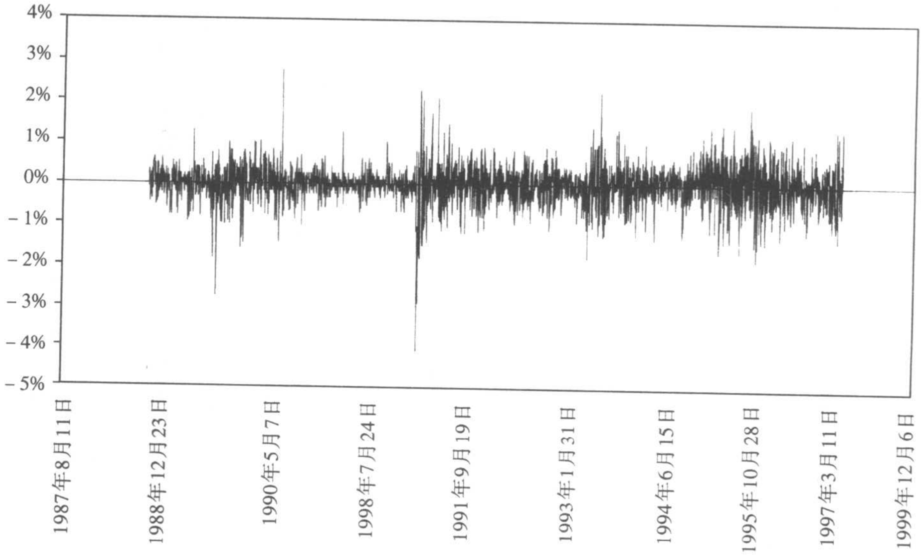


图 24—1　汇率的每日收益率（马克—英镑）

预测波动率

为了衡量投资组合的 VaR，我们要求在一个适当的时间段内（例如 1 天或 1 个月），预测收

益率的方差（或协方差）。如果“真实”的（无条件）方差是一个常数，那么问题就变得相对简单了。通过所有可供使用的数据计算出的（不变）的样本方差具有最好的预测性：

$$s^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(R_t - \bar{R})^2}{(n-1)} \tag{24.8}$$

然而，如果波动率是随着时间变化的，那么我们关于 s^2（不变）的简单数值就会传达错误的信息。事实上有很多种只利用过去信息来预测时变波动率的方法，包括：

- 以一个固定权重进行的移动平均法（即简单的移动平均法 SMA）或者是以几何级数衰减的指数为权重进行的移动平均（即指数加权移动平均法 EWMA）。
- 利用通过所观察到的期权价格得到的隐含波动率。
- 随机波动率模型（即 ARCH 和 GARCH 模型）。
- 极值方法（基于最高或是最低收益率的方法）。

移动平均：简单移动平均法和指数加权移动平均法

简单移动平均法（simple moving average SMA）衡量波动率时所应用的是在长度为 n 的时间内，对历史收益率平方采用等权重的加权平均值（见表 24—1）。另外，权重也可以是以几何级数下降的，我们把这种方法称为指数加权移动平均法 EWMA。表 24—2 列出了 SMA 和 EWMA 波动率的计算。

表 24—1　　可选择的波动率的预测方法

简单移动平均（SMA）	指数加权移动平均（EWMA）
$\sigma^2_{t+1\mid t} = (1/n)\sum_{j=1}^{n}(R_{t-j+1} - \bar{R}_t)^2$	$\sigma^2_{t+1\mid t} = (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}(R_{t-j+1} - \bar{R}_t)^2$

表 24—2　　波动率的计算（SMA 和 EWMA）

波动率预测（和“收益平方”）使用 252 天调整为年度数据									
初始波动率（sigma）				0.3（年度波动标准差的初始值）					
Lambda				0.94（EWMA 中的权重）					
每年的工作日数				252（使用年度化的日收益平方）					
观测	日期	汇率		σ^2	波动率				收益平方
	（1989 年）	马克/英镑	收益（%）		观测	日期			（%）
						（30 天）	（125 天）	（252 天）	
256	10 月 24 日	2.955	−0.084 6	0.005 869	0.076 612	0.077 209	0.060 422	0.054 128	0.000 18
257	10 月 25 日	2.9625	0.253 5	0.005 528	0.074 351	0.077 103	0.060 424	0.054 042	0.001 619
258	10 月 26 日	2.965	0.084 4	0.005 294	0.072 756	0.077 453	0.060 52	0.054 101	0.017 9
259	10 月 27 日	2.885	−2.735 2	0.004 987	0.070 616	0.773 47	0.060 491	0.054 108	18.853 1
260	10 月 30 日	2.9	0.518 6	0.015 999	0.126 488	0.110 53	0.071 807	0.060 442	0.677 7
261	10 月 31 日	2.905	0.172 3	0.015 446	0.124 282	0.110 923	0.072 106	0.060 644	0.074 8
262	11 月 1 日	2.907 5	0.086 0	0.014 564	0.120 682	0.110 934	0.072 113	0.060 585	0.018 6
263	11 月 2 日	2.892 5	−0.517 2	0.013 701	0.117 053	0.110 962	0.072 089	0.060 544	0.674 2
264	11 月 3 日	2.902 5	0.345 1	0.013 284	0.115 256	0.111 945	0.072 453	0.060 76	0.300 2
265	11 月 6 日	2.925	0.772 2	0.012 667	0.112 547	0.112 391	0.072 61	0.060 728	1.502 7
266	11 月 7 日	2.915	−0.342 5	0.012 809	0.113 175	0.114 379	0.073 433	0.061 134	0.2956
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

每个波动率的估计值都是利用过去的 n 组 R_{t-j}^2 进行计算得到的，但是 EWMA 对比较近的观测值赋予了相对更大的权重。参数 λ 通常被称为**衰减因子**（decay factor），其中 $0<\lambda<1$，（如果 $\lambda=0.94$，那么权重 λ^{j-1} 就是下面这样的序列：1，0.94，0.88，0.83 等）。EWMA 方法与等权重的方法相比有以下两个优点：

- EWMA 的预测对于波动率最近的变化更加敏感，因为这种方法对最近的数据赋予了更大的权重。
- 在发生一次“振动”（即一次波动率的突然上升）后，EWMA 预测的下降是渐进的，而简单的移动平均的变化则是急剧的，而且是在一个时间段之后（当这个“振动”不在 n 组历史数据观测值的样本之内时），参见图 24—2。

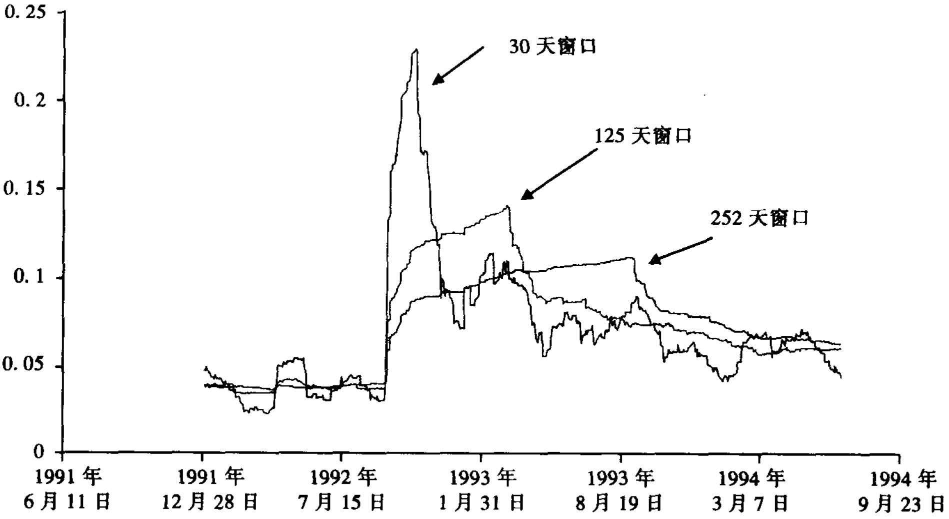


图 24—2（a） SMA 波动率（马克—英镑）

由于这些原因，我们主要研究 EWMA 方法对于每日波动率的预测。EWMA 的公式可以写成

$$\sigma_{t+1}^2=\sum_{j=1}^{n}w_j(R_{t-j+1}-\bar{R}_t)^2 \qquad \text{其中} \quad \text{权重 } w_j=(1-\lambda)\lambda^{j-1} \tag{24.9}$$

其中，权重具有以下性质：

- 长期来说（即 n 趋近于无穷），权重之和等于 1：

$$(1-\lambda)\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}=(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2+\cdots)=(1-\lambda)/(1-\lambda)=1 \tag{24.10}$$

- 对于 λ 接近于 1 时，σ_t 随着时间的变化非常缓慢，然而，当 λ 比 1 小很多的时候，σ_t 对时间变化的反应非常剧烈。
- 对于有限的 n，如果权重相加为 1，则我们必须设定 $w_j=[(1-\lambda)/(1-\lambda^n)]\lambda^{j-1}$。
- 如果我们假设 n 等于正无穷，那么 EWMA 公式即公式（24.9）可以改写成递推的形式（参见附录 24.1）：

$$\sigma_{t+1}^2=\lambda\sigma_t^2+(1-\lambda)(R_t-\bar{R})^2 \tag{24.11}$$

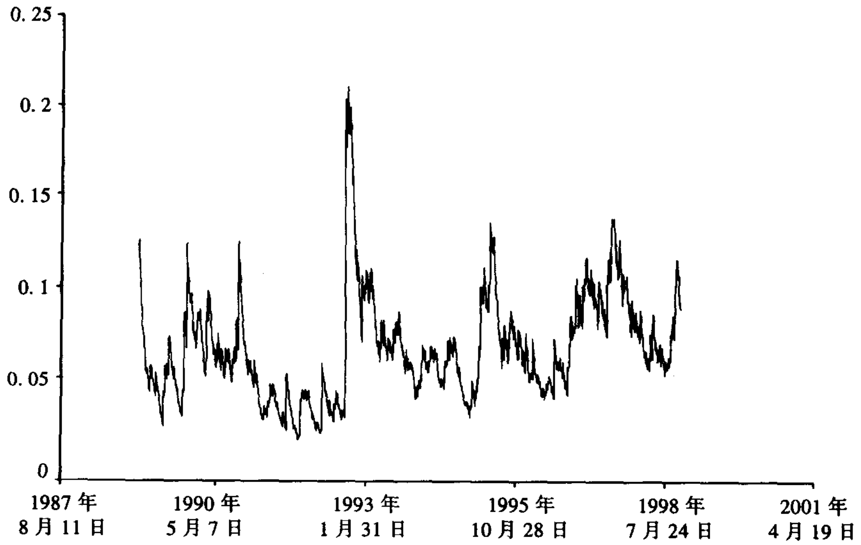


图 24—2（b） EWMA 波动率（马克—英镑）

上面的公式在计算时是非常有用的，因为它可以用于递推估计所有 σ_{t+1}^2 的未来值。给定一个初始的值 σ_0^2，我们就可以“更新”所有的 σ 值，也就是说 σ_1，σ_2…。并且每个时期所需要的新的信息只有 $(R_t-\bar{R})^2$。在 t 时刻预测 σ_{t+1} 仅仅需要知道已经计算出的 σ_t 以及现在 $(R_t-\bar{R})^2$ 的值，注意这是两个数据点（而不是公式（24.9）中的数据点的无限和）。在 RiskMetrics 中，我们假设零平均收益率并且将波动率的预测值更精确地记为 $\sigma_{t+1|t}$，因此

$$\sigma_{t+1|t}^2=\lambda\sigma_{t|t-1}^2+(1-\lambda)R_t^2 \tag{24.12}$$

符号 $\sigma_{t+1|t}$ 表示的是在 t 时刻（或者更早）的信息是已知的情况下对 $t+1$ 时刻的方差做出的预测。如果我们知道 λ 的值并且准备预测 $\sigma_{75/74}^2$，那么在第 74 天，我们已经计算出 $\sigma_{t74/73}^2$（递推的方法）以及 R_{74}^2。因此，现在 $\sigma_{t75/74}^2$ 可以直接由公式（24.12）得出。注意在第 75 天结束的时候，我们对 R_{75}^2 有新的观测值，因此可以把递推预测向前滚动一天。用上面的公式来计算波动率的过程见表 24—2（Excel 表格），并且结果用图 24—2 给出。注意 SMA（使用大于 125 天的历史数据）有一个长期的稳定值，以及对于 EWMA 模型，当波动率高（或低）的时候倾向于维持一段时间的高（或低）水平。这模拟了实际观察的市场收益率数据的趋势性，我们把它称为波动率的持续性（这种持续性也可以在图 24—1 中“簇”的形状看出）

我们对于波动率估计的准确度怎样

我们对波动率估计值准确度的衡量取决于我们所做出的分布函数的假设，以及如何来解释“精确度”的概念。如果我们愿意假设总体方差是恒定的，并且收益率具有正态分布，那么我们就可以应用统计学中的标准结果。例如，我们可以有 95%的把握得到真实的（总体）标准差 σ 位于下面这个区间中：

$$s\sqrt{(n-1)/x_{0.975}^2}<\sigma<s\sqrt{(n-1)/x_{0.025}^2} \tag{24.13}$$

其中，σ^2 为总体方差，s^2 为样本方差，n 为计算 s 时所用的观测值的个数，另外 $x_{0.975}^2$ 和 $x_{0.025}^2$

是卡方 chi-squared 分布中所得到的临界值，我们关于 5%VaR 的左尾估计值是 $V_0 1.65\sigma$，因此，对于 VaR 的 95%的置信区间就是公式（24.13）中所给出的值再乘以“$V_0 1.65$”。如果收益率是 *niid*，那么上面的结论就是一个非常有用的概括统计，很明显，这个结论受到很大的限制，（然而，如果没有正态性的假设，我们也可以得到置信区间）。在很多例子中，通常我们对样本内的数据表现并不感兴趣，而是更关注样本外数据对预测波动率的作用，下面我们就讨论这方面的问题。

每月波动率：$\sqrt{T}$法则

在 RM 中，对于时间段长于 1 天的波动率的预测可以通过$\sqrt{T}$法则得到（即假设收益率是独立同分布的）。给出对第 $t+1$ 日波动率的预测值，即 $\sigma_{t+1|t}$，那么每月波动率的预测值（25 个交易日）将会是

$$\sigma_{t+25|t} = 5\sigma_{t+1|t} \tag{24.14}$$

然而，准确地说，这里有一点与$\sqrt{T}$法则不一致，在$\sqrt{T}$法则中，我们假设波动率不变，但是在我们进行预测的时候，却假设方差是随时间变化的。另外，我们只能在一个合理的短期期限内来应用$\sqrt{T}$法则，因为随着时间段的增大，$\sqrt{T}$法则的误差增加（因为在比较长的时间段内是均值回归的）。最后，注意到，如果存在制度的变化（例如由自由浮动的汇率制度变化为受管制的汇率制度，如同在 1980 年到 1990 年期间欧洲汇率机制 ERM 所发生的情况），那么基于历史数据的预测就是不准确的。

衰减因子和切断滞后

为了利用 EWMA 的递推公式，即公式（24.12），我们需要（1）对于衰减因子 λ 的度量，另外因为公式仅当 $n=+\infty$时才成立，我们还需要（2）选择一个合适的天数 n（即切断滞后），这样我们才能得到一个比较好的近似。对于每日收益率的数据，波动率关于时间的变化是非常缓慢的。因此我们期望得到的关于 λ 最好的估计值是非常接近 1 的。在 RM 中，我们选择的 λ 要使关于预测的 $\sigma_{t+1|t}$和收益率 $R_{t+1}{}^2$ 之间的根均方误差（RMSE）最小：

$$\text{预测误差 } \varepsilon_{t+1} = R_{t+1}^2 - \sigma_{t+1|t}^2 \tag{24.15}$$

$$\text{RMSE} = \left[\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\varepsilon_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{24.16}$$

预测的时间段 L 是由试验者进行选择的，在 RiskMetrics 中，这个时间段一般是 4 个月。为了避免对每个收益率序列使用不同的 λ 值，RiskMetrics 中选择了一个单独的 λ 值，它使得在所有的资产类别中 RMSE 最小。目前流行的 RiskMetrics 中衰减因子 λ 的最优值是：

> 每日波动率：最优 λ 值$=0.94$
>
> 每月波动率：最优 λ 值$=0.97$

当应用 EWMA 公式来预测 $\sigma_{t+1|t}$时，我们需要选择一点，并从它开始以 $\sigma_0{}^2$ 进行递推。如果我们在一列很长的数据开始时（即 $t=0$）进行递推，那么我们在 $t\gg 0$ 时的预测就与所选定的 $\sigma_0{}^2$ 的初始值是独立的。但是这要求在计算机中对每种资产都储存了大量的数据，因此 RiskMetrics

采用了一种略微有所区别的过程，它接近这个开始的“零”点。如果我们在应用递推的 EWMA 公式即公式（24.9）的时候，忽略了从今天（$=t$）起 k 天前的数据，那么合计的误差就由下式给出：

$$\Omega(k,\infty) = (1-\lambda)\sum_{t=k}^{\infty}\lambda^{t} = (1-\lambda)\lambda^{k}(1+\lambda+\lambda^{2}+\cdots) = \lambda^{k} \tag{24.17}$$

注意到上面的求和是从 k 开始直至无穷，如果我们设定 $\Omega=0.01$（即 1%的容忍度），那么给定 λ，我们可以计算出 $k=\ln(0.01)/\ln(\lambda)$。因此，对于 $\lambda=0.94$，1%的容忍度就暗示着在 EWMA 公式中求和所用到的有效天数是 $k=74$ 天。因此，如果我们处于 t 时刻，我们用 $\sigma_0^2=(1/k)\sum_{i=1}^{k-1}R_{t-i}^2$ 开始递推，其中 $k=74$ 天。

EWMA：相关系数

EWMA 对相关系数的预测是通过对方差和协方差的预测得出的。EWMA 对协方差的预测是

$$\sigma_{xy,t+1|t} = \sum_{j=1}^{\infty} w_j X_{t-j+1} Y_{t-j+1} \tag{24.18}$$

其中，$w_j=(1-\lambda)\lambda^{j-1}$，$X=$资产 x 的收益率，$Y=$资产 y 的收益率。

这就引出了下面的递推公式：

$$\sigma_{xy,t+1|t}=\lambda\sigma_{xy,t|t-1}+(1-\lambda)X_tY_t \tag{24.19}$$

因此，对于**相关系数**（correlation coefficient）的预测就可以通过下面的公式进行计算：

$$\rho_{xy,t+1|t}=\frac{\sigma_{xy,t+1|t}}{(\sigma_{xy,t+1|t})(\sigma_{y,t+1|t})} \tag{24.20}$$

可以再利用$\sqrt{T}$法则来对 T 天内的协方差进行预测，因此对于 $T=25$ 天，我们得到

$$\sigma_{xy,25}\sqrt{25}\sigma_{xy,t+1|t} \tag{24.21}$$

然而，利用公式（24.20），可以得到 T 天内的相关系数 $\rho_{tT|t}$与 1 天的预测相同，即 $\rho_{t+T|t}=\rho_{t+1|t}$。我们现在转向利用隐含波动率和 GRACH 模型预测波动率等其他方法。

隐含波动率

给出了所观测到的期权的价格和一个恰当的期权定价公式（例如 Black - Scholes 公式），我们将这个公式反过来，就可以解出惟一的未知数——波动率。我们把这个结果称为期权的隐含波动率，并且可以用它来对下一天的波动率进行预测，这可以替代上面提到的 EWMA 公式中的方法。因此，对于 3 个月到期执行价格为 $K=100$ 的 IBM 股票的期权，我们得到的隐含波动率可以对 IBM 股票的每日收益率的波动率提供一个很好的预测，而且这个结果要优于用 EWMA 方法得出的结果。然而，在 RiskMetrics 中应用隐含波动率的方法也存在一些问题：

- 必须假设 Black - Scholes（或等价的）公式是正确的。
- Black - Scholes 公式中假设在期权的有效期内方差不变，但是 RiskMetrics 中的隐含方差却是每天都变化的。这就产生了不一致的情况（但是在实际中我们经常忽略这一点）。
- 如果 Black - Scholes 公式正确，那么对于一个特定的期权来说，它的隐含波动率（在 t 时刻计算）应该是不变的，不受执行价格和距到期日时间的影响。在实际中，这些隐含波动率却是随着期权的执行价格的不同（“波动率的微笑”）和距到期日时间的不同（波动

率的期限结构）而不同，尤其是对于那些处于实值或是虚值状态的期权来说，这种情况更加明显。因此我们就遇到了在 VaR 的计算中怎样选择恰当波动率的问题。

- 不可得到 RiskMetrics 中所要求的所有的标的资产的隐含波动率，因为对于很多资产来说，并不存在一个流动性足够好的期权市场。

正是由于上面所提到的原因，RiskMetrics 并不用隐含波动率来计算 VaR。究竟哪种预测方法更好？是 ARCH 和 GARCH 模型或是利用隐含波动率或是基于历史数据的移动平均法？这个问题目前还没有一个明确的结论（参见 Xu 和 Taylor，1995，1997）。

GRACH 模型

我们现在重点来研究一类“条件异方差”模型，我们称之为 GARCH 模型，它是一般自回归条件异方差模型系列中的一种。假设资产的收益率 R_t（条件）正态分布，并且均值为零：

$$R_t=\varepsilon_t\sigma_t \qquad \varepsilon_t\sim niid(0,1) \tag{24.22}$$

随机因素由 ε_t 给出，并且 R_t 的条件方差是

$$\mathrm{Var}(R_t)=\sigma_t^2 \tag{24.23}$$

由于我们假设 $\mathrm{Var}(\varepsilon_t)=1$。公式(24.23)告诉我们收益率的方差是随着时间变化的$(=\sigma_t{}^2)$。GARCH 模型假设波动率是自相关的（即下一天的方差依赖于今天的方差）：

$$\sigma_{t+1}^2=\alpha_0+\alpha_1\sigma_t^2+\alpha_2R_t^2 \tag{24.24}$$

如果 $\alpha_1+\alpha_2$ 趋近于 1，那么方差就是持续稳定的，也就是说高（或低）方差或者是方差震动的时期经常是伴随着更长的高（或低）方差时期。GARCH 模型原则上不要求对收益率分布的特定假设，因此非常灵活。例如，对于英镑—美元的汇率收益率的 GARCH 公式可以表示为

$$\sigma_{t+1}^2=0.01+0.08R_t^2+0.88\sigma_t^2 \tag{24.25}$$

方差的持续稳定性可以通过 $\alpha_1\alpha_2=0.96$ 看出，这个结果已经非常接近于 1。作为对比，对于这个波动率序列，RiskMetrics 的 EWMA 估计结果是

$$\sigma_t^2=(1-0.94)R_t^2+0.94\sigma_{t-1}^2 \tag{24.26}$$

在实际的预测中，这两个模型的变动趋势是紧密相连的（实际上 EWMA 模型是 GARCH 模型的一种“综合”形式，因为它的系数之和恰好为 1)。在实际中，如果时间比较短（例如 20 天以下），GARCH 模型的预测效果要稍微优于 EWMA 的预测效果，但是它们之间的区别往往并不明显（参见 West 和 Cho，1995；Heyner 和 Kat，1994；Xu 和 Taylor，1997；Engle，1995)。如果从风险估值和风险管理的角度考虑，GARCH 模型相对比较复杂，我们更倾向于使用简单的 EWMA 模型。但是随着计算技术的提高，GARCH 模型也可能获得更广泛的应用，用来对一些资产的收益率进行预测，尤其是那些我们认为条件波动率是胖尾或是有偏的分布。（后者可以通过基于 t 分布的 GARCH 模型或是 EGARCH 模型解决，参见 Cuthbertson，1996，其中对 GARCH 模型的用法进行了概括总结。）

24.3　投资组合 VaR 的非参数估计

上面估计方差和相关系数的方法中都假设了一个特定的关于收益率的波动率参数模型（例如

EWMA，ARCH 和 GARCH 模型），当应用“delta 方法”来计算投资组合的 VaR 时，通常使用正态性的假设。如果收益率实际上是非正态分布的，就会出现有偏估计/预测。如果我们不想对于收益率的分布假设一个特定的分布函数，我们可以利用非参数估计方法来对 VaR 进行估计，一种流行的方法是利用历史数据进行模拟。对于一个 n 种资产的投资组合，在 t 时刻，实际的每日收益（损失）可以用 $\Delta V_{p,t}$来表示：

$$\Delta V_{p,t}\ 美元 = \sum_{i=1}^{n} V_i R_{it} \tag{24.27}$$

其中，V_i 为对投资者现在所持有的第 i 种资产的固定价值，R_{it}为第 i 种资产的每日收益率的（成比例的）历史数据。

历史数据模拟方法（historic simulation method）采用了 n 种资产的收益率，并且以（比如每1 000天的）历史数据来计算投资组合的价值的变化，假设投资组合的金额 V_i 保持不变。然后我们将这1 000个 $\Delta V_{p,t}$的价值按照从低到高的顺序进行排列。我们利用在这个序列中排在“较小收益”尾部 1%的 $\Delta V_{p,t}$的价值来对下一天的 VaR 进行估计（置信水平是 99%）。我们也可以做出 $\Delta V_{p,t}$的直方图，因此来衡量偏度和峰度。（后一种方法可以帮助我们解决任何偏离正态假设的问题。）

历史数据模拟的方法是一种**非参数方法**（non-parametric），因为我们不必对方差和协方差（n 种资产之间的协方差）做出精确的估计，它们都包含在资产的历史收益率中，因此也体现在所估计的投资组合的 VaR 中。这样就不存在模型风险和参数估计风险。历史数据的任何胖尾和自相关（因为估值是按照序列顺序开始的：第 1 天、第 2 天等）都反映在投资组合的 VaR 中。由于我们创建了一个经验数据的直方图，我们不必进行正态性的假设以获得尾部的临界点。这种方法也可以用于估计一个非线性头寸的 VaR，或者是通过利用“delta 近似”（将 R_i 的历史数据作为标的资产的输入变量），或者是为了有更好的效果，如果期权价格的历史数据是可用的，我们可以通过它们来对期权投资组合进行再次估值。也可以基于历史数据模拟的方法来衡量投资组合 VaR 估计值的精确程度（例如利用 Butler 和 Schachter1996 年提到的历史核心方法）。

历史数据模拟方法的一个缺点是，如果要想用这个方法在估计 VaR 时得到一个精确的百分位点，就要求具有很长时间内较为精确的数据。因为尾部所发生的这些事件是“不寻常”的，因此我们需要大量的数据来使这个对尾部的估计可靠。例如，如果我们只对最后的 1%的数据感兴趣，那么在我们的历史数据中，或许在1 000个观测值中才会出现一次。另一方面，历史数据所采用的时间越长，更多过去的数据可能会对我们关于 VaR 的预测产生影响，而比较近的数据的影响就相对较小。Butler 和 Schachter 在 1996 年提到了在历史数据模拟方法中可能出现很大的关于 VaR 的标准差（从 6%到 20%）。也可能存在灵活性的欠缺。例如，我们不能简单地回答这样一个问题：如果一种资产的实际波动率比历史数据的观测值上升 10%，我们所估计的 VaR 是怎样变化的？然而，人们发现在一些情况下，非参数估计的方法（比如利用1 000天的数据）要比参数方法（比如 EWMA 方法）更加准确。例如，Mahoney（1996）利用了一个股票和外汇的投资组合进行非参数估计方法的预测（预测 1 天之后），发现结果产生的投资组合的 VaR 值非常接近于 1%甚至 0.1%的尾部概率（相比之下，EWMA 和 GARCH 这些参数模型往往低估预测值落入 5%的置信水平以下的“极端尾部”的数量）。

但是历史数据模拟方法存在一个明显的缺点，就是结果是完全依赖于我们所选择的历史数据

的集合。但是我们所选择的数据集合中可能包括了一些“不寻常的事件”，这些事件可能是在近期内不会再发生的（例如 1992 年英镑退出 ERM，以及 1997 年到 1998 年的亚洲金融危机），这些都可能对我们所预测时期的 VaR 估计值造成偏差。事实上，如果我们使用一系列比如说1 000天的历史数据进行移动平均，那么这种影响将会持续出现在对 VaR 1 000天的预测之中（除非当我们对投资组合的 VaR 进行估计时，可以对收益率的历史数据选择使用递减的权重）。当然，在所有利用历史数据来预测未来的方法中，都会或多或少地存在类似的问题，包括我们通常使用的方差一协方差 VaR 方法（下面介绍的蒙特卡罗模拟方法也会出现这个问题）。正如我们将会看到的，压力测试是理论上惟一可以避免对历史数据的依赖性的方法（虽然它本身也有一些严重的局限性）。

一个“纯粹”的历史数据模拟方法的衍生方法就是**重复取样技术**（bootstrapping technique）。正如上面所介绍的，历史数据模拟方法必须得到一个历史数据的集合，上面的1 000天的观测值仅仅是我们举的一个例子，它可以用以获得投资组合的 VaR。数据“抽出”以后，不再放回样本，而且抽取是按照时间顺序进行排列的：第 1 天、第 2 天等（因此它保留了实际的收益率数据的序列相关性）。但是在重复取样的方法中，$T=1\,000$个收益率的数据（对于 n 种资产）是按照随机可替代的方法以等概率抽取出来的。

我们可以将某一个特定日期的 n 种资产的一组收益率看做是记在一个单独的表格上的一列 n 维向量 R。那么每天的历史数据都分别给每份表格提供了 n 组数据，可以将每个表格从 1 到1 000标上序号，根据历史数据所涉及的1 000天来进行编号。然后我们就可以在相同分布的1 000个数中，按照随机并且可放回的方法抽取 m 个数字（$m>n$）。例如，如果抽取的这些相同分布的随机数字分别是 {27，700，1，990，700，43，1，…，999}，那么我们可以选择 27，700，1，990，700，43，1，…，999 这些表格来记录资产的收益率 R^k，其中 $k=27$，700，1，990，700，43，1，…，999。这样就会总共给出 m 个向量，每一个都包括了 n 种资产的收益率，然后我们可以应用公式（24.27）来对“m 天”的投资组合再估值，并且可以画出它们的直方图，并计算出 1%分位点的 VaR。因此我们可以通过任意多次的重复，对这 n 种资产的1 000个收益率进行复制（在上面的这个例子中，我们总共进行了 $m>n$ 次）。这样就减轻了在历史数据模拟方法中的“数据缺乏”问题，因此从理论上来说，我们可以更加精确地估计投资组合的 VaR（即使实际上并不常常如此，参见 Butler 和 Schachter，1996）。

重复取样技术的优点与历史数据模拟方法是类似的。然而，它也具有相同的缺陷，就是最初选择的 $T=1\,000$组历史观测值仍然对未来所发生的事情缺乏代表性。另外如果需要更大规模的模拟数据集合，就需要付出更高的成本。由于重复取样方法（在1 000组历史数据中）随机挑选每一组收益率，模拟的收益率就不会出现序列的相关性，而这种相关性在历史收益率中确实存在（即重复取样技术隐含的假设就是收益率独立于时间）。

随着监管者允许金融机构选择它们自己的“内部模型”，因此历史数据模拟法就获得了很广泛的使用，因为虽然对原始数据的要求要比参数估计 VaR 的方法多，但是计算上的负担却减轻了许多。然而，对于 RiskMetrics 的参数估计 VaR 方法而言，非参数方法更大程度上是一个互补的方法而不是替代的方法，因为 RiskMetrics 的灵活性更强，而且使用起来更简单。

24.4 预测值的检验

事后检验和尾部概率

事后检验提供了一系列的方法来检查我们对波动率预测的准确性。例如，我们可以将我们所预测的投资组合的 VaR 与真实的收益损失比（P/L）进行比较。这个收益损失比是根据一个特定的有代表性的投资组合在一个时期内的历史数据所得出的。假设我们构造了一个由 200 种资产组成的等权重的投资组合，其中包括外汇、货币市场工具、债券、股票和实物商品。那么这个投资组合方差的预测值和预期收益率可以由下面一般性的公式给出：

$$ER_{p,t+1} = \sum_{i=1}^{200} w_i ER_{i,t+1} = 0 \qquad (\text{注意,在 RiskMetrics 方法下 } ER_p = 0) \tag{24.28}$$

$$\sigma^2_{p,t+1|t} = \sum_{i=1}^{200} w_i^2 \sigma^2_{i,t} + \sum_{i \neq j}\sum w_i w_j \rho_{ij,t} \sigma_{i,t} \sigma_{j,t} \tag{24.29}$$

其中，$w_i = 1/200$，σ_i 和 ρ_{ij} 为 EWMA 方法提前 1 天的预测值。注意到在整个预测过程中权重 w_i 是一个固定的值，然后我们就可以计算出预测误差区间，比如说对1 000天的数据来说就是$\pm 1.65\sigma_p$。而实际上每天的 P/L 的百分比数值取决于这1 000天的实际收益率。因此我们的 VaR 方法是否成功就依赖于以下几个方面：

- 有多少损失超过$-1.65\sigma_p$，有多少收益超过$+1.65\sigma_p$。我们预期实际 P/L 值中在每个尾部都有 5%（即 20 个中存在 1 个）。
- 在分布的尾部的实际损失有多大，它们应该与利用正态分布得出的结果相符合。

为了更加精确起见，我们分析一下标准化的收益率 $q_{p,t}$：

$$q_{p,t} = R_{p,t+1}/\sigma_{p,t+1} \qquad q_{p,t} \sim N(0,1) \tag{24.30}$$

由于我们假设以 $\sigma_{p,t+1}$ 的预测为条件的收益率是正态分布的，一般地讲，RiskMetrics 对于投资组合（期权除外）的 VaR 在 5%的分位点上给出了一个合理的并且具有代表性的尾部概率。这样的话，实际的 P/L 值中，在尾部的数目大约是 5%左右（在 RiskMetrics 中，实际上是 5.74%，1996，第 220 页），并且它们的值也大约正确，但是 RiskMetrics 略微低估了真实损失的平均值。（在 5%的尾部中实际发生损失的平均值是-2.63%，但是在 RiskMetrics 估计中，损失的平均规模是-1.74，参见 RiskMetrics，1996。）

我们进一步使用上面的方法，来检查对于每种资产用 EWMA 方法对方差进行的预测。在 RiskMetrics 中，我们假设标准化的收益 $q_{p,t}$对每种特定的资产（比如股票和债券收益）来说都是条件正态分布的，满足分布 N（0，1）。因此，$q_{p,t}$平均值应该为零，方差为 1。我们可以采用过去的1 000个历史数据，计算向前 1 天的对 $\sigma_{i,t}$的预测值，（利用 $\lambda = 0.94$ 以及 74 天的数据）并且还要注意到，是否每一天实际的超额收益率都小于$-1.65\sigma_{i,t}$（对于 5%的分位点，或是对于 1%的分位点来说是$-2.23\sigma_{i,t}$）。如果正态性的假设是正确的，那么我们期待实际收益率小于预期收益率的次数分别是 5%和 1%。

一个由即期的外汇和股票组成的样本，包含几个新兴的市场上 15 个时间序列（参见 J. P. 摩

根，1996，第 242 页，表 B.3)，对于 1%和 5%的分位点，两种情况下实际的平均收益率都要高出 VaR 预测值 2%左右。而理想的模型应该得出的结论分别是 1%和 5%。因此，EWMA 的预测对于最后的 5%高估了风险，而对于最后的 1%低估了风险。在 1%的分位点处所产生的对风险的低估，可以通过对标的资产的收益率假设，对更加复杂的分布函数予以修正（例如假设具有比正态分布更加胖尾的混和正态分布或是条件误差分布），但是这样做的结果是计算成本的上升（参见 J. P. 摩根，1996，附录 B)。另外一些可选择的方法就是历史数据模拟方法和极值理论 EVT（参见下文），这些方法在预测 5%以下的概率时可能效果更好一些，但是这些方法要求大量的数据。

事后检验和巴塞尔

监管者会使用事后检验来检验 VaR 模型的精确度。如果发现 VaR 的模型不精确，监管者就可以增加准备金的要求，并且开始对其风险管理程序的调查。巴塞尔的事后检验过程在不同的国家之间是不同的，但是，举个例子来说，这个方法可能应用 1%的分位点作为临界点并用来对每天 VaR 的预测和实际的损益结果进行比较（对于所持有的固定的投资组合）。在每个季度，监管者都来计算实际的每日的损益超过左尾的 1%的数目以及 VaR 的预测值（即“例外”）。那些可能引起监管者干涉的预测边界可能是基于一个 250 天的预测值的样本，它们构成事后检验的期限。然后这些预测的误差可以与下面这些区域联系起来，它们可能会引起监管者的如下反应：

- 绿色区域：在每 250 个观测值中有 4 个例外的情况，这时不会有监管的干涉。
- 黄色区域：在每 250 个观测值中有 9 个例外的情况。监管者可能会进行干涉，主要涉及增大巴塞尔资本充足度乘数。
- 红色区域：在每 250 个观测值中有 10 个或者更多的例外的情况。巴塞尔乘数将会自动上升 1，并且监管者要开始进行调查。

预测机制：最终的判断

综上所述，通过对股票、外汇和固定收益债券（不包括期权）所组成的投资组合的经验数据的考察，我们得到如下的一些结论：

- 通过长期的数据来计算波动率和相关系数所得到的关于 VaR 的结果要比通过短期数据进行的计算更加准确。
- EWMA 和 GARCH 模型对每日波动率的预测要比简单的移动平均法预测得更加准确，另外，在比较短的期限内，对于某种特定的资产，GARCH 模型可能比 EWMA 模型具有更大的优势。这些都是参数方法。
- 对于左尾处 10%和 5%的区间，参数和非参数的预测方法在尾部概率的预测表现很相似。例如，对于在左尾 10%的临界点 100 万美元的 VaR 估计值，的确只产生了实际上 10%的已发生的损失，这些损失要比 100 万美元大，无论用何种预测方法都会得出这样的结论。
- 对于 2%以下的临界点，VaR 的参数估计方法实际上低估了实际的损失。例如，如果参数方法所计算的 1%的 VaR 是 200 万美元，实际损失超过这个数目的不止会有 1%（大约

1.2%～1.9%，Jackson 等，1996）

- 通过上面的证明，我们可以看出，要获得尾部的这些概率事件可以通过非参数估计方法（例如历史数据模拟）、极值理论或者是压力测试的方法。

24.5　蒙特卡罗模拟

蒙特卡罗模拟（MCS）方法是一种非常灵活的参数方法，通过这一方法我们能够得到投资组合收益率的完全分布函数，因此可以在任何一个分位点上很快得出 VaR。在计算包括不同期权的投资组合头寸的 VaR 的时候，该方法显得十分有用，此时组合是标的资产收益变化的非线性函数。这是一个参数方法，因为我们对于标的资产的收益率（例如股票、债券、利率和即期外汇的收益率）假定一个特定的分布函数，因此我们要对这些收益率之间的方差和相关系数进行估计，并将它作为 MCS 的输入变量。然而，我们不必假设分布是多元正态的（虽然实际上我们经常做出这种假设），例如，我们可以选择通过一个胖尾的分布（例如 t 分布）或是一个左偏的分布（例如跳跃扩散过程）来产生标的资产的收益率。然而，要注意的是，即使标的资产的收益率满足多元正态分布，这个期权组合价值变化的分布一般来说也不是多元正态的，因为在标的资产的价格和期权价格之间存在着非线性的关系（如在 Black - Scholes 公式中）。在用于期权的 MCS 方法中，我们可以选择如何计算期权组合价值的变化，可以选择的方法有完全定价方法（比如 Black - Scholes 公式），或是 delta，或是 delta+gamma 近似方法，或是其他一些计算期权价格的方法（例如有限差分的方法）。当然，利用线性方法或是 delta 方法来衡量 VaR 可能是不准确的，尤其是当投资组合中包括一个即将到期的期权时，因为实际上它们具有非线性收益。

压力测试（下面将会介绍）和 MCS 方法具有相同的特点，实际上，压力测试更像一个“一次性”的或者是“有限次”的蒙特卡罗模拟，分析者自主决定标的资产收益率的路径，而不是由历史数据（的平均值）来决定。通常情况下，我们在压力测试中会对标的资产假设一个极值（例如当持有一个货币期权的时候假设汇率会有大幅的下跌），然后我们就针对这些假设的极值来计算期权组合的价值变化。当然这种方法最多也只能提供极少数的几种极端情景，在某种意义上，蒙特卡罗模拟在这点进行了极大改进，它对标的资产收益率的可能出现结果提供了一个完全的序列（例如即期外汇的价值和债券价格），这可以用来对由货币和债券期权组成的投资组合的价值进行重新估值。下面，我们介绍如何使用蒙特卡罗模拟方法来对单一期权的 VaR 进行估计，然后我们将考虑一个包含有期权和其他资产的投资组合的 VaR。

单一资产：看涨期权多头

假设持有一个股票的看涨期权，其中 $S_0=100$，$K=100$，$r=0.05$，$\sigma=0.4$，并且距到期日的时间 $T-t=1$ 年。我们可以利用 Black - Scholes 公式来计算这个看涨期权最初的价值是 17.90。那么在 10 天的时间段上这个看涨期权的 VaR 是多少呢？我们利用蒙特卡罗模拟的方法来模拟这 10 天里的股票的价格，假设它服从几何布朗运动 GBM，并且没有漂移（参见表 24—3）。注意，当计算 VaR 时，我们使用了真实的漂移率（例如对于这只股票来说 $\mu=0.10$），并不是使用风险

中性的漂移率，因为我们并不是试图对股权的价值进行估计，而是考虑它的价值的变化。

表 24—3　　VaR——对于看涨期权利用 Black - Scholes 公式进行蒙特卡罗模拟

这张表格仅仅对标的资产的价格和看涨期权的期权价格进行了 12 轮记录。

设定参数：

Δt	0.002 7（1/365 的近似值）
S (0)	100（标的资产的即期价格。对于 FX 可以认为是用美元表示的每单位外币的即期利率，用 100 来进行衡量。）
K	100
r	0.05
时间段	10
σ	0.4
μ	0.1（当计算 VaR 时使用标的资产的实际漂移率。）
年	365（天）

时期 T		“标的”价格的各轮记录												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
0	1	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	…
1	0.997 3	99.364 4	101.108 6	100.802 1	102.758 4	101.813 4	103.111 1	98.636 4	100.942 3	97.045 9	96.559 7	100.856 2	101.190 2	…
2	0.994 5	98.876 1	101.569 0	96.940 5	105.483 0	105.507 5	105.421 4	96.390 4	102.539 9	97.318 9	98.309 1	98.691 8	103.186 3	…
3	0.991 8	100.463 7	98.729 2	94.940 9	105.993 7	99.026 9	107.971 6	94.745 9	101.411 0	98.635 2	95.199 6	99.011 6	103.922 0	…
4	0.989 0	101.817 8	100.578 4	94.496 8	107.418 8	99.727 0	106.394 8	93.404 2	99.138 0	98.427 9	95.837 1	103.561 3	101.200	…
5	0.986 3	99.563 5	102.107 6	95.203 2	104.997 9	99.580 1	103.100 0	95.775 3	103.108 8	95.986 3	98.048 3	101.296 9	102.333 1	…
6	0.983 6	100.090 0	105.290 4	93.648 9	102.447 7	97.128 1	102.337 6	99.036 2	101.011 6	95.265 7	92.195 62	103.033 2	102.612 6	…
7	0.980 8	98.625 5	106.108 7	92.705 8	101.723 9	94.431 8	100.199 4	96.938 3	100.246 2	95.317 2	93.423 3	102.776 4	102.994 1	…
8	0.978 1	92.103 7	109.015 4	94.183 5	104.602 6	98.024 9	98.739 1	93.281 0	98.215 2	95.735 8	90.056 5	103.434 7	101.560 5	…
9	0.975 3	92.925 1	109.687 9	92.842 1	106.451 0	98.670 0	99.098 5	93.637 6	98.376 8	95.082 2	87.468 4	105.227 1	103.991 8	…
10	0.972 6	92.671 1	109.162 1	90.184 8	106.619 1	97.918 8	102.645 5	94.178 0	96.412 0	96.833 5	87.549 4	108.438 7	104.832 8	…
看涨期权价格(BS)		看涨期权价格的各轮记录												
0		17.903 91	17.903 91	17.903 91	17.903 91	17.903 91	17.903 91	17.903 91	17.903 91	17.903 91	17.903 91	17.903 91	17.903 91	…
1		17.481 05	18.578 18	18.383 3	19.642 12	19.029 63	19.872 81	17.031 8	18.472 31	16.068 36	15.778 9	18.417 65	18.630 2	…
2		17.152 93	18.845 91	15.979 59	21.425 76	18.170 33	21.384 13	15.652 97	19.472 94	16.206 01	16.805 34	17.039 59	19.895 27	…
3		18.116 12	17.036 33	14.781 71	21.745 11	17.219 59	23.107 94	14.669 66	18.717 95	16.978 62	14.931 02	17.210 13	20.353 45	…
4		18.952 18	18.161 91	14.501 67	22.696 4	17.627 5	21.991 49	13.884 23	17.261 84	16.825 5	15.276 19	20.087 96	18.556 5	…
5		17.499 17	19.112 21	14.881 99	21.017 12	17.509 51	19.757 78	15.214 38	19.763 55	15.337 83	16.568 11	18.591 55	19.258 08	…
6		16.867 43	21.714 14	13.421 42	18.811 29	14.388 38	17.843 32	15.848 46	17.872 74	14.896 7	13.819 51	19.492 29	19.634 39	…
7		16.867 43	21.714 14	13.421 42	18.811 29	14.388 38	17.843 32	15.848 46	17.872 74	14.896 7	13.819 51	19.492 29	19.634 39	…
8		13.066 85	23.702 47	14.221 9	20.670 48	16.475 17	16.910 66	13.714 95	16.590 72	15.114 1	11.976 18	19.896 21	18.679 63	…
9		13.492 32	24.151 01	13.446 51	21.893	16.841 85	17.105 21	13.888 91	16.662 74	14.709 68	10.641 68	21.062 15	20.236 83	…
10		13.327 22	23.750 74	11.994 54	21.980 6	16.358 29	19.325 84	14.167 86	15.458 61	15.707 92	10.658 11	23.241 74	20.769 84	…
差异		−4.576 69	5.846 827	−5.909 37	4.076 688	−1.545 62	1.421 929	−3.736 05	−2.445 3	−2.195 99	−7.245 8	5.337 83	2.865 925	…

10 天之后，如果模拟的股票价格是 S_{10}，那么新的看涨期权价格可以通过 Black - Scholes 公式给出：$V^1=BS$ (S_{10}，$T-10/365$，…)（见表 24—3 第 1 列，倒数第 2 行）其中我们假设其他输入变量为 $r=0.05$ 以及 $\sigma=0.4$，并且在这 10 天中保持不变。蒙特卡罗模拟的第一轮中价值的变化为 $\Delta V^1=BS_{10}-BS_0=-4.576$。现在我们重复上面的过程，比如说进行 $m=1\ 000$次，这样

就可以获得对于 $i=1, 2, 3, \cdots, 1\ 000$ 的 ΔV^i。最后，我们将 ΔV 的价值按照从低到高进行排序，（或者用直方图将它们表示出来，参见图 24—3），那么 5%的左截点给出了 VaR。即使假设股票的收益率是正态分布的，这个看涨期权价格的直方图也是非正态的，因为看涨期权的期权价格和标的资产的价格之间的关系是有曲率的。我们可以选择通过一个具有精确形式的解来对期权价格进行估计，也就是 Black - Scholes 公式（即完全的定价方法）。另外我们也可以通过线性的 delta 近似方法或是 delta-gamma 近似方法来对期权价格的变化进行近似。最终的选择要取决于所要求的精确度和估值方法的复杂程度。我们将会在下面进行进一步的讨论。

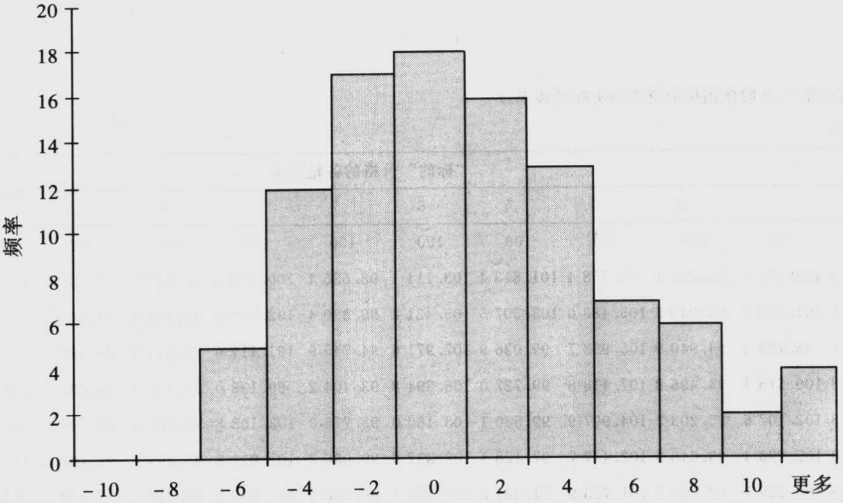


图 24—3　100“轮”看涨期权价格的直方图（看涨期权多头 VaR）

复合资产：国外债券和看跌外汇期权的多头

考虑一个美国居民持有两种资产的投资组合，这个投资组合包括一个国外的零息债券，到期期限是 $T=1$ 年，并且面值为 $Q_{fc}^{(1)}$（外币）。然后我们通过买入一个看跌的外汇期权来对它进行对冲，这份合约的名义价值是 $Q_{fc}^{(2)}$（外币）并且距到期日的时间是 $T_0=1/12$ 年。那么在 5 年期间 VaR 是多少呢？当使用蒙特卡罗模拟的方法时，我们多了一系列的附加因素需要考虑。首先，即期的外汇和债券的收益率应该满足它们在历史数据中体现出的相关性（参见附录 24.2）。第二，即期汇率决定了看跌外汇的价格，但是国外债券的价值也必须用这个即期的汇率进行重新定价。后面的这个“交互作用”暗示读者必须留心随后用到的即期外汇和债券价格的符号，其中：

对于国外债券的用外币表示的价格（资产 1）为 $P^{(1)}$。

看跌期权标的的即期汇率（资产 2）为 $P^{(2)}$。

蒙特卡罗方法涉及下面的这些步骤。

用本币进行估值

用本币计价的国外债券的初始价值是

$$V_0^{(1)}\text{ 美元}=P_0^{(2)}(Q_{fc}^{(1)}\mathrm{e}^{-y_0T})=590\ 909\text{(美元)(比如说)} \tag{24.31}$$

其中 $T=1$ 年，$p_0^{(2)}$ 为在 $t=0$ 时刻的即期汇率（美元/单位外币）。变量 y_0 为国外债券的 1 年期的即期收益率（因此我们要注意到 $P_0^{(1)}=\mathrm{ex}^{-y_0T}$）。我们还要假设我们利用完全估值方法以及适当的 Black - Scholes 公式来对这个看跌期权进行估值。我们可以将最初的看跌期权价格记为 BS_0（$P_0^{(2)}$，K，T_0）（美元/外币），其中 $P_0^{(2)}$ 是在 $t=0$ 时刻的即期汇率，K 是执行价格（美元/外币）并且 $T_0=1/12$（由于看跌期权只有 1 个月就到期）。我们可以继续用 σ 来表示期权的波动率并且用这些符号表示国外和国内的利率，因为我们假设它们在 5 年内都是不变的。这个**看跌期权的多头用本币表示**的最初价值是

$$V_0^{(2)}\text{ 美元}=Q_{\mathrm{fc}}^{(2)}\times BS_0(P_0^{(2)},K,T_0)=10\,500(\text{美元})\tag{24.32}$$

其中 $T_0=1/12$ 是距到期日的时间，国外债券用美元表示的最初的价值加上这个看跌期权的价值就是

$$V_0^{(1+2)}\text{ 美元}=V_0^{(1)}\text{ 美元}+V_0^{(2)}\text{ 美元}=590\,909\text{ 美元}+10\,479\text{ 美元}=601\,388(\text{美元})\tag{24.33}$$

模拟

- 利用我们对每日波动率和相关系数的估计值，我们在分布函数（多元正态分布）中进行随机选取，得到了关于即期外汇和债券收益率的很长的一列路径（为了方便说明，我们选取了1 000个数据），它们与历史数据具有相同的相关系数的结构。这就是蒙特卡罗模拟。
- 如果资产价格服从一个漂移为零的几何布朗运动，那么资产 1 和资产 2 的日收益率（具有每日标准差 σ_1 和 σ_2）分别是：

$$R_{1,t}=\ln(P_{1,t}/P_{1,t-1})=\sigma_1 z_1\qquad z_1\sim N(0,1)\tag{24.34a}$$

$$R_{2,t}=\ln(P_{2,t}/P_{2,t-1})=\sigma_2 z_2\qquad z_2\sim N(0,1)\tag{24.34b}$$

其中，z_1 和 z_2 为均值为零的随机变量，它们的标准差都等于 1，并且 z_1 和 z_2 的相关系数是 ρ（即期外汇的收益率和债券的收益率之间的相关系数提前 1 天的预测值）。每种资产的预期收益率假设是零$(E(z_i)=0,i=1,2)$，并且由于 $\sigma(z_i)=1$，那么收益率的方差是 $\mathrm{Var}(R_{i,t})=\sigma_i(i=1,2)$。随机变量 z_i 是假设为（多元）正态分布的，这表明收益率是（条件）正态分布的。在 t 天的时间段上的收益率由下面的式子给出：

$$R_{i,t+5}=\ln(P_{i,t+5}/P_{i,t})=\sigma_i\sqrt{t}z_i\qquad i=1,2\tag{24.35}$$

从收益率到价格水平

- 我们将收益率（1 000×2）看做是一个提前 5 天（1 000×2）的债券的价格以及即期汇率的水平（即期权合约中的标的物）。因此在这 5 天中价格是平坦的，因此（把 $t=0$ 看做是初始日期）我们可以得到：

$$\text{债券价格(f. c.)}\quad P_{t+5}^{(1)}=P_0^{(1)}\exp(\sigma_1\sqrt{5}z_1)\tag{24.36a}$$

$$\text{即期汇率“价格”}\quad P_{t+5}^{(2)}=P_0^{(2)}\exp(\sigma_2\sqrt{5}z_2)\tag{24.36b}$$

- 当然，如果不用上面所提到的公式，我们也可以对于上面每种资产简单地得到 5 个连续的每日收益率（在蒙特卡罗模拟的每一轮中），并且我们可以将最后一个（对于每种资产）应用于 $P_{t+5}^{(1)}$ 和 $P_{t+5}^{(2)}$。然而，为了让计算更加有效，我们通常仅仅对于每个 z_i 只得到

一个数值，并且利用上面的法则进行计算。

再次估值

- 在这些“新的价格”上，重新计算货币看跌期权和债券的1 000个“新”值（比如利用合适的 Black - Scholes 公式），因此这1 000个“新的”模拟投资组合的价值以及组合价值的变化就是：

新的债券的价值 $V_{t+5}^{(1)}$ 美元 $=P_{t+5}^{(2)}[Q_{\mathrm{fc}}^{(1)}\mathrm{e}^{-y_1(T-5/365)}]$

新的看跌期权多头的价值 $V_{t+5}^{(2)}$ 美元 $=Q_{\mathrm{fc}}^{(2)}BS(P_{t+5}^{(2)},T_0-5/365)$

新的投资组合的价值 $V_{t+5}^{(1+2)}$ 美元 $=V_{t+5}^{(1)}$ 美元 $+V_{t+5}^{(2)}$ 美元

投资组合价值的变化 $\Delta V_{t+5}^{(1+2)}$ 美元 $=V_{t+5}^{(1+2)}$ 美元 $-V_0^{(1+2)}$ 美元

上式中值得我们注意的是“新的”债券价格（面值为 1 美元）由 y_1 决定，因为 $P_{t+5}^{(1)}=\mathrm{e}^{-y_t(T-5/365)}$。

模拟的概率分布和 VaR

- 对于这个两资产组合（债券＋看跌期权）的价值变化 $\Delta V_{t+5}^{(1+2)}$ 美元，绘出这1 000个模拟值的直方图，并找出分布的 5%截点。
- 国外货币债券的价格和即期汇率的变化（即“收益率”）都是正态分布的，因此债券的价格和汇率在 $t=5$ 时刻都是对数正态的。然而，投资组合价值变化的模拟分布在原则上可以具有任意形状，因为非线性关系决定了期权价格。（在1 000轮的模拟中，可能看跌期权会以零价格结束，如果我们随机抽取的结果导致即期汇率比看跌期权的执行价格高，后面一种情况就会发生。）

近似：delta 和“delta＋gamma”

上面我们利用了完全的估值方法，通过1 000组模拟汇率值得到看跌期权的“新”价值。另外一种方法是利用期权的 delta 值 Δ_p 来近似看跌期权的价格变化（以最初的汇率估值）：

$$\Delta V_{t+5}^{(2)}\text{美元}=Q_{\mathrm{fc}}^{(2)}[\Delta_\mathrm{p}(P_{t+5}^{(2)}-P_0^{(2)})] \tag{24.37}$$

其中，$P_{t+5}^{(2)}$为在 $t=5$ 时刻汇率的模拟值。利用 Δ_p 可以对看跌期权价格的变化提供（线性）一阶近似。我们可以再通过期权的 gamma（Γ）进行二阶近似：

$$\Delta V_{t+5}^{(2)}\text{美元}=Q_{\mathrm{fc}}^{(2)}[\Delta_\mathrm{p}(P_{t+5}^{(2)}-P_0^{(2)})+0.5\Gamma(P_{t+5}^{(2)}-P_0^{(2)})^2] \tag{24.38}$$

假设看跌期权的隐含波动率是每年 14%，那么我们可以得到 $\Delta_\mathrm{p}=-0.4919$，以及 $\Gamma=15.14$。因此，给定 $P_{t+5}^{(2)}$的模拟值，我们就可以在公式（24.37）和公式（24.38）中进行替换，得到看跌期权新的模拟价格的近似值（如果我们想对这种 delta - gamma 近似方法的准确性进行评价的话，我们可以将这个结果与用完全估值方法得出的正确结果进行比较）。

在表 24—4 给出的特定的例子中（基于 J. P. 摩根，1996，第 154 页，其中所指的外币是德国马克），美国的投资者是 100 万国外债券的多头（资产 1），并且通过一个平值的看跌期权（资产 2）对他的头寸进行部分对冲。那么在 5 天的时期内，这个投资组合用美元计价的 VaR 是多少呢？表 24—5 给出了我们前 4 次近似的结果（在1 000轮中），它们是在不同债券价格和即期汇率

的情况下得出的。可以看到，“dalta+gamma”的方法对期权价值的近似往往与完全估值的方法得到的结果非常相近。Delta 方法仅仅对即期汇率提供了一个合理的近似，这个结果非常接近最初的即期汇率即 0.65，但是如果汇率的变化非常大，这种方法给出的近似效果就很差。

表 24—4　　**蒙特卡罗模拟：国外债券+看跌外汇期权**

数据：　$\sigma_1=0.0008$　1 天的国外债券收益率的波动率

$\sigma_2=0.0042$　1 天的即期 FX 收益率的波动率

$\rho=-0.17$　即期汇率和国外债券收益率之间的相关系数

$P_0^{(2)}=0.65$（美元/外币）　现行的即期汇率

$y=10\%$　现行的 1 年期的国外债券的外币收益率

美国的投资者在 $t=0$ 时刻的投资组合（国外债券的多头+FX 看跌合约的多头）：

$Q_{\text{fc}}^{(1)}=100$ 万美元的 1 年期外币债券的初始价值

$Q_{\text{fc}}^{(2)}=100$ 万的 FX 看跌合约多头的初始价值

$V_0^{(1)}$ 美元=国外债券初始的市场价值（美元）

$=P_0^{(2)}(Q_{\text{fc}}^{(1)}e^{-y_0T})=590\ 990$ 美元

$V_0^{(2)}$ 美元=FX 看跌合约最初的市场价值(美元)(距到期日还有 1 个月，即 $T=1/12$)

$=Q_{\text{fc}}^{(1)}BS_0(P_0^{(2)},K,T_0)=$(例如)10 479 美元

通过相应的 Black - Scholes 公式得到的结果（其中 $\sigma=$每年 14%）：

$V_0^{(1+2)}=V_0^{(1)}+V_0^{(2)}=590\ 909$ 美元+10 479 美元=**601 388（美元）**

表 24—5　　**蒙特卡罗模拟的结果：国外债券+看跌外汇期权**

债券的初始价值=590 909 美元

看跌合约的初始价值=10 479 美元

投资组合的初始价值=601 388 美元

“轮”	即期外汇（美元/外币）	债券价值（美元）	看跌期权价值（美元）		
			完全	delta	delta+gamma
1	0.654 0	593 742	7 752	8 524	8 644
2	0.670 7	610 430	2 680	273	3 541
3	0.644 4	585 460	12 575	13 214	13 449
4	0.653 0	592 267	8 156	8 981	9 052

注：上面的表格给出了在蒙特卡罗模拟的前 4 轮中，在 $t+5$ 时刻利用三种不同的方法计算看跌期权价格的结果。

为了度量 VaR，我们将对于投资组合的价值变化进行模拟的结果按照分位点大小排序（见表 24—6）。在 5%分位点处的投资组合的 VaR 是4 559美元（通过完全估值方法）。这个结果大约是最初投资组合价值的 0.75%。这些关于 VaR 的模拟结果也可以用一个直方图表示（一般来说图形具有非对称分布）。

表 24—6　　VaR 的分位点：国外债券＋看跌外汇期权

分位点	各种对于看跌合约的估值方法		
	完全	delta	delta＋gamma
1.0	−5 750	−5 949	−4 945
2.5	−5 079	−5 006	−4 245
5.0	−4 559	−4 392	−3 708
⋮	⋮	⋮	⋮
95.0	4 311	4 331	5 156
97.1	5 509	5 317	6 350
99.0	6 652	6 224	7 489

注：表中数字给出了根据对看跌期权价格的几种不同估值方法下这个“债券＋看跌合约”组合价值变化的分位点。

对于每一个特定的分位点，利用“delta”方法和“delta＋gamma”方法得到的 VaR 都可能与利用完全估值方法得到的结果显著不同，所以即使完全估值方法对计算的要求更多一些，也还是值得去进行的。在蒙特卡罗模拟中，我们假设即期汇率和债券价格都是（条件）正态分布的。但是如果这些分布实际上具有胖尾（或者不对称），那么我们得到的 VaR 极有可能被低估。然后我们就需要重复蒙特卡罗模拟过程，要选取更能代表实际经验数据的收益率分布函数。如果期权的收益是复杂的（比如路径依赖），那么这时很难得到一个精确形式的解，那么我们就要在蒙特卡罗模拟中选择其他估值办法，注意这些估值方法要在蒙特卡罗模拟的每一轮中运用，这可能会增加计算的复杂程度。正是出于这个原因，我们很少应用 BOPM 的方法，最常用的方法是通过具有边界条件的合适的偏微分公式 PDE 来数值求解期权价格（参见第 23 章），然而，在 VaR－MCS 方法下，我们可以得到期权的蒙特卡罗模拟价格，因为在每一轮 VaR－MCS 中，期权本身都可以被估值。在 $t=0$ 时刻，对于看跌期权的初始价值，我们可以在风险中性的条件下利用一般的蒙特卡罗模拟来获得。如果 VaR－MCS 的第一轮中所得到的标的资产的价格是 $S_{t+5}^{(1)}$，那么，后面就可以利用这个值作为新过程的初始点进行通常的蒙特卡罗模拟，进而获得期权的价值 $P_{t+s}^{(1)}$（也是在风险中性下估值）。很明显，当运用这类 VaR－MCS 方法来对一个复杂的期权进行估值的时候，就出现了耗时的计算这一问题。文章 24.1 中给出了蒙特卡罗模拟的优点和缺点。

文章 24.1　　蒙特卡罗模拟和 VaR

- 当投资组合的价值与标的资产的价格或是收益率之间具有非线性关系时，蒙特卡罗模拟方法非常有用，尤其是当投资组合中包含期权时。蒙特卡罗模拟是一个灵活的方法，因此可以用于由不同期权和不同标的资产构成的投资组合。
- 给定了每日收益率的方差和相关系数的估计，我们可以模拟标的资产收益的完全多元分布，并利用所产生的这些数据来计算一个包含有期权的投资组合的价值变化。
- 在蒙特卡罗模拟中，投资组合的价值可以通过完全的估值方法（例如 Black－Scholes 公式）重新估值（对每一个模拟结果），或者是对于价值的真实变化进行近似（利用 delta 或者是 delta－gamma 方法），或者通过其他期权定价方法（例如有限差分的方法）。然后

我们就可以得到在任何一个分位点上的 VaR 以及所有可能结果完全分布的形状。

- 蒙特卡罗模拟适用于对标的资产所做的任何分布函数的假设（比如说胖尾分布）。它可以容纳时变的参数（例如随机的波动率），也可以用于路径依赖型的期权（例如亚式期权）。
- 蒙特卡罗模拟对计算的要求比较高，但是随着计算技术的提高，这个问题得到了一定的解决。
- 这种方法要求一个关于标的资产的“模型”（例如假设为几何布朗运动），另外还需要一个模型来对衍生证券进行定价（例如通过 Black - Scholes 公式得到精确形式解，或者是 BOPM 模型，或者是一个相应的 PDE 模型的数值解）。因此这种方法可能会有“模型误差”和“估计误差”（参见下文）。
- 蒙特卡罗模拟与一般的历史数据模拟方法不同，它不仅仅考虑了收益率数据的一个路径，而且还利用了可能发生的无限次价格路径，但是这些数据并没有在历史中实际发生。从这种（有限的）意义说，蒙特卡罗模拟方法要优于历史数据模拟方法。但是要注意到，利用了重复取样技术的历史数据模拟方法也使我们可以利用多种可能的价格路径（尽管这些路径都是确定历史数据集合的某种组合）。
- 如果根据历史数据所得出的每日的方差和相关系数的统计量与某个特殊时期相差很大，那么通过蒙特卡罗模拟所计算出的 VaR 对于这些特殊的时期就没有了代表性，这也是一种“估计误差”。下面我们需要使用**压力测试**（stress testing）来对蒙特卡罗分析所得到的结论进行补充。

24.6　VaR 和压力测试

由于上面所讨论的 VaR 计算中存在的限制，我们经常使用压力测试对它进行一些补充。压力测试估计投资组合对于某些关键收益率的极端变化的敏感度。因此压力测试告诉我们在某种情况下，我们会损失多少，但是同时它没有告诉我们，这种情况发生的可能性有多大。对这些极端变化的选择往往是基于某些危机时期所发生的一些情况（例如 1987 年的股票市场全面崩溃，1992 年英镑脱离 ERM 的“危机”以及 1997 年到 1998 年间的亚洲金融危机）。资产价格的方差和相关性取决于这些特殊时期——这些资产价格之间的相关性急剧上升（在某种意义上，压力测试更像一个有限次的或是一次性的蒙特卡罗模拟或是一个重复取样模拟）。选择压力测试的输入变量要根据金融机构对于投资组合关键敏感性的主要来源的估计。很明显，压力测试只能应用于相对比较简单的投资组合，否则，我们在所选定的情景中得到的相关系数就会与实际历史数据出现很大的偏差，甚至对任何可能被预见到的事件都是如此。压力测试的另外一个不足之处是投资组合有时可能会从极端的变动中获得收益，然而当变动非常小时，反而会遭受损失（例如一个勒式价差的多头）。

一般来说，压力测试具有一些局限性。相同情景下的压力测试不一定会对所有的投资组合都提供有用的信息。例如，对于一个实物商品的交易者，当所有利率都上升 300 个基点的时候所进行的压力测试就不会提供任何有用信息。人们也可以把情景分析的方法逆转过来，考虑“对于给

定的投资组合，什么样的情景（对于利率、汇率的各种变化）才会产生最坏的结果?”因此压力测试是对通常的 VaR 方法的一个有力补充，但是它们都要求在实际执行时进行慎重的判断。

24.7 其他方法

简单来说，VaR 实际上是试图以一个给定的概率，将一个投资组合的市场风险压缩成用一个数字来表示。这个数字可以通过各种不同的方法计算得到，这些方法都依赖于我们所选择的模型过程。例如，在所谓的参数方法中，我们常常假设收益率以及对于波动率和相关系数的预测是正态分布的，另外我们还允许一定的分散作用。当投资组合包含有期权的时候，那么“参数化”的蒙特卡罗模拟的方法最常被使用。很明显，这些方法可能导致模型误差，因为所估计的方差和协方差可能不正确。相反，在历史数据模拟的“非参数方法”中，给定收益率的历史数据，我们就可以发现投资组合的价值是怎样变化的。虽然这种方法可以得到投资组合收益率的总体分布，但是往往只报告一个 VaR 值。这种方法对数据量有比较大的要求，并且结果有时会高度依赖于我们所选取的历史数据的样本。

下面我们考虑一下这些方法中会出现的一些问题，它们都在某种程度上取决于最近历史数据的平均值。例如，考虑一个市场价值是 $V_0=606\ 000\ 000$ 美元，$\sigma=1\%$（每天）的投资组合，在一天的时期内 5%的分位点上的 VaR 是 1 000 万美元（$=V_0 1.65\sigma$）。这表明在 20 天中将会有 19 天损失不会超过 1 000 万美元，同时大约会有 1 天的损失超过这个数值。然而 VaR 并没有给出在这一天内，实际的损失将会是多少。如果收益率是（条件）正态分布的，那么给定 VaR 为 1 560 万美元时，对于最左边的 0.5%的临界点是 2.575σ。但是即使这样我们也不能完全确定实际发生的损失，这是因为：

- 即使在正态分布下，也存在很小的概率会发生很大的损失。
- 相对于正态分布来说，实际收益率具有更胖的尾部，因此，实际发生更大损失（平均来说）的机会要更大（相对于我们按正态分布假设得出的结果）。
- 相关系数和波动率可能会出现比较剧烈的变动。例如，在 1993 年的第一个季度，日经 225 指数和 FTSE100 指数之间每日的相关系数在+0.9 和−0.9 之间变动（Jackson 等，1996），在 1995 年的第一个季度日经 225 指数每日的波动率在 0.7%和 1.8%之间变动。

最差情景分析

有一种方法能够处理（或者至少能减轻）前面所提到的“损失规模”问题，它被称为**最差情景分析**（worse case scenario analysis，WCS）。这里我们并没有简单地计算在 5%的分位处的 VaR。相反，我们仅仅考虑左尾处发生的一些最差结果，并利用它们来计算预期在尾部发生的最差情况（Boudoukh 等，1995）。因此这个方法试图解决这样一个问题：“在接下来的 H 个交易日，如果我们位于尾部，所能发生的最大损失的平均规模是多少?”VaR 关注的是一个发生特定损失的频率（例如，一个在 1%分位点处 100 万美元的 VaR 就意味着在每 100 天中只有 1 天的损失会超过 100 万美元），WCS 方法建立在蒙特卡罗模拟基础之上（参见附录 24.3），与 VaR 相比，它

给出了一个更高的风险数值，因为它的结果是基于尾部最差的极端收益率的分布之上的。

例如，Boudoukh 等（1995）提出在 1%处 VaR 的结果是－2.33%（标准差），而最差情景分析平均损失的结果是－2.51%，对于这些最差情景的结果在 1%的尾部值是－3.72%（见表 24—7）。因此根据 WCS 方法的结果做出的对资本充足度的要求要比根据 VaR 做出的要求更高。然而《巴塞尔协议》规定的 3 倍 VaR 的乘数因子可能比大部分最差情景分析得出的要求还要严格。应用最差情景分析的主要问题是它对计算的要求比蒙特卡罗模拟还高，以及它假设根据历史数据估计出的相关系数（假设是一个多资产的组合）可以应用于收益率的极端变动，如同尾部所显示的那些变化一样。

表 24—7　　**VaR 与最差情景分析的比较**

VaR（1%的临界点）	－2.33%
预期较差情景分析	－2.51%
1%最差情况下的较差情景分析	－3.72%

注：假设交易时期为 100 天，收益为 N（0,1），因此在 1%截点处的 VaR 是－2.33%。期望的 WCS 和 1%尾部的 WCS 值通过蒙特卡罗方法得到（参见附录 24.2）。

极值理论

另外一种集中关注尾部分布的方法是**极值方法**（extreme value approach，EV）。这种方法通常用于在自然科学中对给定可信度下所能发生的最大损失进行估计（例如建设大坝时的失败或是核电站建设的失败等）。在更广泛的意义上，极值方法混和了历史数据模拟方法和对于尾部分布形状的估计两种方法。与历史数据模拟方法不同的是它利用的只有左尾的一部分数据。这种方法利用尾部的数据来估计尾部的形状，而不用对整个分布（其余部分）的形状假设某种分布。Danielsson 和 de Vries（1997）认为，对于小于 5%的分位点，RM VaR 方法低估了尾部这些事件发生的可能性，历史数据模拟方法则高估了它们，然而极值方法则表现非常好。对“越小”尾部的预测，极值方法越能给出更准确的结果。

我们所讨论的所有方法（例如方差—协方差的参数估计方法、历史数据模拟方法、压力测试、蒙特卡罗模拟方法以及极值理论）一般都假设了所持有的投资组合在我们所考虑的时期内是保持不变的。随着我们计算 VaR 所选择的时间段的增加，这个限制变得越发不现实。例如，人们可能不能在 1 天内对自己的头寸进行清算（尤其是在危机时期），但是如果我们把这个时期增长改为（比如说）10 天，上面的假设就可能是不正确的。另一个在所有方法中都被忽略的重要问题就是“反弹期”。在盯市的基准上，所估计的累计 10 天的损失可能非常大，但是如果在接下来的 20 天市场情况完全反转，那么在这 30 天内的累计损失可能会是零。因此我们还是要考察一下 VaR，但并不是通过$\sqrt{T}$法则按比例地增加各种因素，而是要尽量在一个比较长的时期内得到关于波动率的精确估计（例如当收益率显示出均值回归特点的时候）。然而，在直接估计每月收益率的波动率时可能会要求相当多的数据。

总之，在计算 VaR 时的统计方法和实际中的计算细节是十分重要的。然而，现在看来很明显的是，在衡量市场风险（排除信用风险、营运风险等）的时候，对每个选定的方法都需要慎重

判断。

24.8 本章摘要

在衡量 VaR 的时候涉及很多统计方面的细节讨论，这一章中我们仅仅讨论了这些问题中的一部分。我们的主要结论如下：

- 对于大多数资产（例如股票、债券、实物商品和外汇）的收益率，我们为了在 5%的分位点上计算每日 VaR，对所用的方差和协方差进行估计时，进行（**条件**）正态分布的假设是合理的。
- 预测即期资产每日方差和协方差的递归 EWMA 公式很容易应用，并且它们在 5%的分位点上给出了 VaR 合理准确的预期。
- 基于**隐含波动率**的预测存在一些问题，因为它们的覆盖范围非常有限，另外，虽然 **GARCH 类模型**对于一些资产的收益率是比较有用的，但是却增加了复杂性。
- 包含有欧式期权的投资组合的 VaR 可以精确地通过**蒙特卡罗模拟**方法得出，并且通常可以通过压力测试进行补充完善。随着计算水平的提高以及一系列“用户界面非常友好的”计算软件的应用，蒙特卡罗模拟可能会在将来具有更广泛的用途。
- 在对比较低的尾部临界点（例如在 1%或是 5%的分位点）处进行预测时，**历史数据模拟的方法**可能会更加准确一些。但是这要求一个相当大的数据序列，并且与那些标准的参数化方差—协方差方法相比，它的灵活性比较差（例如很难进行灵敏度分析）。
- **WCS 和极值方法**对于尾部分布给出新的结果，但考虑到这类方法复杂性的提高，它们并没有带来很大的附加价值。现在的资本充足度要求稍微有些保守（例如最小的乘数因子是“3 乘以 VaR”），因此巴塞尔委员会没有要求使用这些更加准确的模型方法。
- **压力测试**为通过参数或是非参数方法计算出的 VaR 所衡量的市场风险提供了一些补充性的观点。但是在试图确定真实的市场风险时，所有方法都要求我们进行谨慎的判断。

章末练习

1. 请解释一下如何来评价对于股票收益率的波动率的预测是否准确。

2. 当预测波动率时，简单的移动平均方法和指数移动平均方法之间有什么区别？

3. 简要评价蒙特卡罗模拟方法和压力测试的相对优点和缺点。

4. 请详细介绍利用蒙特卡罗方法计算组合 10 天 VaR 的主要步骤，组合由股票看涨期权多头构成（假设 Black - Scholes 公式成立）。

5. 如果所持有的投资组合中含有一个股票看涨期权的多头，另外还持有一个零息债券，那么上面对习题 4 的分析将会怎样变化？

6. 产生 100 个关于股票的价格 S_t 的随机观察值，其中 $S_0=100$，$\sigma=40\%$，并且 $\mu=10\%$，时间步长 $\Delta_t=0.01$ 年，也就是大约 3.5 天。利用 Excel 对收益率的波动率计算指数移动平均的预

测值 $\sigma_{t+1|t}$。我们规定收益率是 $R_{t+1}=\ln(S_{t+1}/S_t)$，在指数加权移动平均中所使用的权重因子是 $\lambda=0.95$。画出这个收益率序列对于收益的波动率的图像。

7. 利用蒙特卡罗模拟方法在 Excel 中（也可以利用其他的计算软件）计算一个看涨期权多头的 VaR。假设 $S_0=100$，$\sigma=$ 每年 20%，并且 $\mu=$ 每年 5%，对于这个期权，我们假设 $K=100$，$r=5\%$，另外距到期日的时间是 $T=1$ 年。将时间段 T 划分为几个小段 $\Delta_t=1/365$，也就是说 1 天。为了方便起见，在蒙特卡罗模拟中进行 100 次运行。

附录 24.1　递推的指数加权移动平均公式的计算

递推的指数加权移动平均

对于波动率和协方差的预测可以通过递推的方式进行计算。假设平均收益率是零，那么指数加权移动平均公式（具有无限和）是

$$\sigma_{t+1|t}^2=(1-\lambda)\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}R_{t-j+1}^2 \tag{A24.1}$$

将上面的式子展开并且重新组合得到

$$\begin{aligned}\sigma_{t+1|t}^2&=(1-\lambda)[R_t^2+\lambda R_{t-1}^2+\lambda^2R_{t-2}^2+\cdots]\\&=(1-\lambda)R_t^2+\lambda(1-\lambda)[R_{t-1}^2+\lambda R_{t-2}^2+\cdots]=(1-\lambda)R_t^2+\lambda\sigma_{t|t-1}^2\end{aligned} \tag{A24.2}$$

协方差

证明的过程与对方差的证明过程是相似的：

$$\begin{aligned}\sigma_{xy,t+1|t}^2&=(1-\lambda)\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}X_{t-i+1}Y_{t-j+1}\\&=(1-\lambda)[X_tY_t+\lambda X_{t-1}Y_{t-1}+\lambda^2X_{t-2}Y_{t-2}+\cdots]\\&=(1-\lambda)X_tY_t+\lambda(1-\lambda)[X_{t-1}Y_{t-1}+\lambda X_{t-2}Y_{t-2}+\cdots]\end{aligned} \tag{A24.3}$$

因此

$$\sigma_{xy,t+1|t}^2=(1-\lambda)X_tY_t+\lambda\sigma_{xy,t|t-1}^2 \tag{A24.4}$$

附录 24.2　蒙特卡罗模拟分析和 VaR

看涨期权和看跌期权的价格是标的资产价格的非线性函数。蒙特卡罗模拟可以用于得到一个包含有期权（也可以含有其他资产）的投资组合的 VaR。我们所需要的就是一个关于投资组合价值的分布函数，但是这个分布函数是非正态的。当我们的投资组合中包含有不止一种资产的时候，问题就会变得复杂化。如果我想得到一个包含有两种或是两种以上资产的投资组合的价值，我们必须考虑这些资产收益率之间的相关系数。我们假设标的资产的收益率（按照连续复利计

算）是多元正态分布的，因此价格水平就是多元对数正态分布的。蒙特卡罗模拟方法使我们可以重复产生收益率的样本，因此我们就可以利用代数方法计算出价格水平。这些模拟出的价格就可以再用于对投资组合的美元头寸进行估值，并且可以找到在这个分布的5%分位点处投资组合的价值。我们下面以一个两种资产的组合为例来解释这种方法，它可以很简单地推广到一般的 n 种资产的例子中，并且可以通过编程应用于相应的统计计算软件。

我们假设资产的收益率 R_i 是多元正态分布的，即 $R \sim N(0, \sum)$，假设我们已经估计出了关于收益率的方差—协方差矩阵（比如通过应用指数加权移动平均的方法计算得出），从这个矩阵中，我们又可以构造另外一个相关系数的矩阵 C。对于一个（2×2）的情况，我们可以得到

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \tag{A24.5}$$

以及

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \tag{A24.6}$$

其中，$\sigma_{12} = \sigma_{21}$。另外相关系数 $\rho = \sigma_{12}/\sigma_1\sigma_2$。应用简单的矩阵代数的知识就可以将矩阵 C 分解成两个矩阵 A（2×2），因此得到

$$\mathrm{C} = \mathrm{AA}' \tag{A24.7}$$

其中，A 是一个下三角矩阵：

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \tag{A24.8}$$

矩阵 A 是关于 C 的 Choleski 分解因子。很容易看出 C＝AA′。进行 Choleski 因子分解的原理就是，如果 ε（2×1）包含两个独立的 N（0，1）变量（即平均值为零，并且具有单位方差和零协方差 ε—N（0，1）），那么我们就可以产生一列标准正态的变量 Z，这个变量可以通过下式获得：

$$\mathrm{Z} = \mathrm{A}'\varepsilon \tag{A24.9}$$

很多统计软件都具有产生独立的服从 N（0，1）分布 ε 的随机序列的程序。我们构造的 Z 中的变量都是具有平均值零和单位方差，但是同时具有相关系数 ρ。这样的话，Z 的相关系数的结构就与相关系数矩阵 C 给出的结果相同：

$$Z \sim N(0, \mathrm{C}) \tag{A24.10}$$

一旦得到了 z_i，我们就可以在一个 t 周期的时间段内推导出两种资产的收益以及价格水平：

$$P_t^{(i)} = P_0^{(i)} \exp(\sigma_i \sqrt{t} z_i) \tag{A24.11a}$$

$$R_{i,0t} = \ln(P_t^{(i)}/P_0^{(i)}) \tag{A24.11b}$$

很容易看出，从 $t=0$ 到 t 这段时间内资产的收益率（公式（A24.11b））具有标准差 $\sigma_i\sqrt{T}$ 以及相关系数 ρ。为了更明白地说明这一点，注意从公式（A24.8）和公式（A24.9），我们有

$$z_1 = \varepsilon_1 \tag{A24.12a}$$

以及

$$z_2 = \rho\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2 \tag{A24.12b}$$

在变量 z_1 和 z_2 中，ε_1 是相同的，这正是 z_1 和 z_2 的相关系数的来源，因此在两种资产中也

产生了相关性。从公式（A24.11）中我们得到

$$R_{1t}=\sigma_1\sqrt{T}z_1 \tag{A24.13a}$$

以及

$$R_{2t}=\sigma_2\sqrt{T}z_2 \tag{A24.13b}$$

为了证明模拟收益率的平均值为零，以及相关系数为 ρ，我们注意到由于 $E\varepsilon_1=E\varepsilon_2=0$，因此 $Ez_1=Ez_2=0$。因此：

$$\mathrm{Var}(z_1)=\mathrm{Var}(\varepsilon_1)=1 \tag{A24.14a}$$

$$\mathrm{Var}(z_2)=\rho^2\mathrm{Var}(\varepsilon_2)+(1-\rho^2)\mathrm{Var}(\varepsilon_2)=1 \tag{A24.14b}$$

$$\mathrm{Cov}(z_1,z_2)=E(z_1,z_2)=\rho E(\varepsilon_1^2)+\sqrt{1-\rho^2}E(\varepsilon_1\varepsilon_2)=\rho \tag{A24.14c}$$

由于 $\mathrm{Cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0$。在一个长度为 T 的时间段内，收益率的方差是 $\mathrm{Var}(R_i)=\sigma_i^2\mathrm{Var}(z_i)=\sigma_i^2T$。用公式（A24.13）得到的收益率之间的协方差（在长度为 T 的时间段内）是

$$\mathrm{Corr}(R_1,R_2)=\sigma_1\sigma_2TE(z_1z_2)/\sigma_1\sqrt{T}\sigma_2\sqrt{T}=\rho \tag{A24.14d}$$

蒙特卡罗模拟的过程是产生一个收益率（以及价格）的序列，使它与在实际的历史数据中所得到的方差和相关系数（即 σ_i 和 ρ 的估计值/预测值）的结构一致。步骤如下：

（1）产生一个由10 000个（2×1）独立的标准正态分布的变量 $\varepsilon\sim N$（0，1）组成的序列。

（2）对相关系数矩阵 C 利用 Choleski 分解 $C=AA'$，得到 $Z=A'\varepsilon$，对于 z_i（$i=1$，2），可以看到 $Z\sim N$（0，C），因此 Z 是一个标准正态分布的变量（具有单位方差和相关系数 ρ）。

（3）通过 z_1 和 z_2 的值得到对于价格序列的预测价值（10 000×2）（提前 t 期的预测）：

$$P_t^{(i)}=P_0^{(i)}\exp(\sigma_i\sqrt{t}z_i)$$

（4）利用步骤（3）中估计得到的标的资产的价格序列以及相应的定价模型（例如 Black - Scholes 模型或者是 delta - gamma 对 Black - Scholes 的近似）来重新对期权的价格进行估值。

（5）计算投资组合价值变化的10 000个数值，这样很快就可以得到在分布函数中特定的分位点上的 VaR。

最后，我们还要提到一个细节。上面应用蒙特卡罗模拟方法产生一个 1 期的收益率，然后应用 $\sqrt{T}$法则来计算在 $t+5$ 时刻的价格。另外一种方法就是我们可以直接利用下面两种递推方式中的任何一种方便地产生出 P_{t+5}（例如可以在 Excel 或是其他软件包中进行计算）：

$$P_t=\left[1+\mu\Delta t+\sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}\right]P_{t-1} \tag{A24.15}$$

以及

$$P_t=P_{t-1}\exp\left[(\mu-\sigma^2/2)\Delta t+\Delta\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}\right] \tag{A24.16}$$

其中，我们经常把 σ 看做是每年的标准方差，并且把 μ 看做是每年的平均收益率，Δt 为所选择的时间步长（一般用 1 年的一部分来表示，例如 1/365）。在上面这个简化的例子中，我们在公式（A24.16）中用到了 $\sigma=1$ 天的波动率，$\mu=0$，$\Delta t=1$ 天，并且 σ^2 非常小。在第一个公式中，这个多变量的形式具有一个随机项是服从 N（0，1）的，它只能对一个对数正态分布的 P 提供一个近似，然而第二个公式就对于任何规模的时间步长 Δt 给出了一个精确的对数正态分布。实际上，如果我们仅仅关心在某个特定时间 T 上 P 的价值，那么我们可以应用下式一步得到 P_T：

$$P_T=P_0\exp\left[(\mu-\sigma^2/2)\Delta T+\sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta T}\right] \tag{A24.17}$$

实际操作中的问题

很多统计软件都产生出均匀的伪随机数，这是一列在 0 到 1 之间以相同的概率发生的数字。这些数字可以通过某种方法调整成标准正态分布的变量。例如，如果 ϵ_i 是一个均匀分布的随机数，那么 $z_i = \sum_{i=1}^{12} \epsilon_i - 6$ 就对一个标准正态分布的变量给出了很好的近似。然而，这种方法给出了太多接近于平均值的数值，但是这个问题可以通过其他的变形方式来消减（例如 Box-Muller 变形）。

在蒙特卡罗模拟方法中，两个最主要的问题就是我们模拟出的伪随机数实际上可能并不随机，这样的话，Choleski 分解在数值上就会失败。产生随机数的程序实际上是应用了一个确定性的运算法则。它们选取一个特定的“种子数”作为起始点，然后据此产生一列随机的数字（并且需要通过独立性检验等）。对于任何一个给定的种子数，都要重复这列随机数据。问题是，如果要增加产生的随机数的次数，那么这个生成随机序列的程序可能会选择一个已经使用过的种子数。这就可能导致我们所产生的随机数序列的重复或是周期，从而引起了蒙特卡罗模拟结果不准确的可能性。另外一个问题是蒙特卡罗模拟所产生的数字可能是“一串”的，这样就会导致新增加的观测值不能提供新的信息，如果递推次数比较少，这就可能导致结果的偏差，然而所谓的准蒙特卡罗方法（QMC）或者是低偏差的序列可以看起来是随机的并且避免了产生“成串”的结果，因此在这种情况下，蒙特卡罗模拟就更加有效，并且可以在较少的递推次数下得到更加准确的结果。主要思想就是准随机样本对以前的样本具有记忆性，并且尽量不重复前面的样本，这样就在不产生“成串”数据的情况下又能覆盖整个样本空间。还有很多方法可以产生准随机样本，我们推荐读者参考 Clewlow 和 Strickland 在 1998 年所著的那本好书。

第二个问题就是为了能够进行 Cholesky 分解，要求我们所估计的方差—协方差矩阵必须是正的半正定矩阵。这就要求观测值的个数要大于协方差矩阵的维数，并且在收益率之间不存在完全相关的情况。如果这个协方差矩阵非常庞大，那么完全相关的情况非常可能出现，这就是为什么我们想要尽力通过一些形式的映射来减少资产数目的原因。

附录 24.3　最差情景分析

最差情景分析的思想是为了寻找在接下来的 H 个交易日中所发生的最大损失的规模。在这里，损失的规模指的是仅仅对于我们所选择的最差的情景所组成的分布中的平均（预期）损失。假设我们的时间段 H 是 100 个交易日，并且资产的收益率是 $N(0,1)$，也就是说我们所处理的是正态化的收益率$(R-\mu)/\sigma$。很明显，从标准正态分布看来，对于 1% 的尾部概率，它的 VaR 是 -2.33%。最差情景分析提出了这样的问题：在 H 个交易日内，平均最大损失是多少以及对于 WCS 的分布比较低的分位点上的价值是多少？因此这个方法主要集中考虑的是分布的左侧。这个方法要求进行蒙特卡罗模拟，它包括以下这些步骤：

(1) 从一个服从 $N(0,1)$的分布中选取 $H=100$ 个收益率 $R=[R_1, R_2, \cdots, R_{100}]$。

(2) 将这些收益率按照规模大小进行排序，并且选择最小的收益率 $R_{\min,1}=-2.9\%$。这组成

了蒙特卡罗模拟的第 1 轮递推。

(3) 重复上面的步骤（1）和步骤（2），$n=10\,000$次，这样就可以得到10 000个的 $R_{\min,k}$价值（$k=1, 2, \cdots, 10\,000$）。

(4) 将这 10 000 个 $R_{\min,k}$的值画成直方图，得到它们的分布。

(5) 计算这 10 000 个 $R_{\min,k}$的值的平均值，这就是我们所求的最差情景下的损失的平均规模。另外，我们可以在这个关于 $R_{\min,k}$的直方图上直接“读出”1%的临界点的价值。

Boudoukh 等（1995）研究发现，如果收益率是服从 $N(0,1)$分布的，那么最大损失的平均价值（在 $H=100$ 天内）是－2.51%，另外最差情景分析 1%的临界点上 $R_{\min}$的值是－3.72%。当然，毫不奇怪的是，得到的后面两个数字要比一般的 VaR 的方法所得到的－2.33%要大，因为最差情景分析所研究的仅仅是在左边的尾部的几种情况。很明显，最差情景分析的方法暗示着人们需要持有（与标准的 VaR 方法所得到的结论相比）更多的资产，这主要是因为它包含了一个更加保守的风险目标。当投资组合中包含有期权的时候，投资组合的 VaR 就是非线性的，那么在最差情景分析下 1%的分位点处的价值可能要远远超过一般的 VaR 的测度（例如 Boudoukh 等所提到的 1%的 VaR 是－17.8%，而 1%的最差情景分析的价值却是－27.2%）。

第25章

信用风险

学习目标

- 结合 J.P. 摩根的 CreditMetrics 来分析衡量**信用在险价值**(C-VaR)的方法。这种方法利用已经公布的信用评级计算在不同评级之间变化的(联合)概率，以及在这些“新的”评级状态下银行资产的价值。这使我们可以解析地计算 C-VaR。但更实际的方法是通过**蒙特卡罗模拟**方法，我们可以获得信用损失的完全分布。
- 概述几种可以用于衡量信用风险的模型。这些模型包括 KMV 的 Credit Monitor Model，它通过使用期权理论计算违约频率，还有瑞士信贷的 Credit Risk Plus Model，这个模型利用基于保险的方法来计算违约风险，另外就是麦肯锡的 Credit Portfolio View，这个模型将违约概率与经济周期的状态联系在一起。
- 讨论处理公司债券之外其他资产信用风险的方法，比如**贸易信用**(trade credit)、**银行贷款**(bank loans)**以及贷款担保**(loan commitments)。

- 评价现行的监管制度，着重讨论 1988 年的**《巴塞尔协议》**（Basle Accord of 1988），这个协议对诸如银行贷款之类列入资本账户资产的信用风险规定了 8%的最小资本要求。（另外对于“交易账户”中的资产用巴塞尔“内部模型”或“标准化”方法进行处理，这些已经在前面章节中讨论过。）
- 介绍银行如何利用**风险调整后的资本收益率**（risk adjusted return on capital，RAROC）在不同的商业业务之间（比如银行贷款和商品交易等）进行比较，或者是在银行内的不同部门以及不同的银行之间进行比较。
- 介绍**次级债券**（subordinated debt）如何为银行的风险变化提供了一个“市场信号”，因此它可以帮助监管者决定要对哪个银行加强监督。
- 研究信用衍生品（credit derivatives）如何在不同的交易对手之间降低和“分散”信用风险。

我们在第 20 章中介绍了 1988 年《巴塞尔协议》中针对银行资产的信用风险所提出的资本充足度要求，它基于监管者对相对违约概率的主观看法。例如，G7 国家的政府债券的相对风险权重是零，然而所有公司的银行贷款的相对风险权重都是 1。但是如果假设在 G7 国家所有的私有公司的债券风险是相同的，或者政府债券的风险要低于那些评级为 AAA 的公司债券是有些不合理的。如果假设前者的风险比较小，那么银行将会将它们的贷款从企业债券转向政府债券，这样将会降低它们的资本要求。但是很多时候这可能会引起经济风险，因此《巴塞尔协议》的资本要求实际上可能会增加风险。在《巴塞尔协议》下，总的信用风险是对于银行的贷款投资组合的各个组成部分的信用风险的加总，因此不允许投资组合的风险分散效果。这就等价于我们假设信用风险的不同来源之间的相关系数是 1（是可加的）。

1997 年，J. P. 摩根（以及它的共同倡导者美洲银行和 KMV 公司以及瑞士联合银行等）提出了一种新方法来对信用风险进行衡量。他们所提出的方法是对《巴塞尔协议》的补充，因为它们注意到了对资产按市价估值时信用风险和分散化效果的重要性。“CreditMetrics”就用来描述这种新兴的方法的。从某种意义上来说，它是对 RiskMetrics 中一些概念的延伸，最终它会产生一个数字来描述一个投资组合中的资产（例如银行贷款和债券）总的信用 VaR。虽然这种方法在理论上是十分直接的，但是如果在实际中应用还是会出现很多的问题（最明显的问题就是数据不足），但是对于大多数的 G10 国家来说，这并不是不能克服的。

信用风险指的是当交易对手或是债务人的信用度发生变化的时候，投资组合的价值可能发生的变化。举个例子，假设你现在持有公司 A 的债券，如果在年末，公司 A 的评级从 AAA 下降到 BBB，那么由于公司 A 的信用度的下降，公司的债券的价值也会下跌。另一方面，如果公司 B 的信用评级从 CCC 上升到 BBB，那么它的债券价值可能会上升。如果这两个评级变化事件不完全正相关，那么当同时持有债券 A 和 B 的时候它们的总的信用风险的变化可能会小于各自的信用风险的价值变化的加总，因为投资组合存在（信用）风险分散的效果。这也是 CreditMetrics 的基本思想。这一章剩余的部分很大程度上是引用 J. P. 摩根 1997 年提出的理论，并且介绍了这种方法涉及的主要概念，包括：

- 计算在不同的信用评级之间发生变化的概率，以及在每种可能出现的信用评级下债券的

价值。

- 对于单一的债券和债券组合都采用标准差来作为对他们的 C-VaR 的量度。
- 如何计算在几种不同的评级之间发生变化的联合概率（可能性）。

在我们分析 CreditMetrics 的另外一些替代模型时，上面的思想可能十分有用，因为这些模型都要对单一债券或是债券组合的信用风险进行衡量。在某种意义上，这些模型（参见上文）的目的都是为了解决 CreditMetrics 方法中的某些局限性，但不幸的是，为了达到这个目的，他们本身也出现了一些问题。在这些领域，人们做了进一步的研究，但是还没有提出更好的解决方案。我们的目标就是向读者介绍一下这些模型的大体结构，希望能够引发读者的兴趣并关注这个领域的最新进展。

25.1 CreditMetrics 方法

我们经常利用信用评级来衡量信用风险的变化。例如，标准普尔给出的评级具有 8 个等级：AAA，AA，A，BBB，BB，B，C 以及违约。然而，在利用这些信用评级来衡量信用风险变化的时候，人们又提出了许多其他的问题。首先，信用收益率的分布具有非常严重的偏度（见图 25—1），假设我们考虑一个现在的评级为 BBB 的公司债券，如果它的评级上升为 A，AA 或是 AAA，那么信用风险的降低将会导致债券的市场价值的上升，但是可能并不会有大幅度的上升。另一方面，如果信用评级变化到 BB，B 或是 CCC，或者可能是彻底地变为违约的等级（虽然概率很小），就会导致相当巨大的损失。因此收益率的分布具有比较长的左尾（即具有非常大的偏度），也可能具有比较宽的左尾（与正态分布的情况相比）。因此这就导致我们不能很好地通过分布的标准差来恰当描述价值的变化，因而我们实际上需要进一步分析整个收益率的分布情况。正如我们将要看到的，对于大多数的实际情况来说，后者一般要求我们进行蒙特卡罗模拟的方法。

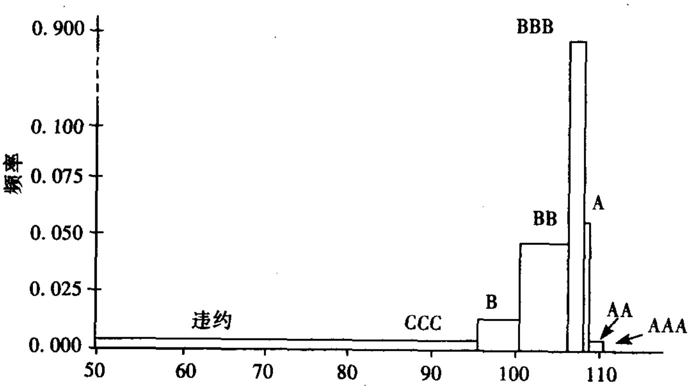


图 25—1　5 年期 BBB 债券在 1 年后的分布

资料来源：J. P. 摩根（1997）CreditMetrics™ Technical Document Chart 1. 2.

另外一个主要问题是我们可能无法找到足够而合适的数据来衡量在各个不同的评级之间变化的公司数量的相对比例。例如，我们有一个由10 000个公司组成的样本，并且知道它们在 1980—2000 年的信用评级情况。假设所有公司最初的评级都是 CCC，在每一年我们都能够得到公司评

级从 CCC 到违约的概率，记为 p（CCC 到 D），我们通常把它看做是 1 年的边际死亡率（marginal mortality rate）MMR_1。

$$\mathrm{MMR}_1=\frac{\text{在第 1 年就破产的最初的信用等级为 CCC 的债券的价值}}{\text{第 1 年所发行的最初的信用等级为 CCC 的债券的总的价值}}$$

然后我们就对所有的这些年的 MMR 进行平均，例如：

$$p(\text{CCC 到 D})\equiv \mathrm{AAMP}_1=\sum_{1980}^{2000} w_i \mathrm{MMR}_{1i}\quad \text{并且}\quad \sum w_i=1$$

其中，w_i 为在第 i 年发行的 CCC 债券的价值在所有 CCC 债券的总价值中所占的比例。这就是我们在计算 CCC 债券转变为违约的债券的概率 p(CCC 到 D) 时所使用的平均值。我们可以通过反复计算这个初始评级为 CCC 的债券变化为其他可能的信用级别的概率，最后就能得到其他转变的概率，比如说 p(CCC 到 AAA 等)。类似地，我们可以对最初信用级别为其他等级的债券重复上面的计算，这样就可以总共得到 64 个(=8×8)经验转移概率。因此 CreditMetrics 使用的是无条件的（或者历史的）概率，并且是通过“平均数据”来进行的，这个模型假设在任何一年的转移概率都与前一期的情况独立（即假设转换信用等级的概率服从一个一阶马尔可夫过程）。

尽管对 CreditMetrics 不是必须的（不过对下面我们所讨论的一些模型是如此），但要注意，我们还可以计算两年的 MMR：

$$\mathrm{MMR}_2=\frac{\text{在第 2 年破产的最初的信用等级为 CCC 的债券的价值}}{\text{第 2 年开始存在的信用等级为 CCC 的债券的总的价值}}$$

因此相应的生存概率就是 $\mathrm{SR}_i=1-\mathrm{MMR}_i$，累积的死亡率可以由下式给出：

$$\mathrm{CMR}_k=1-\prod_{i=1}^{k}\mathrm{SR}_i$$

它给出了从现在到第 k 年的累积违约概率。

我们所做的任何分析都应该考虑到在信用评级的变化之间可能会存在正的相关性（但是往往不是完全的正相关）。例如，经济环境总体上升，可能会导致在这年年末最初的评级为 BBB 和 A 的债券的评级都会上升。然而，由于有一些评级的变化在过去并不是经常发生的，比如说一个最初的评级为 AAA 或是 BBB 的债券在一年内变为违约债券的可能性，因此这类相关系数的计算可能会存在很大的不确定性。另外，我们要任意选择一个风险时期，通常是 1 年，这样获得数据会具有可行性。另外一个问题是当债券的信用评级发生变化时，怎样来衡量这个债券价值的潜在变化。下面我们首先忽略取得数据时可能出现的问题，在假设可以获得足够数据的前提下，集中研究如何计算 C-VaR。最后，如果我们要对一个 C 级债券的信用风险进行衡量，那么如果只是衡量 C 级公司的银行贷款的信用风险就不很恰当。这是因为债券的评级所衡量的是这个 C 级公司的整体表现，但是银行贷款的信用风险却还要取决于贷款抵押品等因素。

现在我们需要指出一些在计算 C-VaR 时所需要的基本统计概念，即假设我们可以用标准差来准确描述 C-VaR。(标准差确实有一定作用，即使给定的价值变化的分布是非正态的，下文将讨论这一问题。)。假设一个现在为 B 级的债券在第 1 年结束后只可能会出现三种状态中的一种：这个债券的评级可能变化为 A，或者是违约，或者维持在 B，并且这三种情况的概率都是已知的，我们假设用 p_i 来表示（$i=1$，2，3，)。再进一步假设在这几种不同的状态下年末债券的价值将会为 V_i（$i=1$，2，3，)。那么这份债券的预期价值和标准差（在第 1 年的年末）将分别为：

$$V_m = \sum_{i=1}^{3} p_i V_i \tag{25.1}$$

$$\sigma_v = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} p_i (V_i - V_m)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} p_i V_i^2 - (V_m)^2} \tag{25.2}$$

那么，回想我们关于市场风险 VaR 的理论（在前面的章节中提到），标准差对这个债券在一年内的信用风险提供了一个度量（虽然在一定程度上说来是一个比较粗略的量度）。不幸的是，我们现在不能认为对于债券来说在 5%的分位点上的 C-VaR 的值是 $V_m - 1.65\sigma_v$，因为信用风险并不是正态分布的，然而每年 σ_v 的变化在一定程度上预示着信用风险变化的趋势，因为在尾部的分布可能并不会发生根本性的变化，它的变化完全独立于 σ_v 的变化。

转移和估值

我们现在来研究对单个债券进行计算的细节，然后再研究对于一个由两种债券构成的组合的计算。我们在前面已经提示了如何将这种分析扩展到对于一个包含很多种资产的投资组合的信用风险的衡量。为了使计算相对简化，我们假设只有三种可能的状态，比如说是评级为 A，评级为 B 或者是违约 D。

假设我们所研究的金融机构最初所持有的是优先偿还债券，它现在的息票利率是 6%，距到期日还有 7 年，并且是一个现在的评级为 A 的债券。我们衡量信用风险的时期是从现在开始到 1 年以后。我们可以利用历史数据来分别计算这个原本为 A 级的债券在接下来的 1 年里保持在 A 级或是变化为 B 级，或是变为违约的比例。例如在一个 10 年的期限内通过每年得到1 000个观察数据的样本，我们可以发现，平均说来这个本来为 A 级的债券继续保持 A 级的比例大约是 92%，变为 B 级的比例大约是 7%，而违约的比例大约为样本的 1%。在表 25—1 中描述变化情况的矩阵中详细给出了这些概率 p_i。

表 25—1 **转移矩阵（单一债券）**

初始评级	概率：年末的评级			总和
	A	B	D	
A	$p_{A,A}=92$	$p_{A,B}=7$	$p_{A,D}=1$	100

很明显，最具灾难性的事件是直接违约。然而，即使在这种情况下，投资者也能通过变卖公司的资产来得到一定的支付。这些支付的多少主要取决于债券的优先等级，关于“谁会得到什么，以及以什么顺序得到”的问题都会在债券条款中明确规定（即某种特定债券的基本法律条件）。表 25—2 给出了回收率的数字，表明优先抵押债券的平均回收率是 54%，而低级次级债券的回收率却只有 17%。还要注意到在这些平均的回收率之间存在着很大的不确定性，这从标准差可以看出（我们一般用它来描述我们的 C-VaR）。例如，如果一个最初评级为 A 的债券是优先未抵押债券，那么它的回收率只有它的面值（假设是 100 美元）的 51%。因此回收值是 $V_{A,D}=51$ 美元（每 100 美元的面值）。另外值得注意的是，还有一些研究发现平均回收率可以高达 80%（参见 Asarnow 和 Marker，1993 以及 Saunders，1999），这又一次说明了这些估计值存在极大的

不确定性。

表 25—2　　**违约后的回收率（用面值的百分比计算）**

优先级别	平均值	标准差
优先抵押	53	27
优先无抵押	51	25
优先次级	38	24
次级	33	20
低级次级	17	11

第 1 年末债券的市场价值是它的未来息票流以及到期价值的现值。对于一个 A 级的债券有一系列的远期利率（它们可以通过现在的公司债券即期利率计算得到）可供应用。这些远期利率可以看做是市场对于未来的即期利率的最好的预测（假设预期理论成立），在表 25—3 中我们给出了 A 级和 B 级债券的情况。对于 A 级债券来说，它的远期利率要低于 B 级债券，这正反映了 A 级债券的信用风险要比 B 级债券的信用风险小。

表 25—3　　**1 年期远期零息债券的曲线**

信用评级	f_{12}	f_{13}	f_{14}
A	3.7	4.3	4.9
B	6.0	7.0	8.0

注：f_{12}表示应用于第 1 年末到第 2 年末的远期利率，等等。

最初为 A 级的债券距到期日的时间是 7 年，如果我们假设这个 A 级债券保持为 A，那么在第一年末，它的价值是多少呢？假设这个债券在第一年末支付 6%的息票，另外还有 6 次相同的息票支付以及在到期日支付的面值 100 美元：

$$V_{A,A}=6\text{ 美元}+\frac{6\text{ 美元}}{(1.037)}+\frac{6\text{ 美元}}{(1.043)^2}+\frac{6\text{ 美元}}{(1.049)^3}+\cdots+\frac{106\text{ 美元}}{(1+f_{17})^6} \tag{25.3}$$

其中，折现利率是 $f_{12}=3.7\%$，$f_{13}=4.3\%$等。然而，如果我们假设它的评级变化为 B，那么它的价值就会随之变化为

$$V_{A,B}=6\text{ 美元}+\frac{6\text{ 美元}}{(1.06)}+\frac{6\text{ 美元}}{(1.07)^2}+\frac{6\text{ 美元}}{(1.08)^2}+\cdots+\frac{106\text{ 美元}}{(1+f_{17})^6} \tag{25.4}$$

其中所使用的远期利率是针对于 B 级债券的利率。如果债券的评级从 A 变化到 B，那么它的价值将会下降，因为在计算 PV 的公式中使用了更高的（远期利率）折现因子。我们可以通过上面的假设计算得出：

$$V_{A,A}=109\text{ 美元}\qquad V_{A,B}=107\text{ 美元}$$

C-VaR：单一债券

对于最初评级为 A 的债券，我们可以得到它的评级变化的概率 p_i 以及在年末与之相关的债

券的价值，我们用 V_i 来表示（见表 25—4），我们可以利用很多方法来计算 C-VaR。首先我们来看一种通过标准差进行计算的方法。

表 25—4　　概率和债券的价值（初始为 A 级的债券）

年末评级	概率	价值（美元）
A	$p_{A,A}=92$	$V_{A,A}=109$
B	$p_{A,B}=7$	$V_{A,B}=107$
D	$p_{A,D}=1$	$V_{A,D}=51$

注：对于初始为 A 级的债券，平均值和标准差分别为 $V_{m,A}=108.28$，$\sigma_{V,A}=5.78$。

我们可以直接在年末计算平均值和标准差：

$$V_{m,A}=\sum_{i=1}^{3}p_iV_i=0.92(109\text{ 美元})+0.07(107\text{ 美元})+0.01(51\text{ 美元})=108.28(\text{美元}) \tag{25.5}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{v,A}&=\sqrt{\sum p_iV_i^2-V_{m,A}^2}\\&=[0.92(109\text{ 美元})^2+0.07(107\text{ 美元})^2+0.01(51\text{ 美元})^2-108.28^2\text{ 美元}]^{1/2}=5.78(\text{美元})\end{aligned} \tag{25.6}$$

其中，$i=1$，2，3 所对应的分别是评级为 A，B 和 D 的债券（注意我们要衡量的是相对于未来期望价值 $V_{m,A}$ 的标准差）。另外一种可选择的方法是假设债券保持在 A 级，利用平均价值 $V_{A,A}=109$ 美元对它的风险进行衡量。

上面的计算假设在上面所提到的每种风险状态下债券的价值都是已知的并且没有任何不确定性。然而在实际中，我们只能得到在每种状态下可能出现的情况的一个概率分布（假设所有的公司最初的评级都是 A）。如果在每种情况下这三种情况的波动率分别可以用 σ_i 来表示，那么上面的公式可以重新改写为

$$\sigma_v=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}p_i(V_i^2+\sigma_i^2)-V_m^2} \tag{25.7}$$

通过对违约债券回收率的经验研究，我们可以得到相对于平均回收率的波动率，如表 25—2 所示。对于 A 级优先未抵押债券，$\sigma_3=25\%$。对于没有违约的债券，我们缺少相关的数据，只好设标准差为零，$\sigma_1=\sigma_2=0$。因此，对于 σ_v 更精确的衡量是把方程（25.6）中的 $0.01\ (51)^2$ 替换为 $0.01\ [\ (51)^2+\ (25)^2]$，从而反映债券价值在违约状态中的不确定性（J. P. 摩根，1997）。

对于非正态分布，标准差并不是一个特别好的风险量度。另外一种可行的方法是通过做出分布的直方图，利用某些特殊的分位点来计算 C-VaR。例如，假设我们选择了 5% 的临界点来计算 C-VaR，在表 25—4 中我们研究了从评级为 D（概率为 1%）到评级为 B 的情况（概率为 7%），违约或是评级为 B 的联合概率就是 8%(1%+7%)，这个数字超出了我们所假设的临界点 7%。因此在这种情况下，我们可以直接读出 C-VaR 的估计值就是 107 美元，这要比年末的平均值 $V_{m,A}=108.28$ 少 1.28 美元。当然，由于我们只考虑了三种风险状态，因此我们在 5% 的分位点处的估计是十分粗糙的。我们要注意到，一般说来，从完全分布函数得到的 5% 分位点一般不同于 $1.65\sigma_{v,A}$，因为投资组合收益率的分布一般都不是正态的。我们可以再选取一个最初为 B 级的

债券重复上面的计算，其中它的评级变化的概率以及在年末的价值都由表 25—5 给出。我们可以得到它的年末价值的平均值和标准差为：

$$V_{m,B}=95.01\text{ 美元}\qquad \sigma_{v,B}=12.19\text{ 美元}$$

表 25—5　　**概率和债券的价值（初始为 B 级的债券）**

年末评级	概率	价值（美元）
1.　A	$p_{B,A}=3$	$V_{B,A}=108$
2.　B	$p_{B,B}=90$	$V_{B,B}=98$
3.　D	$p_{B,D}=7$	$V_{B,C}=51$

注：对于初始为 B 级的债券，平均值和标准差分别为 $V_{m,B}=95.0$，$\sigma_{v,B}=12.19$。

C-VaR：债券组合

现在我们将前面的分析扩展到一个演示性的由两种债券构成的投资组合：

一种最初评级为 A 的优先无担保债券（6%的息票利率，偿还期为 7 年）

一种最初评级为 B 的优先无担保债券（5%的息票利率，偿还期为 6 年）

在这里为了简单起见，我们还是假设在第 1 年年末风险状态只有三种情况：A，B 和违约 D。年末每一种评级状态下债券的价值都可以通过选用适当的远期利率进行计算。表 25—4 和表 25—5 分别概括了对于初始 A 级和初始 B 级的两种债券的计算结果。在年末这两种债券所构成的组合可能出现 9 种情况。例如，如果这两种债券都保持它们原有的评级 A 和 B，那么这个组合的价值就是 207 美元（$=V_{A,A}+V_{B,B}=109$ 美元$+98$ 美元）。在表 25—4 和表 25—5 中我们还给出了在其他几种情况下债券组合的价值，并且在表 25—6 中给出了总结。

表 25—6　　**年末可能出现的价值（两种债券）**

债务人 1（初始 A 级）		债务人 2（初始 B 级）		
		1.　A	2.　B	3.　D
		$V_{B,A}=108$	$V_{B,B}=98$	$V_{B,D}=51$
1.　A	$V_{A,A}=109$	217	207	160
2.　B	$V_{A,B}=107$	215	205	158
3.　D	$V_{A,D}=51$	159	149	102

注：在中间那个 3×3 的矩阵中，第 i 行第 j 列的值是相应的行和列中的值的加总（例如，对于 D，102=51+51）。

联合概率分布

对于分别考虑的每种债券信用等级的变化，我们可以从**信用转移矩阵**中的某一行读出（见表 25—7），因此初始为 B 级的债券有 3%的概率变化为 A，有 90%的概率保持为 B，另外还有 7%的概率在下一年内违约。我们现在要解决的问题是如何计算这 9 种可能出现的情况的联合概率分布。如果我们假设每个债务人（比如初始 A 级）在年末以何种状态结束与另外一个债务人（比如初始 B 级）的状态相互独立，那么联合概率的计算非常简单直接。例如，如果给出表 25—7 中

的数据我们就可以得到每种债券都不改变它们各自评级的概率（在这一年结束的时候）为：

表 25—7　　评级转移矩阵：p_{ij}（%）

初始评级	年末评级			合计
	1. A	2. B	3. D	
1.　A	92	7	1	100
2.　B	3	90	7	100
3.　D	0	0	100	100

注：如果信用评级从违约等级开始的话，变到其他评级的可能性是零，维持违约等级的概率是 100%。

最初评级为 A 的债券还维持在评级为 A 并且同时最初评级为 B 的债券还维持在评级为 B 的联合概率＝评级为 A 的债券维持在评级 A 的概率×评级为 B 的债券维持在评级为 B 的概率

$$0.828=0.92\times0.90 \tag{25.8}$$

如果我们把评级为 A 的债券记为债券 1，那么对 $j=1,2,3$ 这三种风险状态，它的评级转移概率就可以表示为 $p_{1j}(j=1,2,3)$。类似地，我们把评级为 B 的债券记为债券 2，那么也可以用 p_{2j} 来表示它的评级转移概率。我们假设信用等级的变化之间相关系数为零，那么其他的联合概率分布同样可以计算出来，并且我们把结果列示在表 25—8 中，其中我们假设各种可能出现的评级变化之间的相关系数是零。因此在中间的那个 3×3 矩阵中的数据就是在相应的行和相应的列中的数字的简单乘积。例如，通过方程（25.8），我们可以得到在年末，两种债券都处于违约等级的联合概率是 $\pi_{33}=p_{13}p_{23}=0.7\%$（$0.07\times0.01\times100\%$）。联合概率分布的主要特点（见表 25—8）是：

表 25—8　　联合概率分布：π_{ij}（%）

债务人 1（初始 A 级）		债务人 2（初始 B 级）		
		1.　A	2.　B	3.　D
		$p_{21}=p_{A,B}=3$	$p_{22}=p_{B,B}=90$	$p_{23}=p_{B,D}=7$
1.　A	$p_{11}=p_{A,A}=92$	2.76	82.8	6.44
2.　B	$p_{12}=p_{A,B}=7$	0.21	6.3	0.49
3.　D	$p_{13}=p_{A,D}=1$	0.03	0.9	0.07

注：在中间这个 3×3 的矩阵中，所有联合概率之和为 1，并且联合的信用等级转移概率为 $\pi_{ij}=p_{1i}p_{2j}$（其中，1 代表最初信用等级为 A 的债务人，2 代表最初信用等级为 B 的债务人）。我们假设概率是相互独立的，因此，（比如）对于最下面一行右端的情况来说：$\pi_{33}=p_{13}p_{23}=0.07\%=0.07\times0.01\times100\%$。我们对每个概率都进行了记录（比如说 $p_{12}=7\%$）。最左端的数字等于这一行的数字的加总，（例如，92=2.76+82.8+6.44），顶端的数字等于这一列的数字的加总（例如，$p_{22}=90\%$）。

- 最可能出现的状态是每种债券都维持在最初的评级上（例如，债券 1 维持评级为 A 以及债券 2 维持评级为 B，$\pi_{12}=p_{11}p_{22}=P_{AA}P_{BB}=82.8\%$）。
- 变化后的评级偏离最初的评级越大，发生这种变化的可能性越小。
- 每一行或者每一列的总和等于每种债务单独存在时发生变化的概率。例如，第 3 行的总和一定等于 $p_{23}=7\%$，也就是单独考虑债务 2（最初的评级为 B）时，它的违约（状态 3）概率。

标准差

我们现在研究怎样衡量由两种债券组成的投资组合的 C-VaR，这种情况下对于平均值和标准差计算的基本方法与单一债券的方法相同，区别仅仅在于现在出现了 9 种可能的结果。因此公式相应的变化为

$$V_{m,p}=\sum_{i,j=1}^{3}\pi_{ij}V_{i,j}=203.29(\text{美元}) \tag{25.9a}$$

以及

$$\sigma_{v,p}=\left[\sum_{i,j=1}^{3}(\pi_{ij}V_{i,j}^{2})-V_{m}^{2}\right]^{1/2}=13.49(\text{美元}) \tag{25.9b}$$

其中，π_{ij} 指的是在表 25—8 中间那个 3×3 的矩阵中的联合概率分布，是在年末几种可能出现的状态下相关的投资组合的价值。注意到这个联合概率分布 π_{ij} 不同于我们所提到的转移概率（例如，$p_{13}=p_{A,D}$等），只是与它有一定的相关性。投资组合价值的平均值是 $V_{m,p}=203.29$ 美元，这可以通过把债券 A 和 B 在单独考虑时的价值直接的加总得到 $V_{m,p}=V_{m,A}+V_{m,B}$。但是同时我们可以发现投资组合的方差 $\sigma_{v,p}=13.49$ 美元，这个数值要小于两个债券单独的标准差的总和 $\sigma_{V,A}+\sigma_{V,B}=5.78$ 美元+12.19 美元=17.97 美元，原因在于我们的投资组合具有一定的分散效用（即 $\rho<+1$）。

> 公司债券组合的 C-VaR 取决于以下几个因素：
> (1) 在每种风险状态之间发生转移的联合概率；
> (2) 在这些可能的风险状态之下债券的价值。
> 一般说来，由于投资组合的分散效用，债券投资组合的 C-VaR 要小于每个债券单独的 C-VaR 的简单加总。

分位点水平

我们可以利用 $\sigma_{v,p}$来粗略地刻画投资组合的 C-VaR，然而，如果分布不是正态的，那么利用分位点来衡量 C-VaR 可能是更好的方法，通常在 CreditMetrics 中我们使用的是 1%的分位点。我们必须要计算一些特定的投资组合的价值，因此所有小于这个值的价值出现的可能性总和等于 1%。原则上，我们把表 25—6 中的 V_{A+B}的价值从低到高进行排序，然后将它们的联合概率进行加总（数据从表 25—8 中得到），直到达到 1%：

$$V_{A+B}=\{102\text{ 美元},149\text{ 美元},158\text{ 美元},159\text{ 美元},\cdots,217\text{ 美元}\}$$

$$\pi_{ij}=\{0.07,0.9,0.49,0.03,\cdots,2.76\} \tag{25.10}$$

因此，在最接近于 1%的临界点得到的价值是 149 美元，这时的 C-VaR 是 54.29 美元，（$=V_{m,p}-149$ 美元=203.29 美元－149 美元）。注意我们衡量 C-VaR 时进行比较的是在年末的期望价值而并不是在 t=0 时刻的最初始的价值。在图 25—2 中我们给出了关于 C-VaR 计算中的一些总结，我们要知道债券最初的评级，然后再来计算 C-VaR，我们需要计算的有：

- 信用评级的转移概率；
- 债务人（债券）违约时的价值（这要取决于债券的优先等级）；
- 在任何一个新的信用评级之下债券的价值（其中具有息票支付的债券要通过相对于新的信用评级的 1 年期的远期利率来重新进行估值）；
- 或者我们可以计算年末的投资组合的标准差，或者是应用一个特定的分位点水平。

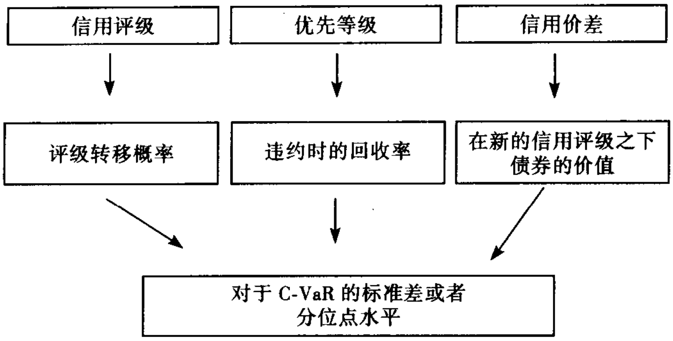

信用评级
优先等级
信用价差
评级转移概率
违约时的回收率
在新的信用评级之下债券的价值
对于 C-VaR 的标准差或者分位点水平

图 25—2　对于 C-VaR 的计算

更进一步的讨论

在 CreditMetrics 中，我们衡量信用风险的时期是 1 年（因为我们得到的评级数据通常是 1 年期的），但是对于一些信用风险工具（例如互换），所对应的时期可能会更短一些。然而，C-VaR 的量度并不能在不同的时期上直接加总。尽管这样，对所有的信用风险工具利用 1 年的时期可能仍然是很有用的，因为它准确地给出了出现超额信用风险的定性信号（例如，可以卖出那些信用评级降低的债券）。另外一种方法就是我们可以通过假设债券的信用评级的变化服从一个数学过程比如说是马尔可夫过程，这样就可以推断出对于不是 1 年的情况下的转移概率（参见附录 25.1）。

关于 C-VaR 计算的一个有用的结果就是**边际风险**（marginal risk）的概念。如果我们考虑这样一个情况，在我们的投资组合中加入一个新的债券，那么这时我们想知道的就是这个新的债券给我们的投资组合带来了多少新的风险。这里，我们利用标准差来衡量风险，假设我们持有债券 A，它的标准差为 $\sigma_{v,A}=5.87$ 美元（见表 25—9）。如果我们现在向投资组合中加入一个新的债券 B，那么 A+B 组合的 C-VaR 就是 13.49 美元。因此风险的增加也就是债券 B 的边际风险 7.62 美元（$=\sigma_{A+B}-\sigma_A=13.49$ 美元-5.87 美元），这个数值要比单独衡量它们的时候小得多，例如债券 B 的标准差就是 $\sigma_{v,B}=12.19$ 美元。这也是由于分散作用的结果（即 $\rho<+1$）。

表 25—9　　**边际风险**

债券类型	标准差
A	5.87
B	12.19
A+B	13.49
债券 B 的边际风险	7.62

注：将债券 B 加入到债券 A 之后的边际风险是 7.62 美元（$=\sigma_{A+B}-\sigma_A=13.49-5.87$），这要比单独考虑债券 B 时的风险 $\sigma_B=12.19$ 要小，这是投资组合对风险的分散作用的结果。

计算**投资组合的边际标准差的比例** σ_{A+B}/μ_{A+B} 是非常有用的，同时还可以与 σ_A/μ_A 来进行比

较，据此可以看出债券 B 对于投资组合的风险的贡献，并且可以调整投资组合中的两个债券的规模。观察图 25—3 中的图像，它绘出了当每个公司加入这个投资组合时的边际标准差 MSD：

$$\mathrm{MSD}=(\sigma_{p+i}-\sigma_p)/\mu_i \tag{25.11}$$

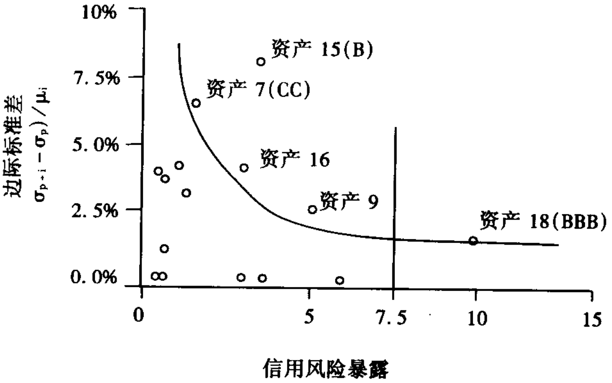


图 25—3 边际风险和信用风险暴露

资料来源：J. P. 摩根（1997）CreditMetrics™ Technical Document Chart 1. 2.

其中，σ_{p+i}为当投资组合中包含了资产 i 的时候的信用风险标准差，另外 μ_i 所表示的是在年末时资产 i 的风险暴露的平均值。图像所描述的是具有相同绝对边际风险（$\sigma_{p+i}-\sigma_p$）的各种资产。资产 7（CC 级）具有比较低的风险暴露和比较高的边际风险，因为它的风险非常高，评级非常低甚至可能违约。资产 18（BBB 级）的边际风险与资产 7（CC 级）是相同的，但是对于这个 BBB 级的公司，它出现比较高的边际风险的主要原因是由于它的风险暴露比较大（即 μ_{18} 非常大），而不是由于它向更低的信用评级变化的可能性。如果我们把资产 7 或者是资产 18 排除出我们这个投资组合，对于整个投资组合的风险的降低的效果是相同的（但是原因却不同）。资产 15（B 级）具有非常高的绝对边际风险，这并不是由于它具有比较高的风险暴露价值（μ_{15}）而是因为它与投资组合中其他资产之间具有非常高的正相关性。

实际上，我们可能更加关心资产 15，因为它具有一个非常大的绝对风险（例如，它可能是一个“堕落的天使”，它的高暴露发生在它的信用评级降低之前）。接下来，资产 18 也引起我们的关注，因为它的风险暴露也非常大，如果它违约，会明显地降低投资组合的价值。资产 7 违约的可能性也非常大，但是它的风险暴露比较小，因此我们不会非常担心这份资产的表现。然而，资产 7 和资产 18 哪个更重要，需要我们进行判断。在实际操作中，信用管理者通常对于一个债务人设定一个绝对风险暴露的上限 μ（图 25—3 中的垂直线）并且允许持有各种出现在 X—Y 曲线之下并且在这个垂直线左侧的资产。其他资产应该在二级银行贷款市场上出售或者进行证券化。

25.2 衡量联合信用转移

上面讨论两种资产的投资组合时最关键的因素就是计算联合概率分布。由于信用评级的变化很可能与整个经济环境变化具有相同的趋势（例如经济萧条时所有水平的债券的评级都可能会下降），因此信用评级变化的相关系数可能是正的（在同一个国家）。CreditMetrics 提供了一种计算

这些相关系数的方法，以及基于所观测到的股票收益率计算联合转移概率的方法。下面我们将讨论这些问题：

CreditMetrics 中一个最重要的实际问题是怎样估计信用转移的相关系数（而在简化的讨论中，我们简单地对于所有的相关系数都假设了 0 或者 1 两个值）。解决这个问题有三种最基本的方法：

- 利用关于联合信用转移的历史数据；
- 利用债券价差数据；
- 利用资产估值的方法。

信用转移数据

联合信用转移的方法从概念上说十分简单，假如我们得到了 15 年来关于1 000家最初评级为 A 的公司的历史数据序列，以及另外1 000家最初信用评级为 B 的公司的历史数据序列。在接下来的任何一年中，A 级和 B 级的公司中大部分都会维持在原有的信用等级上，因此信用评级变化的相关系数都是非常小的。然而在这一年内同时也会存在一些评级为 A 的公司评级降低为 B，也会有一些评级为 B 的公司的评级上升到 A。我们可以通过这 15 年的历史数据，得到这些每年发生的信用评级变化的样本相关系数 ρ（A→B；B→A）。当我们有 8 种可能的信用类别以及在每种类别下一个约1 000个公司的样本，问题就会出现。我们不得不观察数据中所有可能的成对相关系数，对于转移矩阵中的 N 个观测值，要涉及 N^2 个联合转移的可能观测值。这种直接衡量信用转移概率和相关系数的优势在于我们不需要对这些信用评级的变化假定某个特殊的分布。而这个方法的缺点就是我们对同一个信用评级中的每个公司没有区别对待（例如一个评级为 A 的银行与一个评级为 A 的制造业公司之间以及两个评级为 A 的银行之间是没有区别的），并且在实施这种方法的时候要求非常多的历史数据以及非常复杂的数据处理过程，而前者通常不是那么容易获得的。

债券价差数据

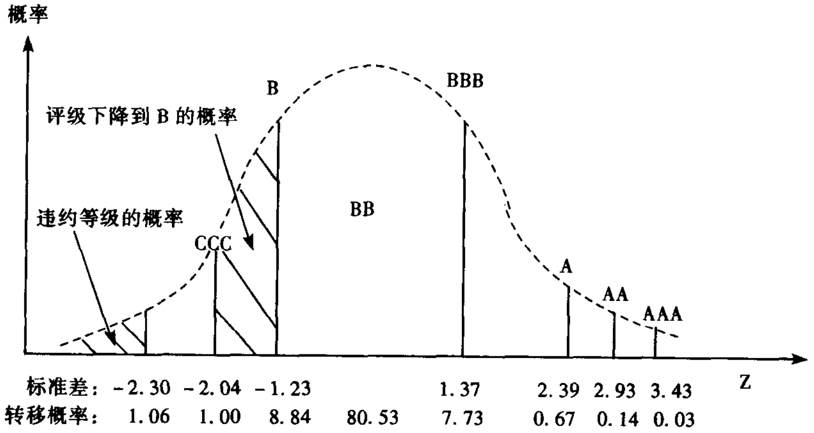
这种方法隐含的主要观点是，两个公司之间的信用（收益率）价差的变化反映了它们的信用质量的变化。在两个 AA 级和 BB 级的债券之间的信用价差就是它们的收益率之间的差异 $y_{BB}-y_{AA}$。如果这个 BB 级债券相对于 AA 级债券的风险有所上升，那么价差就会上升。因此有风险债券间的相对收益率变化就反映了市场对它们的相对风险的评价。我们可以通过债券定价模型从观测到的信用（收益率）价差的变化中“提取”出债券信用等级变化的概率，进而得到它们的相关系数。然而，这个方法的一个主要的缺陷就是我们可能很难得到关于信用价差的质量足够好的数据，对于那些信用评级比较低的债券，这些数据尤其难以得到。但是这种方法还是在很多地方得到了提倡，很明显，它将信用评级的变化与一个可以观测到的变量（即价差）联系到了一起，而这个变量很显然与信用质量的变化具有密切的联系。

资产估值方法

这种方法的基本思想与价差方法基本相同，只不过我们在这里假设股票价格的变动某种程度上反映了信用质量的变化，因此可以作为信用评级变化的一个信号指标。因此，如果我们发现两个公司（比如最初级别分别是 A 和 B）的股票收益率是高度正相关的（比如 $\rho_R=0.8$），那么我们就可以用这两种资产收益率之间的相关系数来映射它们的信用评级变化之间的相关系数，从而就可以描述信用评级变化的可能性。例如，如果 $\rho_R=0.8$，我们或许就可以据此估计出公司的评级从 A 变化到 BB 以及评级从 B 变化到 CCC 级的相关系数是 0.2%，而联合转移概率是 0.8%。

我们在图 25—4 中以一个最初评级为 BB 的债券为例对此解释。这个 BB 级公司的股票收益率下降得越厉害，它的信用等级也就下跌得越厉害，但是在某个收益率区间，它的评级不会变化。对于一个最初评级为其他级别的债券，我们也可以利用相似的分布来解释。但是这个联合概率是怎样得到的呢？一个最方便（但并不是很实际）的假设就是让所有的资产的收益率都是正态分布的，并且我们有一个已知的估计出的协方差或是相关系数矩阵。注意这里的 ρ_R 是股票收益率的相关系数，而不是信用评级变化的相关系数。我们可以得到足够的数据来估计前者，并且可以找到一个从股票收益率相关系数 ρ_R 到信用评级变化的概率 π_{ij} 的映射（一个“方程”）。为了说明这个过程，我们假设已经（通过利用 15 年内一个包含了1 000家最初信用评级为 BB 的公司的样本）计算出了从一个 BB 级债券变化为违约的概率是 1.06%。那么通过图 25—4 可以得到

$$\Pr(\text{违约})=\Pr(R<Z_{\text{Def}})=\Phi(Z_{\text{Def}}/\sigma)=1.06\% \qquad (25.12)$$



我们假设(为了方便)这个最初评级为 BB 的公司的股票收益率平均值为零。

图 25—4　评级变化的概率：最初评级为 BB 的债券

其中，P_r 为“概率”，R 为股票的收益率（为了便于说明，我们假设它的期望值是零），$\Phi(.)$表示一个标准正态分布的累积分布函数，σ 是一个最初评级为 BB 的公司股票收益率的波动率。我们可以利用这个式子反求出 Z_{Def}（见图 25—4）：

$$Z_{\text{Def}}=\Phi^{-1}(1.06\%)\sigma=-2.30\sigma \qquad (25.13)$$

这个反求的过程可以通过 Excel 或者是其他的计算软件计算得出，例如命令可能是“Z=cdfni (0.0106)”，其中 cdfni 的含义是标准正态的累积密度逆函数，这样我们得到的输出结果就是 $Z=-2.30$。因此一旦我们发现这个最初评级为 BBB 的债券的收益率的下降大于 -2.30σ 的时候，这个模型就告诉我们这个债券的信用评级可能会变为违约等级（见表 25—10 最后一行）。在得到 Z_{Def}之后，我们就可以继续计算其他的转移概率。假设我们所观测到的从 BB 级变化到 CCC 级的概率是 1.00%（见表 25—10），那么

$$\Pr(\mathrm{CCC})=\Pr(Z_{\mathrm{Def}}<R<Z_{\mathrm{CCC}})=\Phi(Z_{\mathrm{CCC}}/\sigma)-\Phi(Z_{\mathrm{Def}}/\sigma)=1.00 \tag{25.14}$$

因此

$$\Phi(Z_{\mathrm{CCC}}/\sigma)=1.0+\Phi(Z_{\mathrm{Def}}/\sigma)=2.06$$

以及

$$Z_{\mathrm{CCC}}=\Phi^{-1}(2.06)=-2.04\sigma$$

表 25—10　资产收益率的临界值以及评级的转移概率（最初评级为 BB 的债务人）

最终的评级	转移概率	临界值	资产收益率（临界值）
AAA	0.03	—	—
AA	0.14	Z_{AA}	3.43σ
A	0.67	Z_{A}	2.93σ
BBB	7.73	Z_{BBB}	2.39σ
BB	80.53	Z_{BB}	1.37σ
B	8.84	Z_{B}	-1.23σ
CCC	1.00	Z_{CCC}	-2.04σ
违约	1.06	Z_{Def}	-2.30σ

资料来源：J.P. 摩根（1997）table 8.4（amended）.

利用相类似的方法我们可以得到对于最初评级为 BB 的债券变化为所有信用等级时，标准正态情况下的临界点 Z_{B}，Z_{BB}，…，Z_{AAA}。我们在图 25—4 和表 25—10 中列出这些结果。我们可以单独考虑最初评级为 A 的债券，构建出一个与表 25—10 相似的表。

如何进一步计算联合概率分布呢？我们可以考虑最初评级分别为 BBB 和 A 的债券，并且它们的信用评级都下降了一个等级，也就是分别变化为 BB 和 BBB。记住，我们已经计算出了所有临界点的值 Z（对于任何两种债券）。因此对于这个最初评级为 BBB 的债券，它的收益率 R 的联合概率就位于 Z_{B} 和 Z_{BB}之间（因为它的信用已经下降了一个等级），同样的，对于最初评级为 A 的债券，这个概率就位于 Z_{BB}和 Z_{BBB}之间（因为它的信用也已经下降了一个等级）。这可以通过标准（二元）正态分布（含有两个变量）的性质计算得出。当知道了所有的 Z 之后我们就可以分别计算出方程（25.10）中的积分，我们用 Pr（BBB 到 BB 并且 A 到 BBB）来表示它，同时假设其值为$Y=0.8\%$：

$$\Pr\,(Z_{\mathrm{B}}<R<Z_{\mathrm{BB}},Z'_{\mathrm{BB}}<R'<Z'_{\mathrm{BBB}})=\int_{Z_{\mathrm{B}}}^{Z_{\mathrm{BB}}}\int_{Z'_{\mathrm{BB}}}^{Z'_{\mathrm{BBB}}}f(R,R',\textstyle\sum)\,\mathrm{d}R\mathrm{d}R'=Y\% \tag{25.15}$$

其中，$\sum$ 表示的是股票收益率的协方差矩阵，$f(R,R',\sum)$ 是这个二元正态分布的密度函数（Y 是这个二元正态分布曲线的积分值）。因此我们已经把这个由 $\sum$ 所表示的资产的收益率映射到

某个特定的“二重”信用评级变化的概率上。我们可以重复上述的过程，这样对于其他的 64(8×8)种情况我们也可以得到联合的转移概率，进而得到所有的联合概率分布 π_{ij}。

假设我们现在估计出了对于这两种债务人 64 种可能出现的联合概率 π_{ij}，而这是我们在对于两种债务来衡量 C-VaR 时所需要的全部输入变量（或者为了画出结果的直方图，或者为得到概括性的统计量，比如均值和标准差），然而，为了得到包含更多债务人的 C-VaR，我们就必须得到一个关于所有可能出现的成对的债务人（例如债务人 1 和债务 3 或者是债务人 2 和债务 3 等）完整的 64×64 的矩阵。如果存在很多的债务人，这个矩阵几乎无法实现，因此这时我们可以考虑采用另一种方法——蒙特卡罗模拟方法（我们将在下面对此讨论）。

从上面看来我们似乎没有考虑这两个债务人的信用转移矩阵的相关系数。然而它们都是暗含在上面的联合转移概率中的。例如，如果在单独考虑每种资产的情况下，它们违约的概率是 $p_1 = 1.06\%$，$p_2 = 0.06\%$（即个体的转移概率），那么它们两个违约的联合概率可以通过上面的方法计算得出，记做 π_{12}。那么我们就可以利用它来表示一个**违约相关系数**（default correlation coefficient），具体由下式给出：

$$\rho_{\mathrm{Def,Def}} = \frac{\pi_{12} - p_1 p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)(1-p_2)p_2}} \tag{25.16}$$

因此我们就从股票收益率的相关系数（假如说是 0.5），转换到联合转移概率，并且进而通过方程（25.16）来计算得到违约相关系数，它可能只有 2%。正如我们所预料的，它要比股票收益率的相关系数小得多。

进一步考虑，虽然在公式(25.12)至公式(25.15)中都包含了 σ（资产收益率的波动率），但是评级变化的联合概率分布实际上并不取决于这个 σ。可以考虑两个具有相同的信用评级（因此相同的转移概率）的债务人，但是他们的方差不同，满足 $\sigma^* = 2\sigma$。其中一个债务人具有两倍的资产收益率的波动率，但是它也表示资产收益率的临界值将会是另一债务人的两倍。因此在评级之间变化的概率对它们来说是相同的。这样做的结果就是我们可以使用标准化分布 N（0，1）的资产收益率，并且我们只需要衡量资产收益率的相关系数（这时不需要资产收益率的波动率 σ），就可以获得联合转移概率 π_{ij}。

世界上有无数行业，它们的股票之间的相关系数矩阵极为庞大，试图估计这一矩阵将是不可能完成的任务。因此 CreditMetrics 就将这些行业映射到了一些标准化的部门中去，例如，如果 XYZ 公司有 1 亿美元的债务，你需要将这份 1 亿美元的债务按照公司的风险暴露按比例分配到标准的 CreditMetrics 国家或行业中去。例如，XYZ 的销售额 40%在美国，60%在欧洲，并且有 30%在银行业以及 60%在金属工业。这些比例将会决定向 CreditMetrics 转移矩阵分类的映射。在上面这个例子中，就有 12%属于美国的银行业，24%属于美国的金属工业，18%是欧洲的银行业，36%是欧洲的金属工业（这也可以是我们在定义某个特定风险时的权重）。因此众多的债务人公司就被映射到数目相对较少的 CreditMetrics 中“相关系数收益”的分类之中。一旦我们知道了标准化的部门之后，很容易就可以计算出相关系数。例如，如果两个公司 A 和 B 的收益率取决于 $R_{\mathrm{A}} = 0.8R_{\text{化工}}$，并且 $R_{\mathrm{B}} = 0.7R_{\text{银行}} + 0.15R_{\text{保险}}$，那么就有相关系数 $\rho_{\mathrm{AB}} = (0.8\times 0.7)\rho_{\text{银行},\text{化工}} + (0.8\times 0.15)\rho_{\text{保险},\text{化工}}$。

映射和蒙特卡罗模拟

正如在计算市场风险（VaR）中的情况一样，我们在计算信用风险的时候也遇到了维度的问题。首先，对于 8 种评级情况和 N 个债务人，可能就会出现 8^N 种可能的信用评级变化的联合概率（注意，$8^N>32\,000$!）。因此，我们不去计算这个矩阵中的每一项，而是利用蒙特卡罗模拟的方法估计出组合信用价值的分布。其中所需要的新因素只是产生股票收益率。这个过程完整的步骤包括：

1. 单独考虑每一个债务人，得到资产收益率的临界值 Z（见图 25—4）。

2. 在蒙特卡罗方法的第一次迭代中，通过一个多元正态分布的模型产生一系列相关的资产收益率。

3. 对于我们在蒙特卡罗模拟中所产生的每一列资产收益率都计算一个特定的信用评级的转移。(例如，公司 1 从 BBB 变化到 CCC，公司 2 从 A 变化到 BB 等)。在这些新的信用评级下对投资组合重新进行估值，得到 $V_p^{(1)}$。

4. 重复步骤 2 和步骤 3m 次，这样就可以得到一系列的 $V_p^{(i)}$，并且对它们按照从低到高的顺序进行排列。那么就可以建立一个 1%的分位点。

考虑一个具有代表性的例子，包括三个公司，它们都具有优先抵押债券，并且最初的评级分别为 BBB，A 和 CCC（参见 J. P. 摩根，1997，第 10 章）。表 25—11 中给出了它们单独的评级转移概率，并且它们的资产收益率的临界值也在表 25—12 中给出。如果在蒙特卡罗模拟的第一次迭代中，我们得到的标准化的收益率分别为-2.0，-3.2 和$+2.9$，那么这些公司“新的”信用评级就分别为 BB，CCC 和 AAA（分别见表 25—12 中的第 1 至第 3 列）。我们可以对它们利用相应的远期利率曲线来重新估值，这样就可以得到蒙特卡罗模拟第一次迭代中投资组合的价值 $V_p^{(1)}$。我们可以将上述的过程重复 $m=10\,000$次，这样就可以得到一个足够好的对于 1%的分位点处最终组合价值（以及 C-VaR）的估计结果（另外大约只需要5 000个数据就可以得到一个关于 5%的分位点的比较好的估计值）。

表 25—11 单个公司的信用转移概率

年末的评级	单独的转移概率		
	公司 1（BBB）	公司 2（A）	公司 3（CCC）
AAA	0.02	0.09	0.22
AA	0.33	2.27	0.00
A	5.95	91.05	0.22
BBB	86.93	5.52	1.30
BB	—	—	—
B	—	—	—
CCC	—	—	—
违约	0.18	0.06	19.79
合计	100	100	100

资料来源：J. P. 摩根（1997），表 9.1。

表 25—12　资产收益率的临界值

临界值	公司 1（BBB）	公司 2（A）	公司 3（CCC）
Z_{AA}	3.54	3.12	2.86
Z_{A}	2.78	1.98	2.86
Z_{BBB}	1.53	−1.51	2.63
Z_{BB}	−1.49	−2.30	2.11
Z_{B}	−2.18	−2.72	1.74
Z_{CCC}	−2.75	−3.19	1.02
Z_{Def}	−2.91	−3.24	−0.85

注：Z 是一个标准正态分布的变量。例如，如果对于公司 1，标准化的资产收益率是－2.0，那么相应的信用等级就是 BB，因此，如果 $Z_B<R<Z_{BB}$，那么它新的信用等级就是 BB。如果在蒙特卡罗模拟的第一轮中我们得到的标准化的收益率是－2.0，－3.2，＋2.9，那么对于公司 1，公司 2 和公司 3 新的信用等级就分别是 BB，CCC 和 AAA。

当然，由于我们已经计算出了信用评级的变化和投资组合价值整体的分布，我们就也可以计算这个分布的各阶矩（例如平均值、标准差和偏度等）。对于一个很大的债务组合，如果债务人之间的关系与估计出来的相关系数相一致，那么为了模拟出组合的可能结果，MCS 是一个相当有效的方式。

对于边际信用风险的计算，比如说 1%分位点处的 C-VaR，就需要进行两次蒙特卡罗模拟，分别是关于包含资产 X 的投资组合和另外一个不包含资产 X 的投资组合。假设利用蒙特卡罗模拟方法计算出的不包含资产 X 的组合的 1%的分位点为 $\lambda_1\ (V_p)\ =1\ 000$ 万美元，而当资产 X 加入这个投资组合后，1%分位点是 $\lambda_1(V_p+X)=1\ 050$ 万美元，那么就有：

$$\text{债务人}-X\ \text{的边际信用风险}=X=\lambda_1(V_p+X)-\lambda_1(V_p)=500\ 000(\text{美元}) \qquad (25.17)$$

25.3　风险暴露的类型

到目前为止，我们仅仅是利用债券来计算 C-VaR。信用风险也可能是由于其他的风险暴露引起的，比如：

- 没有利息的应收账款（贸易信用）；
- 贷款以及贷款许诺；
- 信用证；
- 市场工具（互换和远期等）。

大体上，我们可以用与处理债券相类似的方法来处理这些类型的风险暴露。我们可以假设上述资产的信用转移概率和债券的信用转移概率类似。例如，我们假设如果一个最初 BBB 级的债券有 0.06（6%）的可能性变为 BB 级，那么任何以前 BBB 级的交易信用也都要降低为 BB 级。因此惟一的变化就是计算各个不同评级情况下的价值。下面我们还做出一个合理的假设，即**贸易信用**（trade credit）要么是能够全部收回（也就是在除了违约以外的其他的情况下），要么是在违约的情况下以确定的回收率收回。对于后者，如果没有适当的数据可以使用，那么我们就可以

使用公司发行的债券的回收率（由优先级债券的等级所给出）。因此贸易信用的支付可以看做是（一个）息票支付，并利用合适的远期利率重新进行估值。对于**未偿付贷款的估值**也可以利用相同的方法得到。

在处理**贷款承诺**（比如说允许在接下来的一年内最多贷款 1 000 万美元）的时候也会遇到一些问题，因为在这些贷款实际发生之前，它们都是表外业务。另外，当债务人的信用等级恶化的时候，也可能会导致附加的融资。但是关于各个信用等级以及违约等级所引发的融资百分比很难获得（可以参见 Asarnow 和 Marker，1993）。另外一种可以选择的方法就是我们做出一个保守的假设——可能导致 100%的融资。一旦我们做出了关于潜在的现金流的决策，那么就可以用合适的远期利率的曲线来对贷款许诺进行估值。

财务信用凭证（financial letter of credit）是一个资产负债表的项目，它给予债务人一个借款的权利，即使他的信用等级下降，这个凭证也是有效的。一种比较保守的计算方法就是假设把这个信用凭证的所有金额看做相应的未来现金流。一些市场驱动型的工具，比如说**互换和远期**（swap and forwards）要承担交易对手违约的风险。信用风险和市场风险又是互相联系的，因为只有当资产是实值的时候（即债务人欠我们钱的时候），贷出款项的人才会有潜在的信用损失。CreditMetrics 考虑了这两个因素之间的关系，感兴趣的读者可以参考附录 25.2（或者 J.P. 摩根，1997）。

互换中的信用风险（credit risk for swap）取决于互换交易对手最初的信用评级、信用转移概率、在每个最终等级发生违约时的损失（美元衡量）以及在违约时的平均风险暴露。这些问题我们都将在附录 25.2 中进行讨论。

25.4 其他可选择的模型

KMV 的 CREDIT MONITOR 模型

CreditMetrics 的一个重要特色就是将我们所观测到的股票收益率与联合转移概率联系到一起，其中也包括了违约概率。旧金山的 KMV 公司开发的 CREDIT MONITOR 模型，也将股票价格和违约概率联系到了一起，但是它是通过引入 Merton 模型（1974）做到这一点的。这种方法的主要思想就是将公司的股权价值 E_t 看做是公司的整体价值 V_t 的一个看涨期权，它的执行价格就等于公司现在的债权的价值 F_B（参见第 16 章）。然而，并不像 CreditMetrics 那样的盯市模型（即允许评级的增加和降低），KMV 模型（仅仅）是一个违约模型。在 Merton 模型（1974）中，目前股权的价值（股票的数目乘以股票的价格）可以通过下式给出：

$$E_t = f(V_t, F_B, \sigma_v, r, T-t)$$

其中，V_t 和 σ_v 都是不可观测的（对于一个具有杠杆效用的公司来说），完整的公式应该是

$$E_t = VN\left(k + \sigma_v\sqrt{T-t}\right) - F_B e^{-r(T-t)} N(k)$$

其中，$k = [\ln(V/F_B) + (r - \sigma_v^2/2)(T-t)]/\sigma_v\sqrt{(T-t)}$，风险中性的违约概率是 $1-N(k)$，并且 $N(.)$表示是一个累积的正态分布函数。KMV 模型在无法观测到的公司波动率 σ_v 和可以观测到的股票收益率的波动率 σ_E 之间建立了一个理论上的关系：

$\sigma_E = g(\sigma_v)$。

当知道了 F_B，r，$T-t$ 和 E 之后，我们就可以解上面两个式子，得到 σ_v。假设 $\sigma_v = 1\,000$ 万美元，$V_t = 1$ 亿美元，并且 $F_B = 8\,000$ 万美元。如果我们假设公司的平均增长率是 $\mu = 0\%$ p. a.。那么在年末与违约的“距离”就是

$$\text{与违约的“距离”} = \frac{V(1+\mu_v) - F_B}{\sigma_v} = \frac{100-80}{10} = 2(\text{个标准差})$$

因此如果 V 是正态分布的，那么理论上的违约概率（即如果 $V < F_B$）就是 2.5%，（由于 $\pm 2\sigma$ 是一个 95%的置信水平），并且这也是我们对公司所要求的违约频率。KMV 意识到 V 可能不是正态分布，因此它们利用公司的历史违约数据来计算等价的**经验违约频率**（empirical default frequency）：

$$\text{经验违约频率} = \frac{\{\text{如果公司的资产在年初偏离 } F_B \text{ 为 } 2\sigma\text{，在一年之内违约的公司的数目}\}}{\{\text{资产偏离 } F_B \text{ 为 } 2\sigma \text{ 的全体公司的数目}\}}$$

假设一个公司的经验违约频率为 5%，那么将使用这个数据而不是理论的违约概率 2.5%（经验违约概率对于不同的公司可能在 0 到 20%之间发生变动）。这个模型在一个极短的时期上（$T-t \to 0$）可能会低估了违约的风险，但是这个模型的扩展（例如，“密度模型”就假设了违约是一个泊松分布，并且与一些风险的出现与否相关联）消除了这个问题。

KMV 模型提供了一个解析的解，它可以极其方便地应用于任何一个上市公司（KMV 对全世界的20 000多家公司提供了 EDF 的值）。这个模型是基于股票的收益率的，因此具有前瞻性（我们假设它反映了市场对于未来的经济变化的看法）。

但是我们在分析中没有注意到债券的优先等级、抵押品、合约和可转换的债务，以及执行价格 F_B，也就是公司的债权的面值，这都可能导致衡量的误差（例如是否包括短期债务和可转换债务等）。另外，模型不能解决那些具有一个恒定的或者是目标杠杆比率的公司，因为在 Merton 模型中我们假设公司的债务水平是恒定的。但是，这个模型可能会提供一个对于信用风险的变化的短期（例如一个小于两年的时期）的指标，这可能导致了信用评级的变化（部分原因是由于后者在设计时就是要反映信用风险的平均周期）。

在 KMV 模型中，股权价格的变化“驱动着”违约的概率，但是与 CreditMetrics 不同的是，这个方法忽略了向其他评级的变化。KMV 方法也要求接受 Merton 模型（1974）（以及这个模型的限制）。然而，就好像是通往 CreditMetrics 的“中途驿站”，这种方法的优点就是可以提供一个能够及时更新的解析形式解。

CSFP 的 CREDIT RISK PLUS

瑞士信贷金融产品公司（CSFP）有一个这样的违约模型，它大体是基于在保险行业中对人寿保险或者是财产（火险）保险定价时所用到的方法建立起来的。这个模型的基本输入变量是不同信用等级的债券和贷款的边际偿还率（即边际死亡率）MRR_i，（例如 $i=$AAA，AA 等）。对于 MRR_i 的经验估计给出了平均偿还率 μ_i，但是与 CreditMetrics 不同的是在 Credit Risk Plus 中所应用的实际的违约概率是随机的，是根据一个均值为 μ_i 的泊松分布得到（这就暗示着违约的概率是非常小的，并且是与其他的违约相独立的，因此违约之间的相关系数是零，这些都是在我

们这个简化的模型中所做出的假设）。另外违约后损失 LGD 也是不确定的，而且平均违约率自身也是随机的（服从一个 gamma 分布）。因此在这个模型中的不确定性有三个来源。

输入模型的经济变量主要放松了上面的假设，即公司贷款的违约概率与时间和整个经济环境（或者是某个部门）的变化不相关。我们可以找到关于评级下降之间是自相关的证据，也就是说如果公司在 t 时刻的评级下降，那么很可能在 $t+1$ 时刻也是下降的（与那些没有发生评级下降的公司相比较而言）。另外，很明显违约概率与整个经济的周期是有所关联的。在 CRP 模型中，公司 i 的平均违约概率 μ_i 与整个经济环境的平均违约率 μ_w 相联系，并且后者严重依赖于整个经济周期的变化（例如经济的繁荣或者是萧条）。这就引入了任何两个公司的平均违约率之间的相关系数。

稍微简化一点来看，假设银行有 100 份未偿付的债务，并且所估计的平均违约概率是每年 3%。这就意味着每年 $\mu=3$。那么 n 个违约的概率就可以由泊松分布给出（参见 Cuthbertson 和 Nitzsche，2001）：

$$p(n\text{ 个违约})=\frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}$$

例如，$p(0)=e^{-3}3^0/0!\ =0.049$，类似地 $p(1)=0.149, p(2)=0.224, p(3)=0.224, \cdots, p(8)=0.008$. 这就给出了一个驼峰状的分布函数（见图 25—5）累积分布函数是 $p(0)=0.049$，$p(1)=0.199, p(0-2)=0.423, \cdots, p(0-8)=0.996$。其中“$p(0-8)$”表示的是在 1 年内从 0 个违约到 8 个违约的概率，这个结果是 99.6%。因此如果我们把 8 个违约当成是一个对 99% 的分位点的近似，那么给定平均 LGD=10 000美元，得到：

预期损失$=(\mu=3$ 个违约$)\times 10\ 000$ 美元$=30\ 000$(美元)

未预期到的损失(99%的分位点)$=p(8)\times 100\times 10\ 000$ 美元$=80\ 000$(美元)

资本要求=未预期到的损失－预期到的损失$=80\ 000$ 美元$-30\ 000$ 美元$=50\ 000$(美元)

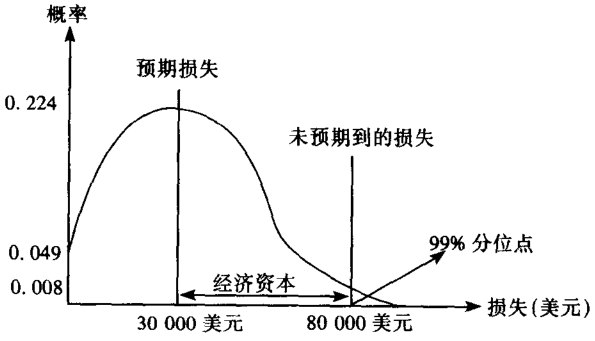


图 25—5　损失的概率分布

贷款组合

我们的银行可能会有一篮子 100 份的贷款，平均 LGD=20 000美元，$\mu=$每年 10%。我们可以对于这一篮子20 000美元的贷款重复上面的计算过程，进而得到它们的（泊松）概率分布。然后我们就可以将这两篮子投资组合（即10 000美元和20 000美元的投资组合）的概率分布“相加”，这样就可以得到一个由 200 份贷款组成的投资组合的概率分布（在这里我们忽略了违约之

间的相关系数），然后可以再一次找到这个贷款投资组合的平均损失和未预期到的损失。这个过程恰恰就是保险公司用以获得（比如说是火险）损失分布的过程（但是对于保险公司来说，风险事件是独立事件的假设要比银行贷款的独立性假设更加符合实际）。

因此 Credit Risk Plus 方法考虑了违约概率（而 CreditMetrics 方法把它看做是固定的）以及违约后损失 LGD 的不确定性。另外这种方法也将公司的平均违约率与整个经济状态的违约率联系在了一起。后者引入了相关系数和在一个贷款的投资组合中对信用风险的分散作用。再者，Credit Risk Plus 对于数据的要求也相对较少，它仅仅需要违约率的平均值以及 LGD 的平均值（对于不同的评级）。

麦肯锡的 CREDIT PORTFOLIO VIEW

与 CreditMetrics 不同，这个模型假设所有的转移概率都是与整个社会的经济情况直接联系的。原则上，在 CreditMetrics 中，这可以通过把我们要考虑的样本公司（假如说是在 1980－2000 年间的公司）分配到“经济繁荣”和“经济萧条”两类年份中，然后分别在这两种情况下计算转移概率。另外一种可选择的方法就是，利用麦肯锡公司的 CREDIT PORTFOLIO VIEW（CPV），来精确地设立一个模型将转移概率，例如 p（C 到 D），与经济表现的指标 y 联系在一起：

$$p_{i,t}=f(y_t)\quad 其中\quad i=\text{“C 到 D”}$$

由于 p 一定是位于 0 到 1 之间的，因此我们通常利用这样的一个对数函数 $p_t=1/(1+e^{-y_t})$。我们假设指数 y 依赖于一系列的宏观经济变量 $X_{i,t}$ 的（例如 GDP，失业率等）：

$$y_t=g(X_{i,t},v_t)\qquad i=1,2,\cdots,n$$

其中，v_t 是一个随机误差项（即我们通常所说的白噪声）。$X_{i,t}$ 的选择取决于它们的历史数据再加上其他的随机误差 $\varepsilon_{i,t}$。这是一个向量自回归的体系：

$$X_{i,t}=h(X_{i,t-1},\varepsilon_{i,t})$$

因此

$$p_{i,t}=k(X_{i,t-1},v_t,\varepsilon_{i,t})$$

并且每一个转移概率都依赖于宏观经济变量 $X_{i,t}$ 的历史数值以及误差项 v_t，$\varepsilon_{i,t}$。很明显 $p_{i,t}$ 是相关的，因为它们都和一系列相同的宏观经济变量相关。我们可以认为经济的萧条会造成违约增加。

CPV 模型利用蒙特卡罗模拟来调整通过公司样本（如同在一个 CreditMetrics 中）估计得出的经验转移概率。考虑一轮蒙特卡罗模拟中的误差项是 v_t 和 $\varepsilon_{i,t}$（这体现了上面对 y_t 和 $X_{i,t}$ 估计方程中具有的相关性）。可能就会得出模拟的概率为 $p_i^s=0.25$，然而历史数据得到的（无条件的）转移概率是 $p_i^h=0.20$。它隐含了这样的一个比例：

$$r_i=p_i^s/p_i^h=0.25/0.20=1.25$$

我们可以对所有可能出现的最初信用等级（例如 $i=$AAA，AA，…）都重复上面的过程，这样就可以得到一系列 r_i。然后我们可以采用一个（CreditMetrics 类型的）8×8 的历史数据的转移矩阵 T_i，并且将这些“历史概率”乘上相应的 r_i，这样我们就可以得到一个新的模拟转移矩阵 T_i^s（另外，我们必须确保 T^s 的所有行相加之后的结果是 1）。然后我们就可以利用这些能够反

映一种可能的经济状况的新的模拟概率来对我们的债券组合重新估值。完成一轮蒙特卡罗模拟，就可以得到一个组合的新价值。将这个过程重复很多次（例如10 000次）就可以得到关于这个投资组合的收益和损失整体的分布，这样我们就可以直接从图中读出关于1%的分位点的投资组合的价值。CPV 模型还有一个优点，就是那些模拟的转移概率可以很容易地在 2，3，…年等的时间区间上进行计算。我们只需要知道$(v_t, \varepsilon_{i,t})$，$(v_{t+1}, \varepsilon_{i,t+1})$并计算出 $p_{i,t}^s$和 $p_{i,t+1}^s$等。例如，对于一个两年期的转移概率可以由下式给出：

$$T_{t+2}^s = T_t^s + T_{t+1}^s$$

因此，CPV 模型就将转移概率直接和宏观经济的变量联系在一起，然而 CreditMetrics 和 KMV 方法却假设股票价格精确反映了经济状况对于不同公司的影响。很明显，CPV 模型的成功依赖于宏观经济模型的现实性，然而政治体系的变动可能会使这类模型不那么可靠。

显然上面这些模型试图将转移概率或者是违约概率与经济周期联系在一起，因此这些概率之间就产生了相关性（以及分散效用）。但是也要注意到这些模型都很少提到关于抵押品、可转换性和债务的优先等级以及债务的期限和转换以及违约概率等问题。可能这要求的太多了，而一个模型或许只能解释这些问题中的某一部分。在表 25—13 中对这些模型进行了分类对比。现在我们开始考虑这些信用模型在监管政策上的含义。

表 25—13　　信用模型的比较

特点	J. P. 摩根的 CreditMetrics	KMV 的 Credit Monitor	CSFP 的 Credit Risk Plus	麦肯锡的 Credit Portfolio View
盯市（MTM）或者违约方式（DM）	MTM	MTM 或者 DM	DM	MTM 或者 DM
风险的来源	股票的收益率是多元正态分布	股票的收益率是多元正态分布	随机的违约率（泊松分布）	宏观经济变量
相关系数	股票价格/转移概率	期权价格/股票价格的波动率	平均违约率之间的相关系数	宏观经济变量之间的相关系数
求解方法	解析方法或者蒙特卡罗模拟	解析方法	解析方法	蒙特卡罗模拟

25.5　激励动机和 RAROC

经理人的行为应该是为了实现股东利益的最大化，并且投资于具有正的 NPV 的项目，并由此实现公司（银行）价值的最大化。我们把监控经理人的行为和努力的成本称为代理成本，实际上股东将这些责任交给董事会来完成。为了监控经理人的努力程度，我们经常根据其表现给予奖励，这主要包括基本的工资（补偿“投入”或是“努力”），再加上取决于其表现的奖金或者是股票期权，这些是基于“产出”的奖励。然而，有时股票价格对于衡量经理人对于“产出”的贡献是一个比较差的指标，因为这个产出要受到很多外部因素的影响（例如经济的大环境等）。一个更好的量度是公司股票相对于其他一系列的基准竞争者的股票的表现，而不是单独的考虑它的股票的绝对变化情况。但即使这样，如果公司运气比较好，即使经理人的管理技术没有对公司的成

功产生任何作用的时候，他也可以获得支付（另外，如果在公司表现比较差的情况下，经理人也不必对股东进行支付，因为这可能完全是由于公司的运气比较差）。

资本收益率（return on capital，ROC，有时我们也称之为投资收益率）是一个比较传统的衡量银行表现的指标。我们把它定义为

资本收益率 ROC＝“收入”/所借出的资产＝（例如）100/1000＝10%

那么投资决策就是：

如果 ROC>所要求的临界利率，那么我们就对这个项目进行投资（例如决定放出贷款）。

其中所要求的临界利率可以是股权收益率 ROE，或者是具有特定信用等级银行的股权收益率 ROE（例如可以由 CAPM 模型通过 beta 值得出），或者可以是一个银行的 WACC。银行的收入来自于：

- 贷款的利率所超过它对存款所支付的利率之间的价差；
- 所获得的任何费用（例如，贷款管理费用、外汇交易费用）；
- 减去贷款的投资组合的预期损失；
- 减去运营费用（例如职工的工资等）。

贷款（或者它的投资组合）的预期损失构成了通常所说的商业风险，因此要从收益中扣除，其中

$$预期（以美元计价）的损失＝\sum_{i}\mathrm{EDF}_i\times\mathrm{LGD}_i$$

其中，i 代表的是这个贷款的信用等级，ROC 中的问题就是它对贷款的风险并没有做出任何的判断，这时我们通过**风险调整后的资本收益率**（risk adjusted return on capital）来对这个缺点进行补充，这个方法是最初由美国信孚银行（Banker's Trust）在 1970 年提出的：

RAROC＝收入/风险状态下的资本（即未预期到的损失）

分母中的资本需要通过一个非常复杂的方法进行衡量，它指的是（比如银行贷款的）“未预期到的损失”，我们把它称为“在险资本”：

$$在险资本＝贷款的风险暴露\times\mathrm{LGD}\times（\sigma_{\mathrm{L}}\times分位点水平）$$

其中，LGD 为违约后损失，σ_{L} 为违约概率的标准差（对于一个特定的群体，比如说评级为 AA 的顾客）。假设是正态分布的，那么 1%的分位点水平将会是 2.33。因此对于一个面值为 1 亿美元的银行贷款来说，LGD＝20%，$\sigma_{\mathrm{L}}=30\%$（对于这一个风险类型的顾客来说）：

$$在险资本＝100\ 000\ 000 美元\times0.20\times0.30\times2.33＝13\ 980\ 000（美元）$$

计算利率为 $r_{\mathrm{L}i}$ 的银行贷款 L 的在险资本的另外一种方法就是利用久期的公式：

$$在险资本＝\Delta L=-D_{\mathrm{L}}\times L\times\max\{\Delta Sp_i,0\}/\{1+r_{\mathrm{L}i}\}$$

其中，D_{L} 为银行贷款的久期，ΔSp_i 为对于所有信用等级为 i 的顾客在 1 年内的信用价差的平均变化情况。

一般说来，银行更感兴趣的是其各个部门的收入之和，在扣除掉所使用的“资本”以后，是否能够达到股东所要求的收益率。RAROC 是作为一种衡量和监控不同的商业活动（如银行贷款、交易等）或者是银行的不同部门，甚至是不同的银行之间的经济表现的方法而提出的。它在衡量公司投资项目的收益相对于在这个项目上所“投入”的资本的关系时是十分有用的。这就促使贷款管理者主要关注如何降低在险资本（即降低风险贷款），而部门经理重点关注那些收益正在上升的项目。然后银行将资本投入到那些具有更高的 RAROC 的项目或领域中去。然而，从我

们的介绍中也可以看出，RAROC方法也有它自己的缺陷。它仅仅考虑了下一年的收益（或者仅仅是未来几年的收益），而没有考虑不同表现的公司其收益之间的相关性。例如，如果银行对化工部门的贷款与对零售部门的贷款所获得的收益是负相关的（或者仅仅不是正相关的），那么可能对零售部门的贷款就是有价值的，尽管如果单独考虑，它可能具有较低的RAROC。这是因为这个负的相关性暗示着这个贷款投资组合（即对化工部门的贷款加上新的对零售部门的贷款）可能降低银行总的风险。

有时这个风险状态下的资本可能是《巴塞尔协议》中的8%的风险加权资本要求，我们可以认为这个比例就是风险调整后的资本收益率RORAC。另外，我们可以将RAROC这个标准与“经济增加值”的概念联系在一起。我们通常使用EVA来衡量在非金融部门中的固定投资项目的价值，参见Cuthbertson和Nitzsche（2001）。

因此，概括地说，RAROC促使经理人的行为会保证股东利益的最大化。另外这也使董事会可以监控（部门）经理的表现，以及在考虑了商业风险之后，将整个公司与其他竞争者进行比较。

25.6 对冲和信用衍生品

我们已经讨论了很多计算信用风险的方法，现在我们主要考虑信用风险可以通过什么样的信用衍生品来对冲。现在存在很多不同类型的信用衍生产品，并且随着金融机构对于信用风险的关注越来越多，以及由于竞争的存在使银行获取的信用价差越来越小，信用衍生品市场的发展变得十分迅速。现在主要有三类信用衍生产品被广泛应用，它们收益的触发事件分别是：通过违约，通过收益率价差的变化，或者是通过信用评级的变化。对冲可以通过期权、互换或者是证券化来实现。

信用互换

信用互换是应用最广泛的一种对冲信用风险的工具。它有两种主要的类型：（1）总收益互换；（2）纯粹的信用或是违约互换。

总收益互换

假设一个银行以10%的利率向一个A级的公司贷款，然后购买了一个总收益互换。在这个互换中，银行每年支付一个固定的金额F（它等于贷款偿付成本的年度百分比加上贷款的费用）加上这个贷款的市场价值的变化，并且从交易对手那里收到LIBOR（可能是加上一个固定的利率价差）：

银行的支付$=F+(B_t-B_{t-1})/B_{t-1}$

银行的收入$=\text{LIBOR}$

其中，$B=$这个贷款/债券的市场价值。通常贷款的市场价值的变化并不是在每一个互换的日期进行支付的（如上例），但是收益和损失却是在每个互换的结束时进行支付的。由于信用价差

的增加，假设贷款的价值下跌了 8%，同时 F 是固定的每年 10%，那么银行就要向互换的交易对手支付 2%（=10%−8%），并且收到 LIBOR 为 11%。银行得到的 9%的净支付弥补了贷款的市场价值的下跌。总收益信用互换的支付流与我们在第 16 章中所提到的股权互换的支付流十分类似。

上面互换的一个变形是：A 持有一个风险债券并且想避免这个信用风险。在一个**资产互换**（asset swap）中，A 将这个风险债券转交给 B，交换得到 LIBOR 加上一个价差。然后 B 就向 A 进行无（信用）风险支付，即使最初的风险债券的价值下跌了。因此 B 现在就承担了这份债券的信用风险。

纯粹的信用或者违约互换

总信用互换具有市场风险和信用风险，由于现金流的一端所涉及的是 LIBOR，它可能在信用风险没有任何变化的情况下发生变化。信用互换和违约互换消除了这种市场风险的因素。在一个**纯粹的信用互换**（pure credit swap）中，银行 A 支付 LIBOR 加上一个固定的价差，这样的支付一直进行到银行贷款违约为止，同时交易对手 B 支付给银行 LIBOR，这个支付要覆盖底层投资（如贷款/债券）的整个生命周期，即使贷款违约了。这里没有本金的交换。稍微变化一下，就是违约互换（default swap）。其中银行 A 每期支付银行 B 一个固定金额（类似于期权金），并且如果没有违约的话，银行 A 就什么也不会得到。然而，如果债务发生违约的话，那么 B 就要支付给银行 A 这个贷款的面值减去它在二级市场上的价值。后者的金额或者是在互换开始时所商定的固定金额，或者是由交易者投票决定，或者还可能是由一个等于面值的支付来交换违约贷款的实物交割。由于对于违约债券的二级市场价值的估价比较困难，因此我们通常进行实物交割。另外，关于什么构成了违约这个问题也需要在合约中准确地定义（例如仅仅在 1 天内没有进行息票支付的情况等）。一个纯粹的违约互换就等价于一系列的信用期权。

关于**信用互换的定价**是相当复杂的，互换开始时的价值应该是零。任何固定的或者是浮动（无风险）的支付的价值都是直接可以计算的（参见第 14 章）。在每个重置日期的现金流都是取决于所预期的违约概率 EDF 和 LGD。一种获得违约概率的方法就是 KMV 模型，或者我们也可以利用历史的转移概率（例如 MMR 和 CMR）。在这些例子中，EDF 可能都偏低，因为它们是向后看得到的量度。还有一种向前看得到的结果，它利用了信用价差的期限结构以及风险中性概率，但是在这里我们不讨论这些方法（参见 Wilmott，2000 和 Jarrow 等，1997）。

信用期权

信用价差 $S_p=y^*-y$，其中 y^* 等于公司债券的利率（比如说是 A 级的债券），y 等于无风险利率（例如具有相同到期日的长期国债的利率）。S_p 的变化反映了违约概率的变化。**信用价差看涨期权**（credit spread call option）在到期日具有以下形式的收益：

$$信用价差的收益=\mathrm{FV}\times\mathrm{MD}\times(S_{pT}-K)$$

其中，FV 等于期权的面值，MD 等于修正后的久期，并且 K 等于合约的执行价格（价差）。在期权的到期日之前，期权价格可能随着价差的变化而变化，因此如果银行持有一个有风险的债券或者银行贷款，那么当贷款的风险变大的时候，它盯市后的价值就会下降，这个看涨期权的价

值就会上升以弥补贷款的损失。这个收益可能也是基于 $S_{p1}-S_{p2}$ 的，可以表示为 $\max\{S_{p1}-S_{p2}, 0\}$。

违约**看跌期权**（default put）允许持有者在债券违约的时候，以一个事先已知的执行价格（例如等于该债券或者贷款的面值）卖出这份风险债券。如果这份风险债券并没有违约，那么收益就是零，这样的话，银行受到的最大的损失等于看跌期权的期权金。这个违约期权也可以设计成新型期权。例如，**违约敲出看跌期权**（knock-out default put）当价差下降到一个我们所设定的障碍价差之下的时候，这个期权就停止存在。但是这种期权的成本要低于普通香草型的价差期权。**交换期权**（exchange option）允许持有者用一个风险债券来交换一个事先商定好的等级（$q>1$）的无风险债券，因此收益就是 $\max\ \{qB-B^{*}, 0\}$，其中 B 等于无风险债券的价值，B^{*} 等于有风险债券的价值。

利用信用远期合约来进行对冲

如果银行 A 向一个公司发行了债券或者是贷款，那么它可以通过卖出一个关于基准债券（例如两年期 BBB 级的债券）的信用远期来对这种信用风险进行对冲，其中在合约中就商定了价差的远期价格是 K_F（比如说是 2%）。那么在到期日 $T=2$ 时刻出售者的收益就是：

银行 A：卖出一个信用远期

在 T 时刻的收益：本金 $Q\times(S_{pT}-K_F)\times \mathrm{MD}$

其中，MD 等于基准债券经过的修正久期，注意，交易对手（也就是说远期的买方）的收益与银行 A 的收益恰恰相反。如果银行 A 所发行的公司债务的价值与基准债券之间的价差是一一对应发生变化的，那么银行就可以完全对冲。如果公司的信用风险在这个远期合约的有效期内上升，那么 $S_{pT}>K_F$，因此这个信用远期合约处于实值状态。反之，如果 $S_{pT}<K_F$，那么银行 A 要向交易对手进行支付（即这个公司的信用评级上升了），但是这个支付的数目有一个上限，就是 QKF（MD），此时 $S_{pT}=0$。因此，对于一个信用远期的卖方来说，它的收益与一个看跌期权的买方相类似。

评级的变化

有很多方法可以构造一个与信用平均变化相关联的衍生证券的收益。这个收益可能是依赖于信用评级变化的，而且评级下降的幅度越大收益也就越大（比如说，当评级从 AAA 变化到 AA 和从 AAA 变化到 A 时的收益是不同的）。另外，有些债券发行时就包含有一个看跌的条款，因此如果它的评级下降的话，持有者就有一个可以立即以面值赎回的权利。我们不难想像到另外一些变化，比如说是一个只依赖于在某些特定日期评级之间的变化的收益（例如从 AAA 到 AA 再到 AAA，可能并不涉及支付的发生）。

对这些信用衍生产品定价的问题是目前的一个热门领域，但是具体的细节在本章并没有涉及（参见 Wilmott，2000）。

信用证券化

在前面的章节中，我们讨论了一个金融机构是如何通过在二级市场上卖出它的银行贷款或者通过贷款的证券化（例如，抵押贷款、信用卡或者是汽车贷款，参见第 15 章）来对信用风险进行管理的。在第一种情况下，贷款就从银行的资产负债表中移出去，并且作为**贷款抵押证券**（collateralised lending obligation，CLO）出售，CLO 中所出现的问题是它可能会破坏长期的客户关系，另外二级市场上的流动性也不是很好。当贷款证券化之后，我们也可以把它从银行的资产负债表中移除出去，但是对于那些信用风险很难确定的不同质的债券来说，这样做比较困难（与抵押贷款和信用卡贷款相比较而言）。

近来，银行贷款还保留在银行的资产负债表中（因此还维持着客户关系的稳定），但是它们可以通过**信用关联票据**（credit linked note，CLN）来进行证券化。现在有很多金融产品可以用于降低银行的部分或者全部的信用风险。进行证券化的贷款部分是由发行 CLN 的银行所决定的。有一些 CLN 具有非常高的收益率，CLN 的持有者承担了最初银行贷款的所有违约风险。通常，发行 CLN 的银行会以较低收益率持有违约风险的第一“等级”（tranche），剩余的部分由 CLN 的持有者承担。我们在文章 25.1 中还列出了一些更加复杂的交易。

文章 25.1 **瑞士银行：CLN**

在 1997 年 8 月，瑞士银行（Swiss Bank Corporation，SBC）利用 CLN 对其 15 亿美元的贷款进行了证券化（并且没有对单独进行贷款的公司和个人透露这个消息）。这些 CLN 首先被出售给了一个（高度资本化的）与 SBC 独立的特殊目的机构（SPV），这个 SPV，即 Glacier 基金，发行了由 CLN 支持的债券。因此，这是一个双重证券化的过程，债券的持有者对 SPV 的资产具有求偿权（而不是对 SBC 资产的求偿权）。这样 SBC 就对贷款的违约风险进行了部分对冲，因为协议规定 SBC 有权利从 SPV 那里收回这个贷款面值的 51%，或者是一个参考证券的市场价值。因此，SBC 的银行贷款剩余的那部分信用风险最终是由债券持有人持有。

25.7 监管

在分析了 CreditMetrics 和其他一些模型的关系之后，如果现在我们简单比较一下 CreditMetrics 和《巴塞尔协议》(1988) 衡量信用风险暴露的方法，问题会更加清楚一些：

- 对于资产头寸，CreditMetrics 是**按市价计值**（marks to market）的，然而《巴塞尔协议》（主要）按**账面价值**（book value）**计算**。
- CreditMetrics 允许**分散化的效用**（diversification effect），而《巴塞尔协议》则没有。
- CreditMetrics 中采用**信用质量的评级**（credit quality rating）（例如由标准普尔做出的评级），而《巴塞尔协议》则采用更广泛的信用分组（例如向公司进行的贷款以及向政府进行的贷款等）。

从概念上来看，CreditMetrics 的方法更好一些，尽管它可能会要求更复杂的计算和更高的数据收集成本。由于信用风险的非正态性，为了得到资本充足度的要求，利用标准差来计算组合的信用风险并不准确。分位点的方法可能更加合理一点，但是也会有“估计误差”。如果采用1%的分位点 C-VaR=1 000 万美元作为信用风险中资本分配的基准，就是说在 99%的时间里，我们有足够的资本来弥补这些损失。我们可以再进一步，估计出在 1%的分位点内预期的超额损失，就是在损失高于 1%的分位点情况下的预期损失，那么这个预期损失可能是 1 700 万美元。换句话说，如果最差的 1%的情况真的出现，那么我们所预期的实际损失平均说来可能是 1 700 万美元。当然，C-VaR=1 000 万美元和“预期的超额损失”=1 700 万美元都无法告诉我们实际发生的损失到底是多少，因为这个值是事先不可能得到的。

与市场风险类似，监管者很有可能最终允许银行使用某些内部模型方法来计算对信用风险的资本要求。如果确实如此，那么将股票的收益率映射到联合转移概率的 CreditMetrics 方法，或者（类似地）基于信用价差和信用转移的概率方法，都可能被允许使用。我们讨论过的其他模型也具有一些很好的特性，将来监管者也很可能允许银行使用这一类模型。那些满足监管者对资本基本要求的经验丰富的银行，可能被允许选择它们自己的内部模型，然后监管者对模型的应用情况予以定期审查。对于那些比较差的银行，监管者可能要求它们使用我们在第 20 章中所列出的几种“新的标准化的”巴塞尔模型，这些模型都是基于风险权重与信用等级之间的联系进行计算的。

监管者最担心的是，允许使用（各种）“内部信用模型”的一个最大缺陷是事后检验无法频繁进行（由于数据可获得性的原因），因此，可能监管者只会在银行陷于严重的金融危机时，才能发现那些不好的模型。因此如果这些新的内部信用模型经过监管者批准可以使用，也需要市场参与者加强监督。基于市场的解决方案允许市场价格起到“信号”的作用，表明银行正变得更具风险，因此需要监管者加强监督，这些方法可以增强普通的监管过程，但是无法替代它。这类方法中最有效的一个是次级债务的使用，参见文章 25.2。

文章 25.2 市场信号与监管监督

巴塞尔委员会（1999）最近建议使用两种方法来补充现行的巴塞尔“风险权重资产”方法（1988）来衡量银行贷款的信用风险。这两种方法允许银行：

- 利用信用评级机构所给出的评级来衡量公司（或者国家）贷款的信用风险；
- 利用银行自己的内部评级。

这些建议都遭受到了大量的批评，部分原因在于对这些“内部评级”和“评级机构”来说，它们都倾向于低估风险（这点对银行来说是十分明显的，但是对于那些评级机构来说也适用，因为银行付钱给它们以得到评级结果）。另外这些风险的测量也十分主观。

另外一种基于市场的对银行的风险进行评价和监控的建议（见 Kwast 等，1999）主要集中于市场化的**次级债务**（subordinated debt），次级债券是当发生违约时，在其他债务都得到偿还之后才进行偿付的债务（但是要在股权持有者得到支付之前）。建议认为，（大）银行应该被强迫持有 5 年期固定利率的不可赎回债务，价值大约等于风险加权资产价值的 3%。这些债务的 1/10 将以

6个月为周期向前滚动（rolled over）（每个系列大致相等）。某些建议还认为，应该存在一个**收益率上限**（yield ceiling），比如说是高于长期国债的无风险收益率50个基准点或者是等于在“投资等级以下”的公司债券的收益率。对这些次级债务不允许有任何增强信用的措施。即使在系统风险特例之下（《联邦存款保险公司改善法案》，Federal Deposit Insurance Corporation Improvement Act，FDICIA，1991），这些次级债券在清算之后也不会得到支付。

银行的次级债务和长期国债（或者是某个给定评级水平的公司债券）之间的收益率价差提供了关于银行所面临风险的市场信号。监管者可以利用这个信号来加强监管或者是加征罚款（例如，强制银行减少具有风险的贷款或者是减少红利支付）。这个价差越高，监管者的介入就会越强（就像“绊网”一样）。注意在1988年的《巴塞尔协议》下，银行可以持有有限的次级债务，作为第二级资本金要求的一部分，但是这里的次级债务存在一个强制性的最低限额，并且这些债务应该定期滚动。次级债务有以下一些优点：

- 利息是减税的，因此它降低了银行监管资本的成本（与股权相比而言）。
- 与存款的持有人不同，只有当他们的债务到期时，次级债务的持有者才能“一走了之”。这就给银行一定的时间来调整并提高资本充足度比率（例如，降低红利支付，对一些贷款进行证券化，尽可能发行更多的股权，或者是与其他的银行合并）。另外，这些次级债务的持有者也有时间来对监管者施加压力，要求他们增加监督力度。

这些建议的一些缺陷包括：

- 次级债务的持有者只能是那些经验丰富的投资者，也就是那些有能力对某个银行的风险变化进行监控的投资者。
- 我们对次级债务的价差是否能作为对未来的危机或者是偿付能力进行预测的指标所知甚少。例如，次级债务的价差对违约（或者危机）的预测能力是否比以下的指标要好呢：（1）资本与风险加权资产的比例；（2）简单的资本资产比例；（3）资本与总收入的比例（即利息＋非利息收入，参见Estrella等，2000）。
- 次级债务与长期国债之间的价差是周期性的，这个价差在经济繁荣的时候比较小，而在经济萧条的时候比较大。这可能会导致银行在经济繁荣的时候过度的贷款，或者它不能在经济萧条的时候对次级债务向前滚动，造成信用危机。（通过使用给定信用评级比如说BBB级公司的债务作为价差基准，可以缓和但是不能完全消除这些问题。）
- 这个建议应该应用于银行而不是那些持有银行的公司，这样才能保证银行直接具有降低风险的动机。
- 监管者也不能对那些破产的银行给予支持，否则其他次级债务的持有者就失去了认真监督现存银行的动机。
- 是不是市场总是比监管者对银行的风险更加了解呢？因为只有监管者才能获得银行的账簿。

与受到保险或者是未受到保险的存款者比较，或者与股票价格方法比较，次级债务价差的方法更能促使市场参与者对银行的风险变化进行积极监控。（股票价格的问题是它反应了一系列因素的影响，比如股东所持有的隐含的看跌期权的价值变化等，并且价格可能会受到那些非理性的投资者的影响。另外，股权也没有定期再融资的要求。）

上面的讨论可能意味着在未来的监管环境下，次级债务充其量也只能是监管者在评估银行表

现时的一个信号。尽管它提供了一个很好的“市场信号”，但是次级债务还是无法取代具体的监管监督。然而，关键的问题是，如果资本要求是基于“风险加权资产”的量度之上，我们就必须衡量银行贷款的风险。

监管者对于那些有助于预测银行违约的统计模型也很感兴趣，因此他们可以对那些“差银行”加强监督。已经出现了很多这样的模型，但是它们的预测是否能提供额外的信息还需要探讨，因为监管者已经从对银行持续监督的过程中获得了很多信息。这些模型都将一个失败的指数（例如，失败=0，成功=1）与另外一些解释变量，比如说是资本与（风险加权）总资产的比例，或者是利息与非利息的总收入与资本的比例，联系在一起。属于这个广义分类之下的有 logit 和 probit 模型、判别分析与比例风险模型，参见 Estrella 等（2000）。将这些“破产模型”应用于银行时最大的困难（相对于信用卡违约）是，在任何特定的时期内，我们只有关于银行破产很小的样本。另外值得怀疑的是，各个大银行所从事的业务已经远远超出了普通香草型的借贷（例如交易、并构、证券化、基金管理），那么基于历史数据的模型是否可以解释这些复杂的机构行为呢？

现行的《巴塞尔协议》对于信用衍生品的资产要求相当复杂，但是它们并不特别鼓励使用这些工具。一般来说，如果银行发行一种信用衍生品，那么带来的风险权重就是 100%，因为它们被等价于贷款担保。对于这个担保的购买者（比如说另外一家银行），银行对公司贷款的风险权重就降低为 20%。然而，作为使用信用衍生品的结果，两家银行总的风险权重变为 120%。

25.8 本章摘要

- 在利用“按市值计价”的 CreditMetrics 来分析交易对手的信用风险时，关键的因素包括：
  - (1) 对于**联合信用转移概率**的衡量，这个联合转移概率体现了这些转移之间的**相关性**。在新的信用等级下对债务进行估值。后者利用**远期利率**来折现未来的现金流，以及在违约的时候应用回收率。
  - (2) **在险信用价值**可以通过结果的**标准差**来进行衡量，或者利用可能出现结果的**完全分布**，从图中直接读出在某个分位点水平上 C-VaR 的价值。由于信用风险的非正态性（例如具有左侧长尾），因此利用标准偏差可能会低估真实的在险经济价值。承受信用风险的大投资组合（比如由许多债券、银行贷款、贷款承诺等组成的投资组合）要求使用 MCS 方法，它将股票的收益率映射到联合转移概率之中（另外，信用价差也可以被映射到联合转移概率之中）。
  - (3) 不同类型的风险暴露（例如债券、银行贷款、贸易信用等）都可以在 CreditMetrics 的框架下加以解决，尽管会有更大的误差（例如银行贷款的信用风险不一定与同一信用等级的债券变动一致）。
- **麦肯锡的 credit portfolio view** 类似于 CreditMetrics，也是一个基于信用转移的按市值计价的模型。然而，不同的是，CreditMetrics 中宏观经济是通过股票价格与转移概率联系在一起的，而 CPV 却是将信用转移概率与宏观经济（和国家）变量直接联系在一起。举例来说，对于所有信用等级（从 AAA 到 CCC），违约的概率在经济萧条的时候都要比经济

繁荣的时候要高。

- KMV 的 Credit Monitor Model 利用了 Merton 模型中的观点，它认为一个公司的股权的价值就是公司总价值的看涨期权，其中执行价格就等于公司的总债务价值（包括银行贷款、债券等）。这时如果我们将 Black - Scholes 公式反求出来，就可以得到公司总价值的波动率。后者可以用于估计违约概率。正如 CreditMetrics 中所做的，它也将股票的价格与违约的概率联系在了一起，但是 KMV 模型是一个违约模型，而不像 CreditMetrics 那样是以市值计价的。
- **CSFP 的 Credit Risk Plus** 是一个违约模型，它的思想来源于我们关于财产保险和人寿保险中风险的计算。类似于上面的模型，一个公司的平均违约概率可以与宏观的经济变量相联系，并且我们假设所有公司违约概率之间的相关系数非零，模型中实际违约概率服从于泊松分布，并且违约后损失（LGD）对于不同的公司是变化的。这个模型的显著优点是对数据的要求比较小，它只需要平均的违约率和违约后的损失。
- 在这几种模型之间，没有哪一个模型占有明显优势，尽管这些模型都不断被完善。评估这些模型最主要的困难在于缺乏数据造成的事后检验的困难。
- **资本充足度要求**可以通过基于上面各种模型思想的内部模型方法得到，这些内部模型最终可能会成为 1988 年的《巴塞尔协议》建议（在 2001 年进行了修订）的可行替代方法。我们研究的所有模型，都有优于 1988 年的巴塞尔方法的特色。例如，CreditMetrics 和 KMV 方法以及麦肯锡的 CPV 方法都包括了某种形式的按市值计价的方法以及分散效用。CSFP 的 Credit Risk Plus 是一个违约模型，但是违约概率可以与整个经济状态相联系，因此它也包含了一些分散效用。
- **风险调整后的资本收益率**可以用于衡量并且监控不同的商业活动（比如银行借贷和交易活动），或者是银行的不同部门（例如债务销售与并购部门），或者是比较不同的银行之间的表现。它的作用在于衡量了某个项目的收益率和与这个项目直接相联系的资本数量之间的关系。
- 银行所发行的**次级债务**的收益率价差可以提供一个关于银行的风险变化的市场信号。监管者可以利用它来决定需要对哪个银行密切监督。
- **场外交易的信用衍生产品**可以用来抵消底层的信用暴露风险。这些衍生产品的收益通常取决于违约或者是信用价差和信用评级的变化。

章末练习

1. 解释《巴塞尔协议》（1988）关于风险调整后资本充足比率的基本理念。

2. 当一家公司 X 的债券评级从 A 变化到 B 的时候，为什么一个向公司 X 贷款的银行应该持有更多的资本，即使这时对公司 X 的贷款并没有遭受到任何的实际损失？

3. CreditMetrics 方法的主要优点是什么？

4. 一个信用评级为 A 的公司 X 发行了一种 3 年期的附息债券，在这一年结束的时候，该债券评级只可能出现三种状态：A，B 或者是违约级。那么在衡量公司 X 的债券的信用风险时，我

们会遇到的什么样的实际问题?

5. 给定一种最初评级为A的债券，现在价值为112美元，另外还有一种最初评级为B的债券，价值为108美元。在这一年结束的时候，这两种债券可能会出现的状态都有三个，比如说是A级、B级或者是D级（即违约等级）。在违约等级下，这两种债券的价值都将是51美元。如果这个最初为A级的债券变化为B级，那么在年末它的价值将会是109美元，如果最初为B级的债券变化为A级，那么它的价值在年末将会上升到110美元。为了简单起见，我们假设如果每种债券都维持最初的评级不变，那么在年末的时候它的价值也就不发生变化。对于这两个评级分别为A和B的债券来说，转移概率分别为

$$P_a = [0.92,\ 0.07,\ 0.01] \qquad P_b = [0.03,\ 0.90,\ 0.07]$$

计算：

(a) 这两种债券的平均价值；

(b) 单独考虑两种债券的时候，它们的价值的标准差；

(c) 在未来可能出现的每个状态下，这两种债券所组成的投资组合的价值以及评级的转移矩阵，假设在债券A和B的变化之间是相互独立的；

(d) 这个两债券组合的平均值和标准差；

(e) 当把债券B加入到债券A中之后的边际风险。

6. 假设公司Y的信用评级为B，它发行了一种3年期的附息债券。公司X的信用评级为A，它发行了一种债券，偿还期为10年。在年末的时候，这两种债券的状态都可能是A级，或者B级，或者D级（即违约级）。请详细解释在J. P. 摩根的CreditMetrics方法中，对于一个持有一个X债券和一个Y债券的银行，我们是如何来衡量它们的C-VaR的。

7. 银行Z持有一个充分分散化的银行贷款的投资组合。那么如何才能对它进行对冲或者说降低这些贷款的信用风险呢?

附录25.1 信用评级的变化和马尔可夫链

在正文中我们注意到，得到公司每年的信用评级的数据之后，我们可以估计出在一年之内从最初的状态 i 变化到另外一个状态 j 的情况下的转移概率。这些转移概率 p_{ij} 具有以下特征：

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8) \tag{A25.1}$$

其中指数 i 指代的是标准普尔所给出的8种信用评级状态。如果我们选取 $i=8$ 作为违约状态，那么 $p_{8j}=0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$，并且 $p_{8,8}=1$。由于在违约状态下资产不可能发生别的变化。如果知道1年期的转移概率将会非常有用，我们可以利用它来计算在任意其他时期内的转移概率，然后我们可以计算任意时期的C-VaR（至少理论上说来是这样的）。

一种可以用于描述这些状态之间的变化的模型就是**马尔可夫链**（Markov chains）。在一个非常短的时期内，发生转化的概率就是

$$\mathrm{P}_{dt} = \mathrm{I} + \mathrm{Q}dt \tag{A25.2}$$

其中，P_{dt}为对于一个比较短的时期 dt 来说的转移概率矩阵，I为一个单位矩阵，Q为一个我

们未知的矩阵。Q 所有行的和一定等于零，并且它的最后一行（代表违约）的所有元素都是零，因此 P_{dt} 服从方程（A25.1）中的转移概率的条件。如果 P（t，t'）代表从 t 到 t' 时刻的转移概率，那么我们假设新的转移概率矩阵仅仅依赖于前一期的转移矩阵（这就是马尔可夫假设）：

$$P(t,t'+dt)=P(t,t')P_{dt} \tag{A25.3}$$

我们替换掉 P_{dt} 并且在两边都减去 P（t，t'），这样就可以得到一个远期的微分方程：

$$\frac{\partial P(t,t')}{\partial t'}=P(t,t')Q \tag{A25.4}$$

解上面的式子，利用 P（t，t）＝I，得到

$$P(t,t')=e^{(t'-t)Q} \tag{A25.5}$$

如果我们知道 Q，现在就可以对未来从 t 到 t' 时期内任何转移矩阵求解。为了获得 Q，注意我们知道在现实世界中的转移矩阵 P（0，T）的所有元素，其中 $T=1$ 年。因此

$$P(0,T)=e^{TQ} \tag{A25.6}$$

现在有通过 P（0，T）来计算 Q 的标准方法，解是

$$P(0,T)=Me^{TD}M^{-1} \tag{A25.7a}$$

Q 可以通过下式来进行对角化：

$$Q=MDM^{-1} \tag{A25.7b}$$

以及

$$D=\text{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_8\}\quad（其中\ d_i\ 是\ Q\ 的特征值） \tag{A25.7c}$$

为了得到 Q，我们首先要对 P（0，T）进行对角化，然后我们就可以得到 Me^{TD}，然后我们就可以通过方程（A25.7b）解出 Q。一旦我们得到了 Q 的值，我们就可以利用方程（A25.5）来获得任意时期上的转移矩阵。

附录 25.2　互换中的信用风险

CreditMetrics 为我们提供了一个与债券类似的方法来决定互换的 C-VaR。假设今天（$t=0$）我们持有一个剩余时间 $N=3$ 年的互换（比如说用固定利率来交换浮动利率），现在我们希望能够在第 1 年结束的时候计算出 C-VaR，此时这个互换还有两年的有效期。假设互换的交易对手在交易开始时即 $t=0$ 的时刻，评级为 AA。我们需要知道在 $t=1$ 时刻当交易对手变化为八种信用等级中任何一种的时候，可能发生的损失，然后我们还要计算出损失的平均值以及在第一个分位点上的损失（这与我们处理债券的方法是一致的）。在 $t=1$ 时刻互换的期望价值 V_1 就是在 $t=1$ 时刻预期的无风险终值 FV 再减去预期的损失 EL_i（以美元计价），其中 i 是在 $t=1$ 时刻的信用等级：

$$V_1=FV-EL_i \tag{A25.8}$$

无违约风险条件下得到的期望价值 FV 恰好是一个固定利率和浮动利率的债券的价值的差（参见第 14 章），但是在计算第 2 年和第 3 年的未来现金流的时候，我们折现所利用的是远期利率（即 f_{12}，f_{13}）而不是即期利率。（这是因为我们想要得到的是在 $t=1$ 时刻的期望价值而不是在 $t=0$ 时刻的价值。）在 $t=1$ 时刻对于评级为 i 的交易对手，期望损失为

$$EL_i = \mathrm{AE} \times \mathrm{CMR}_i \times \mathrm{LGD}_i \qquad (A25.9)$$

其中，AE＝在第 2 年到第 N 年的平均（美元）风险暴露，CMR_i＝从第 2 年到第 N 年的累积死亡率（对于在 $t=1$ 时刻评级为 i 的交易对手），LGD_i＝（$t=1$ 时刻）评级为 i 的交易对手的违约后损失（美元），$i=7$ 种未违约年末信用评级的下标。

对于变化到违约等级的情况（即 CMR＝1），我们的期望损失与上面的情况略有不同：

$$EL(\text{违约情况下}) = \{\text{在 } t=1 \text{ 时刻的期望风险暴露}\} \times \mathrm{LGD} \qquad (A25.10)$$

其中，期望风险暴露是在这个互换剩余的时间内总的替代成本。我们下面在方程（A25.9）中依次处理这三项。

平均暴露

平均暴露取决于两个相反的因素。首先是互换中浮动利率和固定利率之间利率差的波动，它随着时间的推移而增加，这取决于我们所应用的特定的利率模型（例如是均值回归或是布朗运动）。第二是“到期日效应”，也就是说当我们接近 N 的时候，剩余的支付就比较少了，因此互换中的美元的风险暴露就下降了。这两个过程的总的效用就是风险暴露的重置成本在 2 到 N 这段时间内具有一个 U 形的曲线。我们可以通过不同的利率变化路径，利用蒙特卡罗模拟方法得到每年年末的时候这个风险暴露可能的价值，然后就可得到这些风险暴露的平均值。

累积死亡率

一种可以获得 CMR（从第 2 年到第 N 年）的方法就是利用对 MMR（对于每一个风险等级）的经验估计：

$$\mathrm{CMR}_{2,N} = 1 - \prod_{j=2}^{N} (1 - \mathrm{MMR}_j) \qquad (A25.11)$$

另外一种方法是我们可以通过 CreditMetrics 中的转化矩阵 T 来计算 T^{N-1}，这个 T^{N-1} 的最后一列就给出了在剩余的 $N-1$ 年之内，7 种最初为“非违约”等级的 CMR。

违约后的损失

LGD 是通过经验数据得到的，惟一需要注意的问题是，是否需要将一个特定的交易对手所有的互换头寸进行加总。

一个数值实例

假设互换的交易对手最初评级为 AA，如果我们已经得到了在 $t=1$ 时刻 8 种可能状态下的 EL_i，那么

$$\text{互换的期望价值} = \sum_{i=i}^{8} p_i V_i \qquad (A25.12)$$

其中，$V_i = \mathrm{FV} - EL_i$，ρ_i 为这个最初为 AA 级的交易对手的转移概率。根据 CreditMetrics（1997），对于名义价值为 1 000 万美元互换的初始为 AA 级的交易对手，$\mathrm{LGD}_i=50\%$（对于最终所有的评级都是固定的），并且在 $t=1$ 时刻的平均风险暴露是 $AE_i=61\ 627$，那么：

$$V_1(\mathrm{AA}\rightarrow\mathrm{AA})=\mathrm{FV}-\mathrm{AE}\times\mathrm{CMR}_{\mathrm{AA}}\times\mathrm{LGD}_{\mathrm{AA}}$$
$$=\mathrm{FV}-61\ 627\times0.000\ 2\times0.5=\mathrm{FV}-6\text{ 美元}$$
$$V_1(\mathrm{AA}\rightarrow\mathrm{CCC})=\mathrm{FV}-\mathrm{AE}\times\mathrm{CMR}_{\mathrm{CCC}}\times\mathrm{LGD}_{\mathrm{CCC}}$$
$$=\mathrm{FV}-61\ 627\times0.334\ 4\times0.5=\mathrm{FV}-10\ 304\text{ 美元}$$

很明显，如果在 $t=1$ 时刻，交易对手的信用评级为 CCC，那么相对于它维持在 AA 级的情况，互换的价值就会更低。表 A25—1 中给出了计算这个互换的 C-VaR 所需要的数字。

表 A25—1　　互换的 C-VaR（最初 AA 级的债券）

在 $t=1$ 时刻的评级	互换的价值 V_i	转移概率（%）
AAA	FV−1	0.7
AA	FV−6	90.65
A	FV−46	7.65
BBB	FV−148	0.77
BB	FV−797	0.06
B	FV−3 209	0.14
CCC	FV−10 304	0.02
D	FV−50 860	0.01
		100%

注：期望价值＝ $\sum_{i=1}^{8} p_i V_i$ ＝FV−21.8；

在 99%的置信水平下的价值＝FV−148；

未预期到的损失的价值＝C-VaR＝(FV−21.8)−(FV−148)＝126.2 美元。

资料来源：CreditMetrics，1997.

因此对于最初评级为 AA 的交易对手来说，C-VaR 就是 126.2 美元。注意，正如我们所期待的，互换的无风险价值 FV 没有出现在我们关于 C-VaR 的计算中。

上面的方法也可以用于对于远期和期权的计算。我们所需要的仅仅是在这些金融工具剩余的有效期内的平均风险暴露，这些数据可以通过蒙特卡罗模拟方法得到。如果我们有一个对于标的资产的随机模型，以及在 $t=1, 2, \cdots$ 时刻求解衍生证券价格的方法（例如，Black 公式是网格方法），那么我们就可以像上面那样找到平均重置成本，并进行类似的处理。

对于 OBS 工具，CreditMetrics 方法也考虑了信用投资组合的分散作用（例如，可以同时持有与不同的交易对手进行的互换或者是持有互换和期权构成的组合）。

术语表

Abnormal profits (超额利润)

超出反映了投资风险的收益率的收益率。

Accrued interest (应计利息)

参见 Gross accrued interest。

Active portfolio management (积极的投资组合管理)

通过买卖资产以期获得超额利润的投资策略。

Adjusted present value (调整后的现值)

与 NPV 相对的一种方法。在计算 NPV 时考虑了税收扣除以及公司的一些特定支出带来的利益。具体参见 NPV(净现值)。

Adverse selection (逆向选择)

保险市场中产生的经济理论。描述了当无法区分投保人的不同风险类别时如何定价保险产品的问题。

Agency broker (代理经纪人)

在投资者和市场之间起中介作用的经纪商—交易者。

Agency cost (代理成本)

与监控合约相关的成本。

Aggressive stock（侵略性股票）

Beta 大于 1 的股票，其收益率变化高于市场。

Allotment price（分配价格）

在收购要约中获胜的买家分配到的股票的价格。

American option（美式期权）

在到期日之前任意时间均可执行的期权。

Anomaly（异常）

不能由任何已知资产定价模型加以解释的实证观察。

Arbitrage（套利）

从事可以获得无风险利润的交易。

Arbitrage pricing model（套利定价模型）

将资产收益与它对经济变量（因素）的敏感度相关联的均衡资产定价模型。

ARCH/GARCH model（（一般化）自回归条件异方差模型）

使用历史数据来测量时变条件下的波动率。

Asian option（亚式期权）

由期权有效期内的平均价格来决定盈利的期权。

Ask(offer) price（卖价）

做市商出售基础或衍生证券的价格。

Asset（资产）

一般术语，指任何有经济价值的事物。

Asset allocation（资产分配）

关于如何将财富分配到不同类别的资产（例如股票、债券和现金）的决定。

Asymmetric information（信息不对称）

一方得到的信息多于另一方的情况。

***At-the-money option*（平值期权）**

执行价格等于或非常接近于现货市场上标的证券价格的期权。

Auction(gilts)（拍卖（金边证券））

发行新证券的方式。获胜的买家按照他们的竞标价格支付。非竞争性买家支付成功竞价者的加权平均价格。

Backwardation（现货溢价）

远期/期货的价格低于现货价格的情况，参见 Contango。

Bank bill(acceptance credit)（银行汇票）

银行从公司（折扣）购买的票据，并承诺到期时向任何票据的持有者支付。

Barbell portfolio（杠铃式投资组合）

组合中每个债券的久期相差很大的债券组合。

Basis（基差）

现货价格与期货价格的差额。

Basis point（基点）

1%的 1/100。

Basis risk（基差风险）

由一段时间内基差变化引起的风险。

Bear market（熊市）

描述价格不断下降的市场状况。

Bear spread(with calls)（(看涨期权)熊市差价）

出售一个执行价格较低的看涨期权，同时购买一个执行价格较高的看涨期权。两个期权到期日相同。

Bearer bond（不记名债券）

债券的所有权属于持有者，不需要登记注册，所有权随着持有者的改变而转移。

Benchmark portfolio（基准组合）

对比已有组合的业绩与风险的参考组合。

Best execution（最佳执行）

经纪人向客户提供最低价格(购买股票)或者最高价格(出售股票)。

Beta

度量证券的收益变动相对市场组合收益变动的敏感度。

Bid price（买价）

市场交易者提供的购买基础或衍生证券的价格。

Bid-ask(offer)spread（买卖价差）

买价与卖价之间的差额，参见 Bid price，Ask price。

Bill of exchange（汇票）

如同一张延后到期的支票。商品购买者发出一张"票据"，保证未来某天进行支付。在到期之前，汇票可以在二级市场出售，兑换现金，可用于海外贸易融资。

Black-Scholes model（Black-Scholes 模型）

用来对欧式期权定价的模型。

Bond market（债券市场）

交易长期固定收益证券的市场。这些金融工具通常支付利息。

bootstrapping（重复取样法）

在给定的数据中随机抽取一组样本的特殊的统计技术。样本是在原始的观测值中反复抽取产生的。

BOPM

二项式期权定价模型。

Broker（经纪人）

负责执行购买或出售金融资产指令的个人或公司，参见 Discount broker。

Brownian motion（布朗运动）

描述变量(如股票价格)的随机时间路径的特殊随机过程。

Bubble（泡沫）

股价快速增长，表明相对基本面情况，企业价值被过高估计。

Bull market（牛市）

描述价格不断上涨的市场状况。

Bull spread(with calls)（(看涨期权)牛市差价）

购买一个执行价格较低的看涨期权，同时出售一个执行价格较高的看涨期权，两个期权到期日相同。

Bullet portfolio（子弹式组合）

一种债券投资组合，它包含的各个债券的久期十分接近。

butterfly（蝶型价差）

购买并且出售看涨期权或者购买并且出售看跌期权构成的收益策略。这种收益策略会呈现如同翅膀一样的 V 字型。

Call option（看涨期权）

一种衍生证券，持有者有权利在规定日期(欧式)或规定日期前(美式)以固定价格购买特定资产。

Call premium（看涨期权价格）

购买看涨期权时交纳的费用。

Callable bond（可提前赎回债券）

发行债券的公司可以在到期前赎回的债券。

Calling the mark（保证金催付）

根据盯市估价的保证金账户值低于维持保证金时要求客户交纳的保证金。

candlesticks（K 线图）

根据高—低价和开—收盘价，预测资产价格的方法。

cap（利率上限）

一组上限期权。

Capital asset pricing model(CAPM)（资本资产定价模型(CAPM)）

资产的预期收益率和市场组合的收益率存在线性关系的均衡模型。

Capital market line(CML)（资本市场线(CML)）

结合了市场组合与无风险利率的直线。描述了预期收益率与风险之间的关系，见 Efficient frontier。

Caplet（上限期权）

利率看涨期权，如果到期时利率超过执行价格或上限利率，即可获得收益。它可以用于对利率上升进行投机或者对冲。

Cash flow mapping（现金流映射）

将现金流折算至标准日期从而计算“在险价值”。

Cash flow matching（现金流匹配）

使实际的债券投资组合的现金流与债务偿付相匹配的被动债券投资策略。

Cash settlement（现金结算）

在某些期货和期权合约的结算过程中，使用现金支付，而不是交割标的资产。

Cash-and-carry arbitrage（现购自运套利）

理论上，通过标的资产和期货来进行无风险套利的策略。

Central Gilts Office(CGO)（中央金边证券办公室）

原英格兰银行的部门，到 1999 年为止，运行以电脑为基础的金边债券和其他证券的清算系统，现在由 CrestCo 接替。

Certificate of deposit（存款证）

由银行和其他金融机构发行的定期存款，是以收益率为基础进行报价的不记名货币市场工具。

Chaos theory（混沌理论）

试图通过非线性确定性模型来解释资产价格与收益随机行为的理论。

Chartist（图表分析员）

以行情图或其他图形为基础，预测价格变动的技术分析员。

Cheapest to deliver(CTD)（最廉价交割(CTD)）

长期国债期货合约的空头可以用来交割的最廉价债券。交易所指定一组债券可以用来交割。

Clean price（净价）

不包括应计利息或折扣的债券报价。

Clearing house（结算所）

与期权或期货交易所相关的公司，保证合约的履行以及提供其他便于交易的服务。

Closed end funds（封闭式基金）

受管理的投资公司，在交易所上市，它的每股价格是由供求状况决定的。

Closed form solution（封闭式解法）

一种求解形如 $y=f(x, z)$ 的数学方法。

Closing out（平仓）

出售一份已经持有的合约或购买以前做空的合约。

Closing price（收盘价）

某一特定证券在特定日期最后一次交易的价格。

Collar（利率双限）

利率上限的多头与利率下限多头的组合。

Collateral（抵押品）

市场上任何借入资金的价值。

Commercial paper（商业票据）

标明贷款条款的合法文书，期限可从 7 天到 2 年。

Commission（佣金）

Comparative advantage（比较优势）

Condor（鹰式价差）

购买和出售具有不同执行价格期权的投资策略。

Console（永久性债券）

参见 Perpetuity。

Contango（期货溢价）

远期价格高于(现货或者)未来即期价格。参见 Backwardation。

Contract (合约)

两个交易方之间的约束协议。

Convenience yield (便利收益)

从持有现货商品中获得的收益。

Conventional stocks (常规股票)

具有固定的利息支付和本金偿还的股票(即债券)。

Conversion factor (转换因子)

用于在期货市场中调整可交割的中长期国债的价值。

Convertible bond (可转债)

债券持有者可以在未来特定时期，以事先规定的价格，将债券转换为一定数额的公司股票。

Convertible stock (可转股)

持有者有权利(但不是义务)在特定日期、特定条件下，将持有的全部或部分股票转换为其他股票。

Convexity (凸度)

度量债券的价格、收益关系曲线的曲率。

Corporation (企业)

公司由股东所有的所有权形式。如果出现破产的情况，股东的个人资产不需要用来偿付未还清的残余款项。

Correlation (相关)

变量之间线性关系的量度。

Cost of carry (持有成本)

在两个时间段之间持有现货的成本。

Counterparty (交易对手)

签订合约的另一方。

Coupon (息票)

债券每年支付的利息，常常在两个相等的半年中分期付款。

Coupon stripping (债息剥离)

把息票从债券本金中剥离出来的过程，它创造了一系列零息债券资产。

Covariance (协方差)

两个变量之间相关性的度量。

Covered interest rate parity (抛补利率平价)

在外汇市场上没有套利的条件。在货币市场与现货、远期市场的外汇利率之间的关系。

Credit derivatives (信用衍生工具)

收益取决于“信用事件”的衍生工具。

Credit risk (信用风险)

描述交易对方违约的一般性风险，见 Default risk。

Credit Risk Plus(CreditRisk$^+$)

由瑞士信贷第一波士顿(Credit Suisse First Boston)提出的衡量信用风险的方法。

CreditMetrics(信贷矩阵)

由 J. P. 摩根提出的衡量信用风险变化的方法。

Cross hedge (交叉对冲)

一种期货对冲，期货的标的资产与被对冲的资产并不相同。

Cross rate (交叉汇率)

两种不同货币之间的汇率，可以由它们与第三种货币的汇率间接得出。

Cum-dividend (附有红利)

附有红利股票的购买者有权收取下次支付的利息。

Currency swap (货币互换)

一种货币本金和利息的支出(收入)与另一种货币本金和利息的支出(收入)进行交换的过程。

Daily price limits (波幅限额)

如果达到了限额，则停止当天的交易。

Day count (计日惯例)

在计算货币市场工具的价格时，计算天数的惯例。它确定了计算中所用的每月和每年的天数。

Day trading (当日交易)

同一天购买和出售相同的证券，在交易日结束之前平仓。

Dealer (交易者)

见 Market maker。

Debenture(secured loan stock/bond) (债权证)

可给予持有者获取利息和偿付资本之权利的文书。“固定支出”表示由特定资产支持；“浮动支出”表示由公司现在和未来资产担保；“无抵押贷款股票”是偿还顺序中级别较低的债务(包括清算后任何可以用于偿还的资产)。

Debt (债务)

作为发行者负债的贷款，发行者需要在未来支付现金。

Default risk (违约风险)

这种风险是指交易一方可能会违背他应遵守的部分或已经达成协议的交易中的剩余部分。

Defensive stock (防御性股票)

Beta 小于 1 的资产。如果市场投资回报率下降，这只股票投资回报率下降的幅度小于市场。

Delivery day (交割日)

在这一天，标的产品需要进行交割，并且多头方对空头方进行支付。

Delta hedge Delta(对冲)

通过考虑期权价格对于标的证券价格变动的敏感度，创造出一个对冲头寸。

Delta neutral portfolio Delta(中性投资组合)

投资组合的价值不受标的资产价值变动的影响。

Deposit insurance (存款保险)

被保险的银行存款，如果银行破产，保险公司负责偿付。

Derivative security (衍生证券)

这种证券的存在依赖于另一种证券的存在。

Dirty price (全价)

包括应计利息的债券价格。也被称为“全部包括的”价格。

Discount broker (折扣经纪商)

相对于提供全部服务的经纪人，这类公司以折扣价格提供有限的经纪人服务。

Discount rate(on Treasury bills) ((国债)折扣率)

以年为单位计算的赎回价格与购买价格的差额。

Diversification (分散化)

在投资组合中增加资产以降低风险的过程。

Dividend yield (红利收益率)

每股红利相对于每股价格的比率。

Dividend (红利)

支付给企业股东的现金。红利的数额可以随着时间改变，而且没有担保。

Duration (久期)

衡量债券价格随市场利率变动的敏感度。

Dynamic hedging (动态对冲)

通过连续交易股指期货来对股票组合保险的策略。

Economic profit (经济利润)

麦肯锡公司提出的决定一个项目盈利性的方法。定义为资本报酬与资本的加权平均成本之间的差，再乘以所使用的资本。

Economic value added(EVA) (经济增加值)

衡量和监测公司内不同部门的运作状况，并且比较不同公司业绩的一种方法。

Efficient frontier (有效边界)

等于有效集合。有效风险组合的集合，这些组合代表了最优的风险-收益关系。

Efficient market (有效市场)

资产的价格反映了其真实的内在价值的市场。

Efficient set (有效集合)

见 Efficient frontier。

Embedded option (嵌入期权)

如果环境改变，企业改变生产过程的可能性。这一概念被用于实物期权理论之中。

Equity (股权)

公司股东的所有者权益。

Equity(value) (股权(价值))

公司股权资本=股票数×当前股票价格。Share 也被称做“stock”或者“equity”。

Equity market (股票市场)

对公司的股票进行交易的市场。

Equity premium puzzle (股票溢价之谜)

经验观察发现，股票的平均收益大于由风险溢价经济模型预测出来的收益值。

Error correction Model（误差修正模型）

专门用于预测的计量经济方法，这类模型可以区分长短期效果。

Eurobonds（欧洲债券）

在发行国以外的地区发售以外国货币计价的债券，利息在税前支付并且通常是不记名债券。

Eurodollar（欧洲美元）

以美元表示的在美国境外的存款。

Eurodollar market（欧洲美元市场）

交易欧洲美元存款的市场。

“Euroland”（欧元国家）

通过采用单一货币——欧元而签订货币联盟的欧洲国家。

European option（欧式期权）

只能在到期日执行的期权。

Excess return（超额收益）

参见 Abnormal profits。

Excess volatility（过度波动）

资产价格的变动比单纯由基本经济变量所决定情况下的波动更大。

Exchange rate（汇率）

一个国家的货币相对于另外一个国家货币的价格。

Exchange rate overshooting（汇率过调）

一种货币理论，它预测由于货币价格的粘性和完全弹性导致汇率相对于长期均衡值过调。参见 Sticky price monetary model。

Exchange rate risk（汇率风险）

由于汇率变动导致的资产价值不确定的风险。

Ex-dividend(xd)（除权）

在除权日将会宣布对公司注册股东支付股息。对大多数金边证券，发生在支付日的前 7 个工作日。

Ex-dividend date（除权日）

在除权日，股票持有者被赋予得到下一次红利支付的权利。在这之后股票就将以无红利的价格进行交易。

Exercise price（执行价格）

如果期权被执行，期权买方能够以执行价格卖或者买期权的标的资产。

Exotic option（奇异期权）

用来形容具有相对复杂收益模式（比如路径依赖）的期权的通用名词，比如亚式期权、回望期权、障碍期权、择式期权。

Expectations theory（预期理论）

一种关于利率期限结构的理论，认为远期利率是市场关于未来利率的无偏估计。

Expiry date（到期日）

期权到期的时间。如果期权在到期日仍然没有被冲销掉，标的资产必须被用来进行交割。

Exponential weighted moving average（指数加权移动平均）

用于计算数列波动率的统计方法，该方法允许波动率是时变的。

Face value（票面价值）

参见 Nominal (value)。

Filter rule（过滤原则）

用于获得超额收益的技术分析方法。

Financial engineering（金融工程）

用来描述利用各种衍生证券（如看跌期权、看涨期权、期货）的组合，研究开发新的金融工具以获得特定的收益的通用名词。参见 Synthetic securities。

Financial futures contract（金融期货合约）

以金融市场中各种金融工具（如债券、股票指数、汇率单位）为标的资产的期货合约。

Financial instrument（金融工具）

各种有价证券的总称。

Fiscal policy（财政政策）

描述政府支出或者税收政策的变化。

Flat yield（水平收益率）

也称为 Interest yield 或 Running yield。根据债券票面价值计算得到的每年收益，算法为息票除以价格再乘 100。

Flex price monetary model（浮动汇率货币模型）

建立在经济基本变量（即货币供给、产出、利率）之上的汇率模型。它假设价格具有完全弹性，随时可调。参见 Sticky price monetary model。

Floor（利率下限）

下限期权的集合。

Floorlet（下限期权）

利率看跌期权，其收益是下限利率（执行价）与到期时实际利率的差值。下限期权可以用来对冲或者对利率下跌进行投机。

Foreign exchange market（外汇市场）

把一种货币换成另一种货币的市场。

Forward contract（远期合约）

交易双方协商在将来的某一天以今天确定的汇率买卖外汇的合约。

Forward points（远期汇率点数）

外汇远期汇率与现行汇率之间的差值。

FRA(forward rate agreement)（远期利率协议）

利率协议，在约定的到期日由一方向另一方支付即期市场利率和协议约定的参照利率的差价。

FRNs(forward rate notes)（远期利率票据）

每期支付的利息发生变化的附息债券。

Future value（终值）

今天一定数量的现金在未来某个日期所具有的价值。

Futures contract（期货合约）

买卖双方在未来某个约定的日期以签约时约定的价格交换某一数量商品的标准化协议。

Garman-Kohlhagen formula（Garman-Kohlhagen 公式）

建立在 Black-Scholes 公式基础上的欧式外汇期权的定价公式。

GEMM prices（金边市场做市商价格）

由英格兰银行发布的金边市场做市商于下午 4:15 报出的金边证券价格，金边回购的参与者通常把它作为结算金边抵押品市场价值的标准。

Gilt-edged market maker(GEMM)（金边市场做市商）

按照伦敦证券交易所成员和与他们直接相关的投资者的要求对金边债券做出双向报价的交易员。

Gilts,gilt-edged securities（金边证券）

由英国政府发行的以英镑计息的债券。

Gordon growth model（Gordon 增长模型）

计算公司或者公司股票价值的经济模型。模型假设公司的价值是由现在的红利、未来红利增长率和折现率决定的。

Greeks（希腊字母）

期权价格变化的简要统计量（比如 delta，gamma，theta，vega）。

Haircut（初始保证金）

参见 initial margin，要注意到，haircut 这个词有多种含义。

Hedge（对冲）

交易者通过买卖衍生证券来保护在现货市场已有头寸的交易。

Hedge fund（对冲基金）

是一种通常运用高杠杆交易进行投资、融资，承受高风险的基金。

Hedge ratio（套头比率）

衍生证券的价值随标的资产价值变化的预期比例。

Herding effect（追随效应）

指投资者跟随市场价格变化趋势的现象及其影响。

Historical volatility（历史波动率）

描述历史价格的变动，通常用标准差来衡量，参见 Volatility。

Holding period return（持有期回报）

在特定时期的回报率。

Immunisation（免疫）

保护债券资产组合收益率不变的策略。

Implied volatility（隐含波动率）

将观察所得的期权价格和一个“理论”期权价格视为相等，由此推导出的资产回报的波动率。

Index tracking（指数跟随）

一种复制选定指数变动轨迹的消极资产组合管理方式。

Indexed linked stock（指数调整股票）

利息支付和兑现值根据通货膨胀率进行调整的债券。

Initial margin（初始保证金）

在交易开始时，或者在保证金催付之后，现金超出证券价值的部分，在回购交易中，证券超过现金的部分。也被称为“haircut”，在期货市场中被称为“deposit”。

Interbank market（银行间市场(同业市场)）

银行间进行货币、货币远期和货币期权交易的非正式交易网络。

Intercommodity spread（品种间价差）

在两个有相同交割日但不同标的资产的期货合约上的一多一空的头寸。

Inter-dealer broker(IDB)（交易者间经纪）

不同金边做市商通过IDB进行以屏幕为基础的不记名交易。

Interest rate caps（利率上限）

见Cap。

Interest rate floor（利率下限）

见Floor。

Interest rate futures（利率期货）

建立在固定收益证券上(如短期国债、支票和债券等)的期货合约。

Interest rate parity（利率平价）

描述不同国家的利率和外汇汇率之间的均衡关系的模型。参见Covered interest parity和Uncovered interest rate parity。

Interest rate swap（利率互换）

把浮动利息支付转化为固定利息支付的过程(或是相反)。

Interest yield（利息收益率）

参见Flat yield。

Internal rate of return(IRR)（内部收益率）

使项目或者投资的折现值恰好为零的常数回报率

In-the-money（实值）

看涨(看跌)期权标的资产的价格高于(低于)期权的执行价格。

In-the-money option（实值期权）

具有正内涵价值的期权。

Intracommodity spread（同品种价差）

建立在相同标的资产但交割日不同的期货合约上的一多一空地位。

Intrinsic value(of an option)（(期权的)内涵价值）

现货价格和期权执行价格之间的差值。代表了如果期权现在被立即执行，投资者所能得到的收益。如果内涵价值为正则称期权为实值期权。

Investment trust（投资信托）

参见Closed fund。

January effect (1月效应)

一种经验性的异常现象，即1月份股票的回报率总是高于其他月份股票回报率，见Small firm effect，Weekend effect。

Jensen index (詹森指数)

建立在回归分析方法上的对投资组合的业绩评价，见Sharp ratio和Treynor ratio。

Jump diffusion process (阶跃扩散过程)

资产价格的突变随机序列。

Leverage (杠杆)

与只用自有资金相比，进行操作时增加回报(或者损失)的操作。

Limited company (有限公司)

参见Corporation。

Liquidity preference hypothesis (流动性偏好假设)

预期理论的扩展，它认为到期日长的债券具有期限溢价，溢价的大小取决于离到期日的期限长短而不随时间变化。

Local (自营商)

在期货交易中用自己的账户进行交易的交易员。

London interbank offer rate(LIBOR) (伦敦同业间拆借利率)

欧洲美元存款所获得的浮动利率。

Long position (多头)

表示购买了基础证券或者衍生证券的头寸。

Margin (保证金)

在进行期货或者期权交易时必须上交的抵押品，目的是为了确保清算所规避信用风险。

Margin call (保证金催付)

在交易盯市之后发出的通知，它是为了使保证金账户再回到初始保证金的水平。

Market maker (做市商)

交易所内负责执行公开市场指令的交易员。

Market portfolio (市场组合)

根据特定市场内所有证券价值占市场总价值的比例建立起来的投资组合。

Market risk (市场风险)

不能通过分散化消除的风险。资产总风险中与市场组合运动相关的部分，参见Systematic risk。

Market segmentation hypothesis (市场分割假设)

该假设根据影响债券供给和需求的变量，解释具有不同到期日的债券其收益率不同的原因。

Market timing (相时策略)

在市场组合和无风险资产之间分配资金的投资组合管理。

Mark-to-market (盯市)

根据行情确认证券当前市场价值的过程(对于债券要考虑到应计利息)。

Maturity date (到期日)

股票被赎回的日期。

Mean return（平均回报）

对中间趋势的度量，定义为将所有个体回报相加除以总的个体数。

Mean reversion（均值回归）

描述时间序列轨迹频繁回到其长期平均值的过程。

Mean variance portfolio（均值方差投资组合）

只考虑单个资产预期回报、方差和协方差的投资组合优化技术。

Merger（合并）

两个公司签订的合二为一、共同经营的合约。

Mezzanine finance（夹层融资）

同时具有债券和股票性质的混合债务。高风险、高收益，经常带有认股权证。次级债券和垃圾债券通常属于夹层融资。

Middle price（中间价）

买价和卖价的平均值。

Monetary policy（货币政策）

利用利率和改变货币供给增长率来影响通胀率。

Money market（货币市场）

到期日小于1年的短期金融工具市场。

Moral hazard（道德风险）

经济学概念，通常见于保险市场，指在保险合同签订以后投保者的行为使投保的事件发生的可能性增大。

Mutual funds（共同基金）

参见 Closed fund。

Naive hedge ratio（简单对冲比率）

计算对冲现有头寸所需期货合约数的方法，算法是将零时刻要对冲的合约总价值除以期货合约的票面价值。

Naked position（裸头寸）

指期权头寸中没有包含冲销该期权头寸的标的股票头寸。

Net present value(NPV)（净现值）

未来现金流减去资本成本和投资成本的现值，参见 Adjusted present value。

Nominal(value)（名义价值）

也称为 Face value 或 Par value。交易中协议规定的现金量。

Normal distribution（正态分布）

在金融中常用的一种钟形、对称的连续分布函数。这种分布函数只需要用均值和方差就可以描述。

Off balance sheet items(OBS)（表外项目）

没有反映在银行的资产负债表的负债之中的项目。

Open interest（未平仓数）

没有结清或者交割的期权或期货合约的总数。

Option（期权）

购买者有权利但没有义务在指定的日期或者在指定日期之前，以指定的价格买入（看涨期权）或出售（看跌期权）特定标的资产的合约。也指为了获得买入或卖出标的资产的期权而支付的价格。

Option premium（期权价格）

期权的价格。

Options clearing corporation(OCC)（期权清算公司）

对所有在美国交易的期权进行清算的公司（期货期权除外）。

Ordinary share（普通股）

普通股代表对公司剩余价值的求偿权。它们通常具有表决权，普通股股东是公司的拥有者。参见 Preference share。

Out-of-the-money（虚值）

看涨（看跌）期权的标的资产的价格低于（高于）期权的执行价格。

Over-the-counter(OTC) instrument（场外工具）

由发行者和购买方直接进行磋商签订的合同。

P/E ratio（市盈率）

公司当前股票价格除以公司的每股收益。

Par value（票面价值）

参见 Nominal value。

Partnership（合伙）

两个或两个以上的人共同经营的所有权形式。

Passive portfolio management（消极投资组合管理）

参见 Index tracking。

Performance measure（业绩衡量）

衡量一投资组合相对于某一基准投资组合的业绩。不同投资组合在风险上的差异也要考虑在内。

Perpetuity（永久债券）

一种固定收益资产，发行者永久性支付利息但是不赎回本金。

Peso problem（比索问题）

由于样本数据不能代表总体数据导致预测有偏的境况。最初，数据用于 20 世纪 70 年代比索的远期利率。

Pit（交易场）

在期货或者期权交易所中，用来交易合约的场所。

Plain vanilla swap（普通香草互换）

描述基本的“固定—浮动”利率互换的名词。

Political risk（政治风险）

描述由于国外政府政策变化导致的国外资产收入的不确定，它可能会对投资者不利。

Portfolio（证券组合）

“一篮子”不同资产。

Portfolio balance model（证券组合平衡模型）

一种认为汇率由国内和国外所有资产决定，而不仅仅是由单一的货币供给因素决定的模型。

Portfolio insurance（组合保险）

运用期权、期货和(或)其他证券，设计出具有最小未来价值的股票组合。

Position limit（头寸限额）

对一种特定的资产或者资产组合的最大持有值。这个限值可能是单个交易者自己设定的，也可能由经纪人设定，还有可能由交易所限定(如 CBOE)。

Position trader（头寸交易者）

持有投机性头寸 1 天到 1 个月甚至更长时间的交易者。

Preference shares（优先股）

一种既有普通股的特点又有债券特点的混合金融工具，参见 ordinary shares。

Present value（现值）

未来现金支付在今天的价值。

Primary market（一级市场）

金融工具的发行市场。

Principal-agent problem（委托—代理问题）

描述在不同代理人之间的利益矛盾(如股东和经理)。

Program trading（程序化交易）

用电脑实时处理数据以发现套利机会。

Project finance（项目融资）

一种利息取决于一个特定项目的收益(例如水力水电工程)而非融资公司的总体收益率的融资方式。

PSBR(public sector borrowing requirement)（公共部门借款要求）

英国政府要求公司为防止本年内入不敷出所筹集的准备金的数目。

Purchasing power parity（购买力平价）

在不同地区生产的产品，以同种货币计价时应该以相同的价格出售。

Pure discount bond（纯贴现债券）

参见 Zero coupon bond。

Put（看跌期权）

一种衍生证券，购买者拥有可以在到期日或到期日之前以事先商定的价格卖出某种产品的权利。

Put premium（看跌期权价格）

看跌期权价格。

Put-call parity（看跌—看涨平价）

由套利理论决定的看涨期权和看跌期权之间的价格关系。

Random walk(model)（随机游走(模型)）

认为变量(例如股价，汇率)的变化是独立同分布的模型，这表明变量的变化是不可测的。

Rational bubble（理性泡沫）

参见 Bubble。

Rational expectation（理性预期）

这个观点认为人们在对一个变量进行预测的时候利用了所有的有效信息，因此不会产生系统预测误差。

Real option（实物期权）

描述弹性管理的价值的名词，应当包含在 NPV 的计算之中。

Rebate interest（回扣利息）

在购买一种没有利率的债券时，由债券的出售者支付给购买者的利息。

Redemption yield（赎回收益率）

使债券的购买价格和未来利息支付以及到期本金的现值相等的收益率，即一个债券的 IRR。

Registration（注册）

一项资产的所有权正式登记的过程。

Replication portfolio（复制组合）

参见 Synthetic securities。

Repo（repurchase agreement）（Repo(回购协议)）

一种合同形式的交换，规定由一方向另一方卖出某种债券，同时商定在未来某一时刻以一个商定的价格再买回相同数量的债券。

Repo rate（回购利率）

以利率的形式表示的回购协议的收益(每年%)。

Retained earnings（留存收益）

公司未向股东分配的那部分收益。

Return on capital(ROC)（资本回报率）

衡量一个项目盈利能力的指标。它定义为扣除折旧的税后收益除以所占用的资金。

Reverse repo（逆回购协议）

从购买债券一方的角度来看的回购协议。

Rights issue（配股）

面对现有的股东发行股票的进一步的融资。

Risk（风险）

由资产的价格或是收益率产生的不确定性。参见 Systematic risk 和 Unsystematic Risk。

Risk adjusted return on capital(RAROC)（风险调整后收益率）

由信孚银行引入的衡量银行系统资本收益率的概念，参见 ROC。

Risk aversion（风险厌恶）

描述了投资者对风险的一种态度，在两个具有相同的预期收益率的投资机会中，一个风险厌恶的投资者会选择风险较小的投资。

Risk free rate（无风险利率）

确定的投资收益率。

Risk management (风险管理)

一套衡量和控制风险的技术。

Risk neutral valuation (风险中性估值)

利用无套利理论进行的期权定价。将目前的期权价格定义为第 2 天期权价格的加权平均。其中权重反映了风险中性概率，即假设股票的价格按照无风险利率增长。

Risk neutrality (风险中性)

投资者对风险大小态度无差异的情形。

Risk premium (风险溢价)

风险厌恶的投资者在持有某种债券时，在无风险利率之外要求获得的额外收益。

RiskGrade™

由 J. P. 摩根提出的方法，用来衡量组合风险相对于市场基准的变化。

RiskMetrics™

由 J. P. 摩根提出的方法，用来衡量现货市场和衍生品市场的市场风险。

Running yield

参见 Flat yield。

Scalpers (抢帽投机商)

指那些在市场价格变动之前按照买入价买入，按照卖出价卖出的期权期货交易者，他们持有期权期货的时间一般非常短。

Script issue (配股)

向已有的股东发售新股。

Secondary market (二级市场)

在债券发行后进行交易的市场。

Securities and Exchange Commission(SEC) (证券交易委员会)

一个对全美的证券和期权市场进行管理的联邦机构。

Security market line (证券市场线)

用 beta 来描述各种不同资产的预期收益率和风险的线性关系。参见 Capital market line。

Self regulating organisation(SRO) (自律组织)

为了响应 1986 年的《金融服务法案》成立的对金融服务机构进行授权和监管的组织(现已废除)。

Settlement date (结算日)

将物品所有权转移给另一方的日期。

Settlement price (结算价)

每个交易日结束时在盯市的基础上确定的期货价格。

Sharpe ratio (夏普指数)

等于收益和波动率的比值。是经过风险调整的投资组合收益率，这里风险由投资组合的标准差表示。

Short hedge (空头对冲)

对现货市场的多头进行对冲。

Short position (空头头寸)

在市场上卖出的股票多于自己实际拥有的股票的情形。

Short sale (卖空)

先在市场上借入股票然后再卖出，并约定在将来的一个特定时刻必须归还借入股票的交易过程。

Single index model(SIM) (单指数模型)

仅使用一个变量来描述一只股票收益率的线性模型。如果选择的变量是市场收益率，那么这个模型又叫做市场模型。

Small firm effect (小公司效应)

小公司的股票经过风险调整后的收益率往往高于其他的投资组合(如市场组合)。参见 January effect，Weekend effect。

Sole proprietor (独资)

公司的所有权归公司所有者个人所有的公司组织形式，公司的所有者对公司具有无限责任。

Specific risk (独特风险)

公司股票的总风险中一个公司独有的部分，这部分风险可以被分散掉，因此，不对这种风险进行定价。参见 Market risk。

Speculation (投机)

具有不确定结果的投资策略。

Speculative bubbles (投机泡沫)

参见 Bubbles。

Spot(cash) market (即期(现货)市场)

资产需要立即(或近似立即)交割的市场。

Spot price (即期价格)

在即期市场进行交易的资产价格。

spread(yield spread) (价差(收益率价差))

投资者的卖出价和买入价之间的差价，或是两种债券的收益率之差。

Spread trading (价差交易)

通过持有两种具有负相关性的期货合约以降低总风险暴露的投资方式。

Static hedge (静态对冲)

持有期货对现货进行对冲，并持有这个投资组合直至到期日的投资策略。

Sticky price monetary model (粘滞价格货币模型)

假设资产价格具有完全弹性，但是商品的价格是“粘滞的”，因而调整缓慢。参见 Flex price monetary model，Exchange rate overshooting。

Stock exchange money broker(SEMB) (股票交易所货币经纪商)

借入借出货币、金边证券和其他债券的中介公司。

Stock index futures (股票指数期货)

以股票指数为标的物并且需要现金交割的期货合约。

Stock index option (股票指数期权)

给持有者以执行价买入或卖出股票指数的权利的期权。

Stock split (拆股)

在没有进一步融资的情况下增加现有股东的股票数目的过程。一般预示着股价的下跌。

Straddle (跨式价差)

由相同执行价格的一个买入期权和一个卖出期权构成的投资组合。组合收益的图像表现为“V”型或“反 V”型。

Strangle (勒式价差)

由不同执行价格的一个买入期权和一个卖出期权构成的投资组合。组合收益的图像表现为“平底”型或“平顶”型。

Strategic asset allocation (资产配置策略)

以某个地区或部门的长期投资前景为基础的投资策略。

Strike price (执行价格)

期权的持有者有权在未来某一时刻买入或卖出特定的实物或是金融资产的价格。

Strips market (息票剥离市场)

把息票从附息债券中(合法地)分离出来进行交易的二级债券市场。

Subordinated debt (次级债务)

当公司破产时，求偿权在其他债券持有者之后的债务。

Swap dealer (互换交易者)

将固定利率的借款和浮动利率的借款进行交换或是将不同货币的本金利息进行交换的中介机构。

Swap (互换)

双方商定在未来特定日期交换现金流的协议。

Synthetic securities (合成证券)

利用不同的融资工具组合而成与另外一种资产具有相同的未来现金流的金融产品(例如用现货市场的资产合成远期证券)。

Systematic risk (系统风险)

取决于整个市场条件的风险。参见 Market risk。

Tactical asset allocation (战略资产配置)

基于国家间短期的经济表现将资金在不同的国家间进行转移。

Tail(尾巴)

在一次拍卖中平均价和最低价的差，也可用收益率的差的形式表示。

Tap stock (连续调整的股票)

组合中将在未来逐步卖给做市商的股票。

Term repo (定期回购)

具有固定到期日(通常大于 1 天)的回购协议。

Term structure of interest rate (利率期限结构)

在相同的风险等级下，债券的到期日和收益率之间的关系。

Tick (刻度)

衡量价格变化的单位，证券价格变动的最小值。

Time value(of an option)（期权的时间价值）

期权价格超出其内涵价值的部分。

Transformation line（转换曲线）

描述一个投资组合的预期收益率和风险之间关系的曲线，这个投资组合一般只包括一“捆”风险资产和无风险资产。

Transmission mechanism（传送机制）

描述了经济政策的变化如何在长期和短期内影响经济形势的过程。

Treasury bill（短期国债）

由政府折价发行，到期日一般不大于12个月的债券。

Treasury bond（长期国债）

由政府发行，到期日一般大于12个月的债券，这种债券一般按期支付一定的利息。

Treasury note（中期国债）

美国对到期时间一般介于1年至7年的中期国债的称呼。

Treynor ratio（特雷纳比率）

对风险调整后组合收益率的衡量，这里风险用beta(投资组合的市场风险)来表示。

Uncovered interest(rate)parity（未抛补利率平价）

不同国家之间的利率和汇率的预期变化之间的关系。

Underlying(asset)（标的(资产)）

作为衍生品合约基础的资产(例如实物商品、短期债券、股票、股票指数等)

Unit trust（信托公司）

开放式的投资基金，是一种针对小投资者的投资组合。

Unsecured loan stock（无抵押债券）

在所有的债务(包括在清算后任何可支付的资金)中求偿顺序最低的债务，如果是“可转换”的，那么在持有者的要求下也可以(以一个事先商定的转换率)转换为股权。

Unsystematic risk（非系统性风险）

一个证券的风险中不能由普遍市场状况解释的部分。

Value at risk（在险价值）

在某个时间区间上以特定的概率存在的以货币形式衡量的最大损失。

Variance（方差）

衡量一种资产的收益率对它的平均收益率的分散程度。数值上等于标准差的平方。

Variation margin（变动保证金）

根据逐日盯市的结果，每日收益或损失的变化值。

Vega(也称lambda,kappa,或sigma)

对于看涨或看跌期权对波动性的敏感度的描述。

Venture capital（风险资本）

一些小公司或是成长型的公司之间的融资方式，一般是债务和股权的混合融资。

Volatility（波动率）

对资产价格变化率的衡量。参见 Implied volatility，Historic volatility。

Volatility smile（波动率微笑）

期权的隐含波动率和其他变量(例如不同的执行价格、不同的到期日)之间的关系。

Warehousing（持仓）

一个金融机构账面上持有一定开放头寸，直到找到一个合适的长期交易对手。

Warrant（认股权证）

赋予持有者在未来某一时刻以特定价格直接从公司获得股票的权利的金融工具，是一种看涨期权。

Weekend effect（周末效应）

描述了股票在周一的回报率通常小于一周其他时期的经验结果。参见 January effect，Small firm effect。

Weighted average cost of capital(WACC)（加权平均资本成本）

当同时使用股权和债务融资时，公司所有股权和债务的总成本。可以在税前和税后分别计算。

Wiener process（维纳过程）

参见 Brownian motion。

Writer（期权出售者）

期权的卖方，看涨和看跌期权合约的发行者都处于空头状态。

Yield curve（收益率曲线）

参见 Term structure of interest rates。

Yield to maturity（到期收益率）

债券的内部收益率。

Zero coupon bond（零息债券）

不支付任何利息的债券。这种债券在面值的基础上折价发行。

符号列表

$f(.)$	函数(变量)
a	该年内的天数(按照货币市场的惯例计算天数)
Aaa,Aa,A,Baa,etc.	穆迪(Moody)公司债券评级
AAA，AA，A，BBB，etc.	标准普尔公司债券评级
AAR	年度超额收益
ADR	美国存托凭证
AI	应计利息
AIM	其他投资市场
ANN	人工神经网络
APT	套利定价理论
APV	调整后的现值
AR	超额收益
ARCH	自回归条件异方差
ARR	会计收益率

AV	放弃价值
B	(期货合约中的)基差或者债务价值
BBA	英国银行家协会
BCCI	国际信用商业银行
BD	坏账
BDT	为利率衍生工具定价的 Black-Derman-Toy 模型
BF	互换协议中浮动利率债券的价值
BIS	国际结算银行
BOPM	二项式期权定价模型
B - S	Black - Scholes 期权定价模型
BX	互换协议中固定利率债券的价值
BY	债券等价收益率
C	看涨期权价格或债券定期支付的利息
C	方差一协方差矩阵(对于在险价值)
$C(S,T,K)$	给定现价 S、到期时间 T 和执行价格 K 的看涨期权价格
CAPM	资本资产定价模型
CC	持仓成本(期货合约中)
CD	存单
CF	用于国债期货的转换因子
CF_i	时期 i 的现金流
CML	资本市场线
CMR	累积死亡率
CP	商业票据
cp_T	互换期权到期时的息票互换率
CTD	最廉价交割债券
$\mathrm{C_u}, \mathrm{C_{uu}}, \mathrm{C_{ud}}$	二项式模型中的看涨期权价格序列
CV	连续价值
C-VaR	在险信用价值
D	债券久期或股票、债券的不连续红利
DCF	折现现金流
DPV	折现值
$\mathrm{d}z$	标准维纳(Wiener)过程
E	股东权益资本
E^*	风险中性假设下的预期价值
EAR	股权(总)资本比率
EBITD	利息、折旧、税前收益
EDF	预期违约频率
EH	预期假设

EMH	有效市场假设
EP	经济利润
$E_t r_{t+i}$	$t+i$ 期间的短期利率预期价值
EV	极值理论
EVA	经济增加值
EWMA	指数加权移动平均
EX	X 的预期值
F	期货/远期价格
f_c	连续复式期货/远期率
FDIC	美国联邦储蓄保险公司
FFA	远期一远期协议
f_{ij}	从第 i 期末到 j 期的远期利率
FP	(货币)远期溢价
FPMM	弹性汇率货币模型
FRF	法国法郎(SWIFT 代码)
FRN	浮动利率票据
FRU	无偏远期利率
FSA	金融管理局
FT	金融时报
FV	(债券)面值
FVF	期货合约的面值
FVS	现货头寸的面值
FX	外汇
g	增长率或银行贷款违约率
GARCH	一般化 ARCH 模型
GBM	几何布朗运动
GDR	全球存托凭证
h	对冲比率
HPR	持有期收益
IMRO	投资经理监管组织
IO	只收利息债券
IPO	首次发行新股
IR	投资比率
IROC	资本的投资收益
IRR	内部收益率
I_t	t 时刻的投资
J	阶跃扩散运动中阶跃的规模
K	期权的执行价

k	BOPM 中向上移动的次数
KC	资本成本
LAPF	人寿保险与养老基金
LAUTRO	人寿保险与信托监管机构
LBO	杠杆式收购
LIBID	伦敦银行同业借入利率
LIBOR	伦敦银行同业拆借利率
M	到期价值或者其他已知的未来支付
m	至投资到期的天数(对于货币市场的计日惯例)或者互换和互换期权每年支付的次数
MA	移动平均
MBO	管理层收购
MCS	蒙特卡罗模拟
MD	修正久期
m_i	国家 i 的货币供给的自然对数
M_i	国家 i 的货币供给
MM	Modigliani-Miller
MMR	边际死亡率
MPC	货币政策委员会
MSC	边际标准差
N	至到期日的期数
$N(\mu,\sigma)$	具有均值为 μ，标准差为 σ 的正态分布
NCPPS	非累积永久优先股
N_f	远期合约的数量
NPV	净现值
NVA	净资产价值
OBS	表外项目
OCC	期权清算公司
OMO	公开市场操作
OTC	场外
P	资产价格(比如看跌期权)
P&L	利润与损失数字
$P(S,T,K)$	给定即期价格 S、到期时间 T 和执行价 K 的看跌期权价格
P^*	“长期”均衡价格
p. a.	每年
PBM	组合平衡模型
PCS	财产理赔服务
PDE	偏微分方程

PEAPC	价格期望增强的菲利普曲线
%RI	风险冲击百分比
PI	盈利性指数
p_i	结果 i 的概率
PO	只收本金债券
PPP	购买力平价
PSBR	公共部门借款要求
P_t^*	完全预期股票价格
PV	现值
Q	名义本金价值(互换协议中的票面价值)
Q_f	期货合约的 IMM 指数报价
R	资产的%收益(即资本增值+每期的现金流)或销售收入
$\bar{R}$	(样本)均值
R&D	研发
$R(S,t)$	实物期权的价值，它是底层资产和时间 t 的函数
r, r_t	名义(无风险)利率或者今天($t=0$)和时间 t 之间的安全利率(也就是即期利率)
RADR	风险调整后折现率
RAR	风险调整后资产率
R_c	以连续复利计的收益率
r_{corp}	银行对公司利率的改变
RE	理性预期
RG_i	组合的 RiskGrade
R_j	到期时间为 j 时期的“长期”利率
R_m	市场组合的收益
RMSE	误差的根均方
RNV	风险中性估值
ROC	使用资本的收益
ROI	投资收益率
rp	股票的风险溢价
RSI	相对强度指数
r_{t+i}^e	对于时期 $t+i$ 的预期未来“短期”利率
S	资产价格、即期价格(比如股票价格、汇率)
S&L	储贷:金融机构(美国)
s^2, σ^2	样本方差
S_{BE}	平衡点股票价格
SEC	证券交易委员会
SF	合成远期/期货率

SFA	证券与期货协会
S_i	基金 i 的夏普率
SIM	单指数模型
SIO	股票指数期权
SL	合成的杠杆公司
SML	证券市场线
Sp	利率信用价差
SPMM	粘滞价格货币模型
SR	生存率
SRO	自律组织
Std	标准差
SV	残值
T	衍生品合约的到期时间或者转移概率(参见第25章)
$T_t^{(n)}$	n 期债券在时间 t 的期限溢价
TV	终值
U	效用
URG_p	投资组合的未分散 RiskGrade
USD	美元(SWIFT 代码)
UU,UD,DD,etc.	在决策树中的移动，其中U代表价格上升，D代表价格下降
V	资产/投资组合/公司的价值
VAR	向量自回归模型
VaR	在险价值
VLIS	价值线投资考察公司
V_p	投资组合的价值
WACC	加权平均资本成本
WC	营运资本
WCS	最差情景分析
w_i	资产 i 在投资组合中的权重
y	收益率、目前的收益率、到期日收益率或内部收益率
y_f	期货合约的交割收益率
z	一个指数点的价值
Δ	期权的 delta(或者变量的不连续变化)
Γ	期权的 gamma
Λ	期权的 vega
Π	利润
Θ	期权的 theta
α,β	回归模型中的参数
$\beta_i,\beta_\text{f},\beta_\text{p}$	资产 i 的 beta、期货的 beta、投资组合的 beta

δ	红利收益
δ_i	贴现率$=(1+r_i)^{-1}$
ε_{it}	资产 i 的非系统风险或独特风险
λ	（在实物期权定价中）竞争者进入的瞬时概率，或是 EWMA 模型中的衰减因子
λ_m	风险的市场价格
μ	GBM 的漂移率
υ	便利收益率
π	通货膨胀率（商品或服务）
ρ	相关系数或 Rho，期权时间价值的变化
σ	总体标准差或波动率（$\sigma^2=$方差）
σ_{ij}	资产 i 和资产 j 的协方差

相关网站

Credit Rating Agencies	
Moody's	http://www.moody.com
Standard & Poor's	http://www.standardandpoors.com
Global investment Banks	
Goldman Sachs	http://www.goldmansachs.com
Morgan Stanley Dean Witter	http://www.morganstanley.com
Merrill Lynch	http://www.merrilllynch.com
J.P.摩根	http://www.jpmorgan.com
Chase Manhatten	http://www.chase.com
Deutsche Bank (Research)	http://www.dbresearch.de
HSBC	http://www.hsbc.com
Nomura	http://www.nomura.com

Stock Exchanges

London Stock Exchange	http://ww. londonstockexchange. com
New York Stock Exchange	http://www. nyse. com
Nasdaq Stock exchange	http://nasdaq. com
Hong Kong Stock Exchange	http://www. hkex. com. hk/index. html
Tokyo Stock Exchange	http://www. tse. or. jp
Australian Stock Exchange	http://www. asx. com. au
Gruppe Deutscher Borse	http://www. exchange. de

Derivative Exchanges

Chicago Board Options Exchange	http://www. cboe. com
Chicago Board of Trade	http://www. cbot. com
Chicago Mercentile Exchange	http://www. cme. com
Philadelphia Stock Exchange	http://www. phlx. com
SIMEX (Singapore)	http://www. simex. com. sg
Hong Kong Futures Exchange	http://www. hkfe. com
Sydney Futures Exchange	http://www. sfe. com. au
LIFFE (London)	http://www. liffe. com
Eurex (Frankfurt)	http://www. eurexchange. com

Central Banks and Regulatory Authorities

Bank for International Settlements	http://www. bis. org
Bank of England	http://www. bankofengland. co. uk
Federal Reserve Board (USA)	http://bog. frb. fed. us
Bank of Japan	http://www. boj. or. jp/en/index. htm.
Reserve Bank of Australia	http://www. rba. gov. au
Monetary Authority of Singapore	http://www. mas. gov. sg
Securities and Exchange Commission	http://www. sec. gov
European Central Bank	http://www. ecb. int
Financial Service Authority (FSA)	http://www. fsa. gov. uk
HM Treasury	http://www. hm-treasury. gov. uk

Federal Reserve Banks in the USA

Federal Reserve Bank of Atlanta	http://www. frbatlanta. org
Federal Reserve Bank of Boston	http://www. bos. frb. org
Federal Reserve Bank of Chichago	http://www. chi. frb. org
Federal Reserve Bank of Cleveland	http://www. clev. frb. org
Federal Reserve Bank of Dallas	http://www. dallasfed. org

Federal Reserve Bank of Kansas City	http：//www. kc. frb. org
Federal Reserve Bank of Minneapolis	http：//woodrow. mpls. frb. fed. us
Federal Reserve Bank of New York	http：//www. ny. frb. org
Federal Reserve Bank of Philadelphia	http：//www. phil. frb. org
Federal Reserve Bank of Richmond	http：//www. rich. frb. org
Federal Reserve Bank of St. Louis	http：//www. stls. frb. org
Federal Reserve Bank of San Francisco	http：//www. frbsf. org

Risk Management

RiskMetrics	http：//www. riskmetrics. com
RiskGrade	http：//www. riskgrade. com
CreditRisk+	http：//www. csfb. com/creditrisk
KMV	http：//kmv. com

Newspapers and News Agencies

Bloomberg UK	http：//www. bloomberg. co. uk
Bloomberg	http：//www. bloomberg. com
Reuters	http：//www. reuters. com
The Economist	http：//www. economist. com
Financial Times	http：//www. ft. com
Wall Street Journal	http：//www. wsj. com

Discount Online Brokers

	http：//www. iii. co. uk
	http：//www. dljdirect. co. uk
	http：//www. comdirect. co. uk
	http：//www. selftrade. com
	http：//www. charlesschawb. com
	http：//www. thestreet. com

Others

Globex	http：//www. cme. com/globex2
Handbook of World Stock, Derivatives and Commodity Exchanges	http：//www. exchange-handbook. co. uk/sites. cfm
GAUSS™ site with links to many other sites with useful Gauss programs	http：//www. aptech. com

参考文献

Asarnow, E. and Marker, J. (1993) 'Historic Performance of the US Corporate Loan Market: 1988 - 93', ***Journal of Commercial Lending***, Vol. 10, No. 2. pp. 13 - 32.

Baillie, R. T. and Myers R. J. (1991) 'Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Commodity Futures Hedge', ***Journal of Applied Econometrics***, Vol. 6, pp. 109 - 124.

Ball, C. and Torous, W. (1985) 'On jumps in Common Stock Prices and their impact on Call Prices', ***Journal of Finance***, Vol. 40, pp. 155 - 173.

Barone-Adesi, G. and Whaley, R. E. (1987) 'Efficient Analytic Approximation of American Option Values', ***journal of Finance***, Vol. 42, No. 2, pp. 301 - 320.

Beckers, S. (1981) 'Standard Deviations in Option Prices as Predictors of Future Stock Price Variability', ***Journal of Banking and Finance***, Vol. 5, pp. 363 - 382.

Bernstein, P. L. (1992) ***Capital Ideas***, Macmillan, New York.

BIS (1988) 'Prospects for International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards', ***Consultation Paper Issued by the Committee on Banking Regulations and Supervisory Practices***, Bank of International Settlements, Basle, Switzerland.

Black, F. (1976) 'The Pricing of Commodity Contracts', ***Journal of Financial Economics***. Vol. 3, pp. 167 - 179.

Black, F. and Scholes, M. (1972) 'The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency', ***Journal of Finance***, Vol. 27, May, pp. 399 - 418.

Black, F. and Scholes, M. (1973) 'The Pricing of Options and Corporate Liabilities', ***Journal of Political Economy***, Vol. 81, May/June, pp. 637 - 659.

Black, F., Derman, E. and Toy, W. (1990) 'A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options', ***Financial Analysts Jorunal***, Vol. 46, January/February, pp. 33 - 39.

Boudoukh, J., Richardson, M. and Whitelaw, R. (1995) 'Expect the Worst', ***Risk***, Vol. 8, September, pp. 100 - 101.

Briys, E., Bellalah, M., Mai, H. M., DeVarenne, F. (1998) ***Options, Futures and Exotic Derivatives***, J. Wiley, Chichester.

Buffett, M. and Clark, D. (1997) ***Buffettology***, Rawson Associates.

Butler, J. S. and Schachter, B. (1996) 'Improving VaR Estimates by Combining Kernel Estimation with Historical Simulations', Vanderbilt University and Comptroller of the Currency (mimeo).

Cecchetti, S. G., Cumby, R. E. and Figlewski, S. (1988) 'Estimation of the Optimal Futures Hedge', ***Review of Economics and Statistics***, Vol. 70, pp. 623 - 630.

Chance, D., Marr, M. W. and Thompson, G. R. (1986) 'Hedging Shelf Registrations', ***Journal of Futures Markets***, Vol. 6, Spring, pp. 11 - 27.

Chiras, D. and Manaster, S. (1978) 'The Information Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency', ***Journal of Financial Econometrics***, Vol. 6, September, pp. 213 - 234.

Clewlow, L. and Strickland, C. (1998) ***Implementing Derivatives Models***, J. Wiley, Chichester.

Cox, J. C., Ross, S. A. and Rubinstein, M. (1979) 'Option Pricing: A Simplified Approach', ***Journal of Financial Economics***, Vol. 7, pp. 229 - 263.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. (1985) 'A Theory of the Term Structure of Interest Rates', ***Econometrica***, Vol. 53, pp. 385 - 407.

Cuthbertson, K. (1996) ***Quantitative Financial Economics: Stocks, Bonds and Foreign Exchange***, J. Wiley, Chichester.

Cuthbertson, K. and Nitzsche, D. (2001) ***Investments: Spot and Derivatives Markets***, J. Wiley, Chichester.

Danielsson, J. and de Vries, C. G. (1997) 'Extreme Returns, Tail Estimation and Value at Risk', ***Journal of Empirical Finance***.

Dowd, K. (1988) 'Option Clauses and the Stability of a Laisser Faire Monetary System', ***Journal of Financial Services***, Vol. 1, pp. 319 - 333.

Engle, R. P. (1995) ***ARCH: Selected Readings***, Oxford University Press, Oxford

Estrella, A., Park, S. and Persistiani, S. (2000) 'Capital Ratios as Predictors of Bank Failure', ***Economic Policy Review (Federal Reserve Bank of New York)***. Vol. 6, No. 2, July, pp. 33 - 52.

Fama, E. F. and French, K. R. (1980) 'Stock Returns and the Weekend Effect', ***Journal of Financial Economics***, Vol. 8, March, pp. 55 - 69.

Fortune, P. (1995) 'Stocks, Bonds, Options, Futures and Portfolio Insurance: A Rose by any Other Name', ***New England Economic Review (Federal Reserve Bank of Boston)***, July/August, pp. 25 - 46.

French, K. R. (1988) 'Permanent and Temporary Components of Stock Prices', ***Journal of Political Economy***, Vol. 96, pp. 246 - 273.

French, K. R. and Roll, R. (1986) 'Stock Return Variances: The Arrival of information and the Reaction of Traders', ***Journal of Financial Economics***, Vol. 17, pp. 5 - 26.

Galai, D. (1977) 'Tests of market Efficiency and the Chicago Board Options Exchange', ***Journal of Business***, Vol. 50, pp. 167 - 197.

Garman, M. B. and Kohlhagen, S. W. (1983) 'Foreign Currency Option Values', ***Journal of International Money and Finance***, Vol. 2, pp. 231 - 237.

Gay, G. and manaster, S. (1986) 'Implicit Delivery Options and Optimal Delivery Strategies for Financial Futures Contracts', ***Journal of Financial Economics***, Vol. 15, pp. 41 - 73.

Gay, G. D., Kolb, R. W. and Chiang, R. (1983) 'Interest Rate Hedging: An Empirical Test of Alternative Strategies', ***Journal of Financial Research***, Vol. 6, pp. 187 - 197.

Geman, H. (1996) 'Insurance Risk Securitisation and CAT Insurance Derivatives', ***Financial Derivatives and Risk Management***, Vol. 7, pp. 21 - 24.

Heston, S. L. (1973) 'A Closed Form Solution for Options with Application to Bonds and Currency Options', ***Review of Financial Studies***, Vol. 6, pp. 327 - 343.

Heyner, R. C. and Kat, H. M. (1994) 'Volatility Prediction: A Comparison of Stochastic Volatility, GARCH (1,1) and EGARCH (1,1) Models', ***Journal of Derivatives***, Vol. 2, No. 6, pp. 50 - 56.

Ho, T. S. Y. and Lee, S. B. (1986) 'Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims', ***Journal of Finance***, Vol. 41, pp. 1011 - 1029.

Hull, J. C. (2000) ***Options, Futures and Other Derivatives***, Prentice Hall International, London (4th edition).

Hull, J. C. and White, A. (1987) 'The Pricing of Options on Assets With Stochastic Volatilities', ***Journal of Finance***, Vol. 42, pp. 281 - 300.

Hull. J. C. and White, A. (1990) 'Pricing Interest Rate Derivatives Securities', ***Review of Financial Studies***, Vol. 3, No. 4, pp. 573 - 592.

Hull, J. C. and White, A. (1994a) 'Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models Ⅰ: Single Factor Models', ***Journal of Derivatives***, Vol. 2, No. 1, Fall, pp. 7 - 16.

Hull, J. C. and White, A. (1994b) 'Numerical Procedures for implementing Term Structure Models Ⅱ: Two Factor Models', ***Journal of Derivatives***, Vol. 2, No. 1, Winter, pp. 37 - 48.

J. P. Morgan (1996) ***RiskMetrics, Technical Document***, J. P. Morgan.

J. P. Morgan (1997) ***CreditMetrics, Technical Document***, J. P. Morgan.

J. P. Morgan (2000) ***RiskGrade, Technical Document***, J. P. Morgan.

Jackson, P., Maude, D. J. and Parraudin, W. (1996) 'Bank Capital and Value-at-Risk', ***Department of Economics, Birkbeck College, Working Paper***, August.

Jamshidian, F. (1989) 'An Exact Bond Option Pricing Formula', ***Journal of finance***, Vol. 44, March, pp. 205 - 209.

Jarrow, R., Lando, D. and Turnbull, S. (1997) 'A Markov Model for the Term Structure of Credit Spreads', ***Review of Financial Studies***, pp. 481 - 523.

Kareken, J. and Wallace, N. (1978) 'Deposit Insurance and Bank Regulation: A Partial Equilibrium Exposition', ***Journal of Business***, Vol. 51, No. 3.

Kupiec, P. and O'Brien, J. (1995) 'The Use of Bank Trading Risk Models for Regulatory Capital Purposes', ***Risk Magazine***, Vol. 8, No. 5.

Kuriel, A. and Roncalli, T. (1998) 'Option Hedging with Stochastic Volatility', LARE, University of Bordeaux, Montesquien IV (mimeo).

Kwast, M. L., Covitz, D. M., Hancock, D., Houpt, J. V., Adkins, D. P., Barger, N., Bouchard, B., Connolly, J. E., Brady, T, F., English, W. B., Evanoff, D. D. and Wall, L. D. (1999) 'Using Subordinated Debt as an instrument of Market Discipline', ***Report of a Study Group on Subordinated Notes and Debentures, Board of Governors of the Federal Reserve System, Staff Study No. 172*** (December), Internet: www. bog. frb. fed us/pubs/staffstudies/172/default. htm.

Leland, H. (1980) 'Who Should Buy Portfolio Insurance?', ***Journal of Finace***, Vol. 35, May, pp. 581 - 594.

Leslie, K. J. and Michaels, M. P. (1997) 'The Real Power of Real Options', ***The McKinsey Quarterly***.

Longstaff, E. A. and Schwartz, E. S. (1992) 'Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model'. ***Journal of Finance***, Vol. 47, No. 4, pp. 1259 - 1282.

Luehrman, T. A. (1988) 'Strategy as a portfolio of Real Options', ***Harvard Business Review***. Sept/Oct. MacBeth, J. D. and Merville, L. T. (1979) 'An Empirical Examination of the Black - Scholes Call Option pricing Model', ***Journal of Finance***, Vol. 34, December, pp. 1173 - 1186.

Mahoney, J. (1996) 'Forecast Biases in Value-at-Risk Estimations: Evidence from Foreign Exchange and Global Equity Portfolios', ***Federal Reserve Bank of New york Working Paper***, September.

Manaster, S. and Koehler, G. (1982) 'The Calculation of Implied Variances from the Black - Scholes Model: A Note', ***Journal of Finance***, Vol. 37, March, pp. 227 - 230.

Merton, R. C. (1973) 'An intertemporal Capital Asset Pricing Model', ***Econometrica***, Vol. 41, pp. 867 - 887.

Merton, R. C. (1974) 'On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates', ***Journal of Finance***, Vol. 29, pp. 449 - 470.

Merton, R. C. (1976) 'Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous', ***Journal of Financial Economics***, Vol. 3, March, pp. 125 - 144.

Mishkin, F. S. (1992) 'An Evaluation of the Treasury Plan for Banking Reform', ***Journal of Economic perspectives***, Vol. 1, Winter, pp. 133 - 153.

Nail, E. and Lee, M. (1990) 'General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolios with Discontinuous Returns', ***Review of Financial Studies***, Vol. 3, pp. 493 - 521.

Neftci (1996) ***An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives***, Academic Press, New York.

Park, H. and Chen, A. (1985) 'Differences Between Futures and Forward Prices: A further Examination of Marking-to-Market Effects', ***Journal of Futures Markets***, Spring, pp. 77 - 88.

Rendlemann, r. and Bartter, B. (1980) 'The Pricing of Options on Debt Securities', ***Journal of Financial and Quantitative Analysis***, Vol. 15, March, pp. 11 - 24.

Ross, S. A. (1976) 'The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing', ***Journal of Economic Theory***, Vol. 13, pp. 343 - 362.

Rubinstein, M. (1985) 'Alternative Paths to Portfolio Insurance', ***Financial Analysts Journal***, Vol. 41, July/August, pp. 42 - 52.

Rubinstein, M. and Leland, H. E. (1981) 'Replicating Options with Positions in Stock and Cash', Rubinstein, M. and Leland, H. E. (1981) 'Replicating Options with Positions in Stock and Cash', ***Financial Analysts Journal***, Vol. 37, July/August, pp. 63 - 72.

Saunders, A. (1999) ***Credit Risk Measurement***, J. Wiley, Chichester.

Schwartz, E. S. and Moon, M. (1999) 'Rational Pricing of Internet Companies, ***Financial Analysts Journal***, Vol. 56, No. 3, May/June, pp. 62 - 75.

Shiller, R. J. (1993) ***Macro Markets***, Oxford University Press, Oxford.

Silber, W. (1984) 'Marketmaker Behaviour in an Auction Market: An Analysis of Scalpers in Futures Markets', ***Journal of Finance***, Vol. 39, pp. 937 - 953.

Stoll, H. and Whaley, R. (1986) 'Programme Trading and Expiration Day Effects', ***Financial Analysts Journal***, Vol. 43. March/ April, pp. 16 - 23.

Tobin (1985) 'Financial Innovations and Deregulation in Perspective', ***Bank of Japan Monetary***

Economic Studies, Vol. 3, No. 2.

Toevs, A. and Jacob, D. (1986) 'Futures and Alternative Hedge methodologies', ***Journal of Portfolio Management***, Spring, pp. 60 – 70.

Trigeorgis, L. (1996) **Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation**, MIT press, Cambridge, Massachusetts.

US Treasury (1991) ***Modernising the Financial System: Recommendations for Safer More Competitive Banks***, Us Treasury.

Vasicek. O. A. (1977) 'An Equilibrium Characterisation of the Term Structure', ***Journal of Financial Economics***, Vol. 5, pp. 177 – 188.

West, K. D. and Cho, D. (1995) 'The Predictive Ability of Several Models of Exchange Rate Volatility', ***Journal of Econometrics***, Vol. 69, pp. 367 – 391.

Wilmott, P. (2000a) ***Paul Wilmott on Quantitative Finance Volume 1***, J. Wiley, Chichester.

Wilmott, P. (2000b) ***Paul Wilmott on Quantitative Finance Volume 2***, J. Wiley, Chichester.

Xu, X. and Taylor, S. J. (1995) 'Conditional Volatility and the Information Efficiency of the PHLX Currency Options Markets', ***Journal of Banking and Finance***, Vol. 19, pp. 803 – 821.

Xu, X. and Taylor, S. J. (1997) 'The Incremental Volatility Information in One Million Foreign Exchange Quotations', ***Journal of Empirical Finance***. Vol. 4, No. 4, pp. 317 – 340.